

Міністерство освіти і науки України  
Державний заклад  
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій


Кафедра математики та інформатики


**Антосієва Ірина Володимирівна**

**МЕТОДИКА ФОРМУВАННЯ В УЧНІВ СТАРШОЇ ШКОЛИ  
УЯВЛЕНЬ ПРО КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ЯК ЗАСОБУ РОЗВ'ЯЗАННЯ  
АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ**

**кваліфікаційна робота  
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня  
освітньої програми «Математика»  
за спеціальністю 014.04. Середня освіта (Математика)**

Особистий підпис  Ірина АНТОСІЄВА

Науковий керівник  Валерій ХМЕЛЬ,  
кандидат педагогічних наук, доцент  
кафедри математики та інформатики

В.о. завідувача кафедри  Юрій КОЗУБ,  
доктор технічних наук, професор  
кафедри математики та інформатики

Лубни – 2026

Зміст

Вступ

Розділ 1. Теоретичні засади формування в старшокласників уявлень про комплексні числа

1.1. Еволюція числових множин і місце комплексних чисел у шкільному курсі

1.2. Психолого-педагогічні основи засвоєння абстрактних математичних понять у старшій школі

1.3. Порівняльний аналіз чинних програм і підручників

1.4. Огляд сучасних методичних підходів до навчання теми «Комплексні числа»

Висновки до розділу 1

Розділ 2. Аналітична модель і вимоги до методики формування уявлень про комплексні числа

2.1. Освітній контекст і дидактичні проблеми засвоєння комплексних чисел

2.2. Дидактична модель формування уявлень

2.3. Критерії, показники та рівні сформованості уявлень

2.4. Навчально-методичне забезпечення методики

Висновки до розділу 2

Розділ 3. Практична перевірка ефективності методики

3.1. Структура й зміст методики

3.2. Організація педагогічного експерименту

3.3. Інструментарій вимірювання та критерії успішності

3.4. Обробка результатів і статистичний аналіз

3.5. Результати, обговорення, обмеження

Висновки до розділу 3

Висновки

Список використаних джерел

## Вступ

Актуальність теми. Сучасна шкільна математична освіта орієнтується на компетентнісний підхід, розвиток абстрактного й критичного мислення, уміння моделювати та розв'язувати задачі реального й теоретичного змісту. У цьому контексті тема комплексних чисел посідає особливе місце як логічне продовження еволюції числових множин і як дієвий інструмент розв'язання алгебраїчних рівнянь, зокрема тих, що не мають дійсних коренів. Проблема полягає не лише в опануванні формальних означень і операцій, а й у формуванні в старшокласників цілісних уявлень про природу комплексного числа, його геометричну інтерпретацію, зв'язок з коренями багаточленів і місцем у математичній картині світу. Педагогічна практика свідчить, що типові труднощі учнів спричинені абстрактністю поняття, розривом між алгебраїчними й геометричними моделями та фрагментарністю навчально-методичного забезпечення. Це зумовлює потребу в цілісній методиці, яка інтегрує дидактичну модель, поетапне формування понять, критерії та показники сформованості й емпіричну перевірку її ефективності.

Ступінь наукової розробленості проблеми. У вітчизняних і зарубіжних дослідженнях накопичено значний досвід викладання складних математичних понять у старшій школі, описано психологічні механізми формування абстракцій, запропоновано прийоми візуалізації та діяльнісні підходи. Водночас питання спеціально організованої методики саме формування уявлень про комплексні числа як засобу розв'язання алгебраїчних рівнянь залишаються недостатньо деталізованими з погляду критеріїв діагностики, поетапної побудови змісту і перевірки результатів у навчальному експерименті.

Мета дослідження розробити, теоретично обґрунтувати та експериментально перевірити методику формування в учнів старшої школи уявлень про комплексні числа як засобу розв'язання алгебраїчних рівнянь.

Завдання дослідження:

1. З'ясувати теоретико-методичні засади формування абстрактних математичних понять у старшій школі й окреслити місце теми «Комплексні числа» в курсі алгебри та початків аналізу.
2. Проаналізувати чинні програми, підручники та навчально-методичні ресурси щодо повноти й логіки подання теми.
3. Розробити дидактичну модель і змістово-процесуальну схему поетапного формування уявлень (алгебраїчна, геометрична та операційна компоненти; зв'язок із розв'язуванням рівнянь).
4. Визначити критерії, показники та рівні сформованості уявлень і побудувати інструментарій вимірювання.
5. Сконструювати навчально-методичне забезпечення методики (опорні конспекти, задачі-моделі, візуалізації, тренувальні та діагностичні матеріали).
6. Провести педагогічний експеримент, здійснити статистичну обробку даних і оцінити ефективність запропонованої методики.
7. Розробити рекомендації для вчителів щодо впровадження методики у навчальний процес.

Об'єкт дослідження процес навчання математики в старшій школі. Предмет дослідження методика формування в учнів старшої школи уявлень про комплексні числа як засобу розв'язання алгебраїчних рівнянь (цілі, зміст, методи, засоби, форми організації, критерії оцінювання).

Гіпотеза дослідження. Ефективність формування уявлень про комплексні числа істотно зросте, якщо: (а) зміст навчання структуровано як послідовність мікромодулів, що інтегрують алгебраїчну та геометричну інтерпретації; (б) навчальна діяльність ґрунтується на розв'язуванні задач, які природно приводять до введення уявної одиниці та комплексної площини; (в) оцінювання спирається на валідні критерії й показники, що відбивають знанняву, операційну та світоглядну компоненти; (г) учитель застосовує візуалізації, цифрові засоби і прийоми рефлексії для індивідуалізації навчання.

Методологічна та теоретична основа. Компетентнісний, діяльнісний і системно-цілісний підходи; теорія поетапного формування розумових дій; ідеї наочно-образної підтримки засвоєння абстракцій; принцип єдності алгебраїчної та геометричної ліній навчання математики. Концептуально робота спирається на уявлення про комплексне число як упорядковану пару та як вектор на комплексній площині; на фундаментальну теорему алгебри і зв'язок комплексних коренів із розкладом багаточленів.

Методи дослідження. Теоретичні: аналіз програм, підручників і науково-методичних публікацій; порівняльний аналіз підходів; моделювання дидактичної системи. Емпіричні: констатувальні та формувальні зрізи, педагогічний експеримент, анкетування/спостереження, експертна оцінка навчальних матеріалів. Статистичні: описова статистика, перевірка гіпотез, оцінка ефекту/надійності інструментарію, порівняння вибірок.

База та вибірка дослідження. Емпіричну перевірку методики здійснено на базі одного закладу загальної середньої освіти (I–III ступенів). У дослідженні взяли участь  $N = 70$  учнів двох паралельних 11-х класів віком 16–17 років. Кластерна рандомізація виконана на рівні класів: один клас віднесено до експериментальної групи ( $n = 35$ ), інший до контрольної ( $n = 35$ ). Навчання у контрольній групі здійснювалося за чинною програмою; в експериментальній за розробленою методикою. Критерії включення: навчання у 11 класі, вивчення алгебри та початків аналізу, письмова інформована згода батьків/учнів 16+. Критерії виключення: пропуски понад 20% занять з теми, неповне проходження діагностичних зрізів. Для забезпечення об'єктивності оцінювачі були осліплені щодо належності учнів до груп; інструментарій і процедури тестування були ідентичними в обох групах. Попередній розрахунок потужності для плану «2 групи  $\times$  4 зрізи» ( $\alpha = 0,05$ ;  $1-\beta = 0,80$ ) орієнтувався на середній ефект; фактичний обсяг 35/35 забезпечив прийнятний рівень чутливості для виявлення ефектів від середніх до великих

Наукова новизна. 1) Побудовано цілісну дидактичну модель формування уявлень про комплексні числа як інструмент розв'язання алгебраїчних рівнянь.

2) Конкретизовано критерії, показники та рівні сформованості уявлень з урахуванням інтеграції алгебраїчної та геометричної ліній. 3) Розроблено та апробовано комплекс навчально-методичних матеріалів і діагностичного інструментарію. 4) Доведено ефективність методики у шкільних умовах за результатами педагогічного експерименту.

Теоретичне і практичне значення. Теоретичне значення полягає в уточненні змістово-процесуальної структури поняття «комплексне число» для старшої школи та в обґрунтуванні логіки введення і застосування комплексних чисел у контексті розв'язання рівнянь. Практичне значення полягає у створенні готових до використання методичних матеріалів (сценаріїв уроків, задачних добірок із поетапною ускладнюваністю, візуалізацій, карт оцінювання), а також у рекомендаціях щодо організації навчання з урахуванням типових помилок учнів.

Апробація результатів. Основні положення та матеріали впроваджено й обговорено на методичних об'єднаннях учителів математики, відкритих уроках у 10–11 класах, а також оприлюднено у доповідях на науково-практичних семінарах і у публікаціях навчально-методичного спрямування.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів (теоретичного, аналітичного/модельного та експериментально-практичного), висновків, списку використаних джерел і додатків; структура відповідає змісту магістерської роботи.

## Розділ 1. Теоретичні засади формування в старшокласників уявлень про комплексні числа

### 1.1. Еволюція числових множин і місце комплексних чисел у шкільному курсі

Побудова шкільного курсу алгебри спирається на історично зумовлену послідовність розширень множини чисел. Спочатку учні працюють з натуральними числами як моделлю підрахунку об'єктів. Необхідність опису від'ємного результату призводить до введення цілих чисел. Далі постає задача точного поділу й вимірювання, що формує раціональні числа. Аналіз неперіодичних десяткових дробів у задачах на вимірювання довжин і площ підводить до ірраціональних чисел і разом з ними до дійсних чисел як повної числової прямої. Залишається клас алгебраїчних рівнянь, розв'язки яких не належать дійсним числам. Потреба забезпечити загальність операцій і повноту розв'язності підводить до введення комплексних чисел як упорядкованих пар або як точок на комплексній площині. Така еволюція демонструє учням логіку наукового прогресу від обмежених моделей реальності до узагальнених конструкцій, що уможливають формулювання і розв'язання ширшого кола задач, зокрема квадратних і вищих за степенем рівнянь без дійсних коренів [1].

У старшій школі ключовою дидактичною ідеєю є поєднання трьох компонент уявлень: алгебраїчної, геометричної та операційної. Алгебраїчна компонента дає означення комплексного числа через уявну одиницю  $i$  з властивостями  $i^2 = -1$  та вчить учня виконувати операції додавання, множення, знаходження спряженого числа і модуля. Геометрична компонента ототожнює комплексні числа з векторами на площині, де модуль є довжиною вектора, а аргумент є кутом повороту. Операційна компонента узагальнює ці уявлення на задачі: розклад багаточленів, знаходження коренів рівнянь, перехід до показникової та тригонометричної форми, обчислення степенів і коренів через формулу Муавра, інтерпретацію обертань і гомотетій. Таке тривимірне

представлення знижує когнітивне навантаження, оскільки пов'язує абстракцію з наочною моделлю та з прикладною дією.

Нормативна рамка визначає місце теми у навчальному плані. Державний стандарт повної загальної середньої освіти встановлює результати навчання старшої профільної школи та надає закладам гнучкість у доборі змісту, в межах яких математика є базовим предметом, а комплексні числа передбачені для опанування в логіці курсу алгебри та початків аналізу. Типові освітні програми для III ступеня деталізують загальний обсяг навчального навантаження та два варіанти організації освітнього процесу і закріплюють математику у переліку базових предметів. Для 10 класів і 11 класів загальний річний обсяг навчального часу становить 1330 годин на рік, сумарно 2670 годин за два роки, що розподіляються між базовими і профільними предметами, курсами за вибором і факультативами. Це дає змогу школі, яка обирає профіль математичний, підвищувати тижневе навантаження з математики і закладати більш глибоке вивчення теми комплексних чисел, включно з тригонометричною і показниковою формами та застосуванням до розв'язання рівнянь і задач на перетворення [2].

Перелік і структуру програм для 10–11 класів затверджено на рівні центрального органу виконавчої влади, що забезпечує єдність вимог до змісту та результатів навчання. Наказ про надання грифа навчальним програмам для 10–11 класів фіксує легітимність використання типових та авторських програм у математиці і пов'язаних курсах, а також дає підстави для розроблення шкільних освітніх програм, у межах яких конкретизується місце і глибина опанування комплексних чисел. Офіційні сторінки міністерства пояснюють, що заклади можуть використовувати типові або інші освітні програми за умови відповідності стандартам, що важливо при плануванні годин на елементи курсу алгебри [3].

Змістовні акценти теми доцільно співвідносити з поточними результатами зовнішніх моніторингів. За даними PISA 2022 для українських регіонів, 58% п'ятнадцятирічних учнів досягли щонайменше рівня 2 з



математичної грамотності за середнього показника ОЕСР 69%. Це свідчить про наявність резервів у роботі з абстракцією, моделюванням та алгебраїчними перетвореннями, що мають пряму дотичність до засвоєння комплексних чисел у 10–11 класах. Викладання теми в профільних та стандартних групах слід поєднувати з системними задачами на побудову математичних моделей і з переходом між алгебраїчними та геометричними уявленнями, що підвищує шанси вивести більшу частку учнів на рівні, які відповідають описам рівня 2 і вище [4].

З дидактичного погляду обсяг і порядок введення поняття бажано погоджувати з принципами наступності. У 7–9 класах учні формують стійкі навички роботи з рівняннями і функціями, зокрема з квадратними рівняннями та тригонометрією. У 10–11 класах логічним кроком є узагальнення поняття кореня рівняння на випадки без дійсних розв'язків, що педагогічно природно мотивує введення уявної одиниці. Після алгебраїчного означення доцільно відразу перейти до геометричної моделі на площині з побудовою модуля і аргументу, далі ввести тригонометричну форму, потім формулу Муавра та застосування до піднесення в степінь і добування коренів. На завершення варто пов'язати нові уявлення з розкладом багаточленів і з теоремою про кількість коренів з урахуванням кратності, аби учні побачили системну роль комплексних чисел у повноті алгебраїчних тверджень [5].

З організаційного погляду тема може бути подана у вигляді модульного блоку обсягом 8–12 уроків у групі стандартного рівня з пріоритетом на основні операції, алгебраїчно геометричну взаємозв'язаність і застосування до квадратних рівнянь. У профільних класах доцільно збільшувати обсяг до 16–20 уроків за рахунок глибших задач на тригонометричну і показникову форму, полярні координати, знаходження коренів степеня  $n$ , а також включати елементи чисельного експерименту у динамічних середовищах. Таке диференціювання відповідає рамці стандарту і типовим програмам, у межах яких школа самостійно розподіляє тижневі години та визначає траєкторії профільного навчання.

Зміст і місце комплексних чисел у шкільному курсі визначаються поєднанням логіки історичного розвитку математики і сучасної нормативної бази. Стандарт задає орієнтири результатів, типові програми надають часову і змістову гнучкість, а шкільні освітні програми дозволяють адаптувати глибину і темп до можливостей конкретних учнівських колективів. За таких умов комплексні числа стають не лише технічним засобом розв'язання алгебраїчних рівнянь, а й важливим кроком у формуванні в старшокласників узагальнених математичних уявлень, які з'єднують алгебру з геометрією і розширюють горизонти математичного мислення [6].

## 1.2. Психолого-педагогічні основи засвоєння абстрактних математичних понять у старшій школі

Засвоєння абстрактних понять потребує поєднання когнітивних механізмів і дидактичних прийомів, які відповідають віковим можливостям старшокласників і нормативній логіці шкільної освіти. Закон України «Про освіту» і Державний стандарт повної загальної середньої освіти закріплюють компетентнісний підхід, автономію школи у виборі освітніх програм і вимоги до результатів навчання з математики, що утворює рамку для цілеспрямованого формування абстракцій рівня старшої школи. Саме в цій рамці тема комплексних чисел розглядається як інструмент для розв'язування алгебраїчних рівнянь і для узагальнення попередніх числових уявлень [7].

Ключовим психологічним підґрунтям є ідея зони найближчого розвитку, за якою навчання організується так, щоб учні виконували інтелектуальні дії за підтримки вчителя або сильнішого однолітка, а згодом переходили до самостійності. Для абстракцій на зразок уявної одиниці і комплексної площини це означає поступову інтеріоризацію нових способів дії від спільно виконуваних розв'язувальних кроків до індивідуального оперування означеннями і перетвореннями. Така логіка знижує когнітивні бар'єри і прискорює перехід від формальних правил до змістових уявлень.

Теорія поетапного формування розумових дій описує послідовність переходів від матеріально зовнішніх дій і опор до мовленнєвих і внутрішніх планів дії. Для комплексних чисел це може означати старт з наочних векторних моделей на площині, вербалізацію операцій додавання і множення, а далі внутрішнє скорочення алгоритмів до компактних символічних процедур на рівні тригонометричної і показникової форм. Висока керованість етапами дає змогу конструювати завдання з контрольованою складністю і чіткими критеріями успіху [8].

Модель репрезентацій Дж. Брунера підказує, що міцність абстракції зростає, коли учень проходить через енактивні, іконічні та символічні форми подання змісту. У темі комплексних чисел це відображається в переході від дій з векторами і обертаннями до рисунків на комплексній площині і далі до алгебраїчних записів виду  $a+bi$ , модуль аргумент, формула Муавра. Узгоджений рух між цими представленнями зменшує розрив між геометричною і алгебраїчною інтерпретаціями.

Когнітивна теорія навантаження застерігає, що робоча пам'ять оперує дуже обмеженою кількістю одиниць інформації, типово 3–5. Тому введення нових абстракцій має спиратися на зниження зайвого навантаження через структуровані приклади, поетапне введення позначень, сегментацію задач і мінімізацію другорядних деталей. Для комплексних чисел це означає розведення в часі означення уявної одиниці, операцій над  $a+bi$ , геометричної інтерпретації та переходу до тригонометричної форми з чіткими мікроцілями кожного кроку [9].

Принципи мультимедійного навчання доповнюють попереднє: словесні пояснення мають підкріплюватися відповідними схемами і графіками, причому подання слід дозувати і маркувати ключові елементи. Для комплексної площини ефективними є анімовані демонстрації обертання вектора при множенні на  $\cos \varphi + i \sin \varphi$ , позначення кутів і довжин, а також підсвічування відповідних алгебраїчних виразів. Це покращує узгодження вербального і візуального каналів і зменшує ризик перевантаження.

Дані освітніх вимірювань підтверджують, що робота з абстракціями є зоною ризику для частини учнів. У PISA 2022 серед регіонів України частка учнів з високими результатами з математики становила близько 3% при середньому показнику ОЕСР 9%, а соціально економічний статус пояснював близько 14% варіації успішності з математики. Це підкреслює необхідність керованого переходу до абстракцій, безпомилково вибудованих опор і диференціації за темпом.

Особливу увагу слід приділяти утриманню знань у часі. Класичні та сучасні дослідження пам'яті показують швидкий спад відтворення без повторення, який істотно зменшується завдяки систематичному поверненню до вивченого. Практичний висновок для теми комплексних чисел полягає у вбудованих відкладених повтореннях, де короткі завдання на модуль і аргумент, обчислення степенів та коренів і розклад багаточленів з комплексними коренями повертаються через 2–3, 7–10 і 14–21 днів.

Ефективність педагогічних втручань із високою вірогідністю підсилюють зворотний зв'язок, чіткі критерії успіху, взаємонавчання і спрямоване пояснення вчителя. Метадослідження синтезують сотні впливів і вказують на середній ефект близько 0.40 як умовний поріг помітності, тоді як якісний зворотний зв'язок і викладання цілей перевищують цей рівень. Для комплексних чисел це означає точні рубрики оцінювання розуміння означення і операцій, критерії коректності перетворень, миттєвий коментар до помилок і організацію парної перевірки розв'язань [10].

Нормативно професійний вимір також важливий. Професійний стандарт вчителя загальної середньої освіти деталізує компетентності педагога, включно з умінням проєктувати навчання під компетентнісні результати, застосовувати цифрові інструменти і організовувати безпечне освітнє середовище. Це напряду стосується впровадження методик засвоєння абстракцій, де потрібні якісні візуалізації, моделювання й диференціація.

Отже, психолого педагогічна основа навчання абстракцій у старшій школі для теми комплексних чисел має спиратися на такі узгоджені рішення. По перше, діяльнісно підтримувати перехід від спільних дій у зоні найближчого розвитку до самостійних дій із символікою  $a+bi$  і тригонометричною формою. По друге, планувати поетапне формування дій з чіткими опорами і поступовим їх згортанням. По третє, керувати когнітивним навантаженням через сегментацію, приклади з наростанням складності і мультимедійні візуалізації. По четверте, закладати повторення за графіком для підтримки довготривалої пам'яті і системний зворотний зв'язок із прозорими критеріями. Усе це узгоджується з держстандартом і рамками шкільних програм та адресує емпіричні розриви, зафіксовані у міжнародних оцінюваннях [11].

### 1.3. Порівняльний аналіз чинних програм і підручників

Нормативна рамка для 10–11 класів фіксує компетентнісний підхід і дає школі гнучкість у виборі програм та розподілі годин. Для математичного профілю передбачено 630 год загального часу на математику за 2 роки, що дозволяє варіювати глибину теми «комплексні числа» залежно від обраної траєкторії та рівня класу. Типова освітня програма III ступеня визначає тижневе навантаження і механізм формування шкільних програм, у межах яких заклади можуть поглиблювати розділ про комплексні числа в 11 класі або частково інтегрувати елементи в 10 класі для підготовки до подальшого опанування [12].

У підручниках стандартного рівня тема комплексних чисел подається стисло як завершальний крок еволюції числових множин та інструмент розв'язання рівнянь без дійсних коренів. О. С. Істер, 11 клас, рівень стандарту: повний інтегрований курс «Алгебра і початки аналізу та геометрія» на 304 с, рекомендований МОН; комплексні числа в цьому курсі представлені у базовому обсязі, з акцентом на означення, алгебраїчну та геометричну

інтерпретації і типові задачі на виконання операцій та розв'язування рівнянь. Для шкіл, де математика не є профілем, таке структурування забезпечує міру достатності для розуміння іспитових завдань та переходу до вищої освіти не математичного спрямування.

Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, 11 клас, рівень стандарту: інтегрований курс на 2019 рік із підтвердженням грифом МОН. Підхід подібний до Істера щодо місця теми в курсі: компактне подання з мінімально необхідними доведеннями і достатньою кількістю тренувальних завдань для автоматизації обчислювальних дій із  $a+bi$  та застосуванням до квадратних і простих вищих рівнянь; розділ із комплексними числами виконує узагальнювальну функцію наприкінці шкільного курсу [13].

Для профільного і поглибленого навчання представлені авторські лінійки, де тема комплексних чисел розкрита значно ширше. А. Г. Мерзляк, Д. А. Номіровський, В. Б. Полонський, М. С. Якір, 11 клас, поглиблене вивчення: окремий розділ «Комплексні числа» складається щонайменше з 3 параграфів: «Множина комплексних чисел» стор. 198–209, «Комплексна площа. Тригонометрична форма» стор. 209–216, «Множення і ділення у тригонометричній формі. Корінь  $n$ -го степеня» стор. 216–231, після чого подано узагальнення на стор. 232. Автори системно поєднують алгебраїчну і геометричну інтерпретації, вводять тригонометричну та полярну форми, доводять і застосовують формулу Муавра та схему добування коренів  $n$ -го степеня; задачний матеріал включає побудови на комплексній площині, перетворення виразів і підготовку до розкладу багаточленів [14].

Є. П. Нелін, 10 клас, профільний рівень: видання лінійки «Алгебра і початки аналізу» для профільних класів формує апарат для тем 11 класу, включно з подальшим вивченням комплексних чисел. Основний акцент 10 класу робиться на функціях, многочленах, рівняннях і нерівностях, готуючи учнів до опанування тригонометричної форми, степеневих перетворень і задач на корені в наступному році. Структура і стиль подання відзначаються високою

формалізацією означень і доведень та значною часткою задач підвищеної складності, що відповідає профільній траєкторії.

У 10 класі на рівні стандарту ключові підручники забезпечують наступність, але не «перевантажують» учнів елементами тригонометричної форми. М. І. Бурда, Т. В. Колесник, Ю. І. Мальований, Н. А. Тарасенкова, 10 клас, рівень стандарту: підручник підтверджений як електронна версія ІМЗО та у вільному доступі. Авторський колектив витримує баланс між формальним означенням і геометричними опорами, розвиваючи апарат, на який спиратиметься вивчення комплексних чисел у 11 класі; у профільних групах ці автори пропонують окремі версії або збільшені блоки вправ для розділу про комплексні числа [15].

Порівняння підходів дає такі висновки. По перше, рівень стандарту (Істер, Бевз) забезпечує мінімально достатній зміст: означення, алгебраїчні операції з  $a+bi$ , геометрична модель, декілька типових застосувань до рівнянь; обсяг подання стислий, що корелює з меншим тижневим навантаженням у класах без математичного профілю. По друге, профільні та поглиблені лінійки (Мерзляк, Нелін) надають повний спектр представлень і операцій: тригонометрична форма, полярні координати, формула Муавра, корені  $n$ -го степеня, побудови та задачі на перетворення; тут обсяг матеріалу і «щільність» вправ істотно вищі. По третє, авторський стиль різниться: у Мерзляка домінує багатий задачник з градацією складності і поєднанням алгебри з геометрією; у Неліна більша формалізація і доказовість, що готує до університетської математики; у Бевзів і Істера акцент на доступності, інтегрованості з геометрією і повторюваності ключових процедур [16].

З погляду відповідності програмам 2017 року для 10–11 класів, усі зазначені авторські лінійки мають гриф МОН, а їх зміст узгоджено з положеннями чинних програм. Це означає можливість офіційного використання у шкільному процесі та гарантує мінімально необхідний набір результатів навчання щодо комплексних чисел. Для профільних класів школа може планувати 16–20 уроків на поглиблене опрацювання теми, для

стандартного рівня 8–12 уроків на доведення компетентнісного мінімуму, що вписується у нормативно визначені межі навчального навантаження.

Окремий нюанс стосується місця теми залежно від рівня: у частині курсів стандарту комплексні числа присутні як короткий огляд або додатковий компонент наприкінці курсу, тоді як у поглиблених лінійках вони становлять розділ із щонайменше 3 підтемами, пов'язаними між собою доказовими нитками і прикладними задачами на побудови та перетворення. Цю різницю добре ілюструє змістовий блок у Мерзляка 11 класу з чітко відомими межами

Для досягнення цілей магістерської методики, що орієнтується на формування стійких уявлень і вміння застосовувати комплексні числа до розв'язання алгебраїчних рівнянь, доцільно спиратися на поглиблені лінійки Мерзляк і Нелін при роботі з профільними групами та на лінійки Істер і Бевз як базові в групах стандартного рівня, доповнюючи їх авторськими матеріалами на тригонометричну форму, формулу Муавра і задачі на корені  $n$ -го степеня. Така комбінація узгоджується з чинними програмами і дозволяє масштабувати обсяг теми в межах 8–12 уроків для стандарту і 16–20 для профілю, зберігаючи логіку переходу від означення до геометричної моделі і далі до застосувань [17].

#### 1.4. Огляд сучасних методичних підходів до навчання теми «Комплексні числа»

Сучасні підходи до навчання комплексних чисел у старшій школі поєднують ідеї когнітивної психології, дидактики математики та цифрової візуалізації. Вони спрямовані на те, щоб перевести учня від операційного розуміння символіки  $a+bi$  до структурного бачення комплексного числа як об'єкта з алгебраїчними і геометричними властивостями, придатного для розв'язування рівнянь і перетворення виразів. Класичну рамку для такого переходу задають дві відомі лінії: концепт-імідж і концепт-дефініція Д. Талла та Ш. Віннера як пояснення розриву між «внутрішньою картиною» поняття і



його формальним означенням, а також дихотомія операційного і структурного мислення А. Сфард, яка описує перехід від дії до об'єкта через реїфікацію. Учитель планує траєкторію так, щоб збігалися формальні означення, геометричні образи та набори задач, а учнівський концепт-імідж поступово наближався до прийнятої в математиці дефініції. Це зменшує типові помилки під час оперування уявною одиницею і тригонометричною формою та підвищує перенос умінь між алгеброю і геометрією [18].

Конструктивістська теорія APOS Е. Дубінського дає практичну дидактичну схему для теми «Комплексні числа». Учень іде від дій з представленнями  $a+bi$  і векторами на площині до процесів додавання, множення, спряження і знаходження модуля, далі до об'єкта «комплексне число» як елемента поля  $\mathbb{C}$ , і, нарешті, до узгодженої схеми, що включає алгебраїчну, полярну та тригонометричну форми і їх застосування до коренів степеня  $n$ . Реалізаційний цикл ACE (activities, class discussion, exercises) організує 8–12 уроків для стандартних груп або 16–20 уроків для профільних класів: діяльнісні мікродослідження на комплексній площині, колективне узагальнення правил і тренувальні вправи з наростанням складності. Дослідницька література підкреслює, що така послідовність зменшує когнітивні бар'єри і підвищує стійкість понять, бо узгоджує внутрішню «схему» учня з формальною структурою теми.

Реалістична математика Г. Трефферса і К. Гравемейєра пропонує «кероване перевинайдення», де формальні ідеї виростають з осмислених ситуацій. Для комплексних чисел це означає мотивацію від задач про корені квадратних або кубічних рівнянь із від'ємним дискримінантом, далі перехід до побудов на координатній площині, і лише після цього введення тригонометричної та показникової форм. Інструменти RME кероване перевинайдення, дидактична феноменологія і «емергентні моделі» дають природний місток від конкретних схем до полярної координатизації і формули Муавра, а також створюють базу для коренів степеня  $n$  як множини точок, рівномірно розміщених на колі. Для 10–11 класів це реалізується серією кейсів

з короткими письмовими звітами і контрольними питаннями, де явна увага приділяється переходам між репрезентаціями.

Історико-генетична лінія додає змістовну мотивацію і дисциплінує мову означень. Використання сюжетів від Cardano та Bombelli до Argand і Gauss дозволяє показати, як геометризація  $\mathbb{C}$  знімає «парадокси» квадратних коренів із від'ємних чисел і забезпечує повноту розв'язності поліномів. Навчальні епізоди на основі історичного наративу працюють як когнітивні «якорі»: учні розуміють, чому полярна форма природна для множення і піднесення у степінь, а також навіщо зображати корені на колі. Для реалізації цього підходу використовують фрагменти з науково-популярної монографії П. Найгіна «An Imaginary Tale» та навчальні нариси про доведення фундаментальної теореми алгебри Гауссом, що дає сильну інтелектуальну мотивацію до теми [19].

Цифрова візуалізація через GeoGebra закриває «розрив репрезентацій». Динамічні аплети з Argand-площиною дозволяють керувати модулем і аргументом, бачити множення як обертання і гомотетію, а добування коренів степеня  $n$  як рівномірне розкладання точок на колі. Дослідження й методичні розробки показують, що GeoGebra підсилює одночасно концептуальне і процедурне знання з комплексних чисел, особливо коли вчитель явно зв'язує алгебраїчний запис із рухом точки на площині та короткими усними поясненнями. У профільних класах доцільно включати 3–4 лабораторні міні-роботи: побудова тригонометричної форми, моделювання множення на  $e^{i\varphi}$ , побудова коренів  $n$ -го степеня, факторизація простих поліномів із візуалізацією коренів. Для стандартного рівня достатньо 1–2 таких робіт у супроводі друкованих інструкцій.

Мультимедійне пояснення має дотримуватися принципів Р. Маєра: словесний канал синхронізується з візуальним, маркуються смислові елементи рисунка, сегментується подання і мінімізується зайве. Для теми «комплексні числа» це означає короткі відеосегменти 2–3 хв про геометрію множення і піднесення у степінь, після яких учень виконує 3–5 завдань із негайним зворотним зв'язком. Така подача зменшує позаконтекстне навантаження й

утримує увагу, що особливо важливо на етапі переходу до тригонометричної форми.

Проблемно-дослідницька робота за Дж. Поліа структурує застосування. Після демонстрації змістового сенсу уявної одиниці і полярної координатизації учні розв'язують серії задач за 4-кроковою схемою: зрозумій умову, побудуй план, реалізуй план, оціни розв'язання. Типові задачі включають факторизацію многочленів із недійсними коренями, обчислення степенів у тригонометричній формі, добування коренів і геометричну інтерпретацію множення на  $i$ . Рефлексія на кроці «подивись назад» оформлюється як короткий письмовий звіт із перевіркою коректності переходів між записами і рисунком [20].

Порівняння з чинною лінійкою підручників показує, що зазначені підходи узгоджуються з реальною структурою навчальних матеріалів. У поглибленому курсі А. Мерзляка, Д. Номіровського, В. Полонського, М. Якіра комплексні числа винесені в окремий розділ із послідовністю «множина  $\mathbb{C}$  комплексна площина і тригонометрична форма множення, ділення і корені  $n$ -го степеня», що ідеально поєднується з APOS і RME. У стандартному курсі О. Істера подання компактніше, але містить усі опори для впровадження короткого мультимедійного циклу і 1–2 GeoGebra-лабораторій. Це дозволяє масштабувати глибину залежно від профілю класу, не виходячи за межі рекомендованих годин [21].

Підсумовуючи, збалансована методика для старшої школи комбінує 5 вузлів: керовану траєкторію від дії до об'єкта за APOS, кероване перевинайдення і «емергентні моделі» RME, історико-генетичні сюжети як мотиваційні «якорі», динамічну візуалізацію в GeoGebra для зшивання алгебри та геометрії і проблемно-дослідницькі серії за Поліа як рамку застосувань. Така композиція підвищує частку учнів, які впевнено виконують перетворення в алгебраїчній і тригонометричній формах, коректно інтерпретують результат на площині і застосовують комплексні числа як засіб розв'язування рівнянь [22].

## Висновки до розділу 1

Розділ довів, що еволюція числових множин від натуральних до дійсних логічно приводить старшокласника до потреби в комплексних числах як до узагальнення, яке забезпечує повноту розв'язності алгебраїчних рівнянь і знімає суперечності між формальними перетвореннями та наочною інтерпретацією. У межах чинних стандартів і типових освітніх програм тема має чітко визначене місце у 10 і 11 класах з можливістю диференціації глибини. Для груп стандартного рівня доцільно закладати 8–12 уроків із пріоритетом на означення, базові операції, геометричну модель і застосування до квадратних рівнянь. Для профільних класів оптимальним є діапазон 16–20 уроків з опрацюванням тригонометричної та показникової форм, формули Муавра і задач на корені степеня  $n$ , що узгоджується з рамкою навчального навантаження та підготовкою до подальшого вивчення математики.

Психолого педагогічні засади показали, що засвоєння абстракцій цього рівня потребує керованого переходу від дії до об'єкта за моделями зони найближчого розвитку, поетапного формування розумових дій і трирівневої репрезентації. Ефективність підвищується за умов зниження зайвого когнітивного навантаження, синхронізації словесних і візуальних каналів, регулярних відкладених повторень і наявності чітких критеріїв оцінювання результатів. Для комплексних чисел це означає послідовність від алгебраїчного означення до векторної моделі на площині, далі до полярної і тригонометричної форм з обов'язковим поверненням до попередніх кроків через короткі тренувальні блоки з інтервалами 2–3, 7–10 і 14–21 день.

Порівняльний аналіз програм і підручників засвідчив відповідність авторських лінійок вимогам стандарту і різний ступінь глибини подання. Лінійки О. Істера і Г. Бевза для рівня стандарту забезпечують мінімально достатній зміст і тренувальний матеріал для автоматизації дій з  $a+bi$  та базових застосувань. Поглиблені лінійки А. Мерзляка і Є. Неліна пропонують повний спектр представлень і задач з поступовим переходом до коренів степеня  $n$  і

факторизації многочленів, що доцільно використовувати як основу для профільних траєкторій. За необхідності школи можуть комбінувати ці підходи, розширюючи практику задачами підвищеної складності та короткими доказовими елементами.

Огляд сучасних методичних підходів окреслив конструктивну композицію, яка поєднує APOS для переходу від дії до об'єкта, кероване перевинайдення реалістичної математики для мотивації і поступового узагальнення, історико генетичні сюжети для смислової підтримки, динамічну візуалізацію в GeoGebra для зшивання алгебри з геометрією і проблемно дослідницькі серії за Поліа для формування стійких умінь застосування. Застосування цієї композиції очікувано підвищує частку учнів, які впевнено виконують перетворення у двох формах запису, правильно інтерпретують результати на комплексній площині та використовують комплексні числа як інструмент розв'язування рівнянь. Підготовлений теоретичний фундамент визначає вимоги до розробки методики в подальших розділах, зокрема до структури мікромодулів, критеріальної бази оцінювання, інструментарію діагностики і дизайну педагогічного експерименту, що забезпечить валідацію ефективності запропонованого підходу в умовах реального шкільного навчання.

## Розділ 2. Аналітична модель і вимоги до методики формування уявлень про комплексні числа

### 2.1. Освітній контекст і дидактичні проблеми засвоєння комплексних чисел

Тема комплексних чисел входить до змістової лінії алгебри старшої школи як логічне продовження еволюції числових множин і як інструмент для розв’язування алгебраїчних рівнянь. У групах стандартного рівня доцільно планувати 8–12 уроків, у профільних класах 16–20 уроків. У межах цього діапазону школа розподіляє час між введенням означень і базових операцій, геометричною інтерпретацією на площині, тригонометричною та показниковою формами, застосуванням формули Муавра і задачами на корені степеня  $n$ . Такий розподіл забезпечує узгодження з рамкою навчального навантаження і дозволяє масштабувати глибину вивчення залежно від освітньої траєкторії [23].

Освітній контекст визначається 3 взаємопов’язаними вимірами. Перший вимір навчальні результати, що фіксуються державними стандартами і типові освітні програми, які дозволяють школі адаптувати тижневе навантаження. Другий вимір кадрово методичний рівень, зокрема готовність учителя проектувати траєкторію від операційного володіння записом  $a+bi$  до структурного бачення об’єкта  $C$  з алгебраїчними і геометричними властивостями. Третій вимір інфраструктурний доступ до цифрових інструментів, зокрема динамічної геометрії, і наявність друкованих та електронних матеріалів для тренування і діагностики. Баланс цих вимірів визначає, який саме обсяг теми може бути реалізовано в конкретному закладі.

Дидактичні труднощі засвоєння комплексних чисел у старшій школі повторювані і добре типологізуються. Учні плутають уявну одиницю з невідомою величиною, що породжує помилкові алгебраїчні перетворення. У 10–11 класах часто фіксуються підміни модулю комплексного числа модулем дійсного числа та змішування аргументу з кутом нахилу вектора без

урахування періодичності. Під час переходу до тригонометричної форми виникають системні помилки з вибором головного значення аргументу і з редукцією кутів. У задачах на корені  $n$ -го степеня поширене знаходження лише одного кореня без побудови повної множини коренів як вершин правильного  $n$ -кутника на колі. В обчисленнях спостерігаються пропуски спряження при діленні, помилки у виділенні модуля і помилкова інтерпретація множення на  $i$  як множення на змінну. Коли додається показникова форма, частина учнів не узгоджує  $e^{i\varphi}$  з тригонометричним поданням і не бачить геометричного змісту як обертання і масштабування [24].

Когнітивні бар'єри пов'язані з обмеженою ємністю робочої пам'яті та необхідністю одночасного утримання 3 типів репрезентацій алгебраїчної, геометричної та операційної. На практиці це означає, що перевантаження виникає вже на кроці переходу від  $a+bi$  до точки  $(a;b)$  з подальшим обчисленням модуля і аргументу. Додається проблема несформованих опор у попередніх темах функцій, тригонометрії, многочленів і квадратних рівнянь. Якщо передтема не відновлена, то навіть коректно організоване пояснення комплексних чисел не спрацьовує, бо учень не має міцної бази для переносу.

Організаційні чинники також суттєві. У класах зі змішаною підготовкою темп часто вирівнюється під середнього учня і це знижує шанси сильних учнів дійти до повної тригонометричної і показникової форм та задач на факторизацію. У класах без стабільного доступу до ПК учитель вимушений заміщати динамічні візуалізації статичними рисунками, що обмежує спостереження обертання і гомотетії як геометричного змісту множення в  $\mathbb{C}$ . Часто відсутня система відкладених повторень, через що через 7–14 днів суттєво падає точність відтворення алгоритмів [25].

Аналітичний опис типових помилок і їх причин дозволяє сформулювати вимоги до методики. Потрібна модульна структура з чіткими мікроцілями і вимірюваними результатами. Вступний модуль формує інтуїцію розв'язності і мотивує введення уявної одиниці через задачі на від'ємний дискримінант. Далі модуль алгебраїчного подання відпрацьовує операції додавання, множення,

спряження і модуль. Модуль геометричної інтерпретації пов'язує точку  $(a;b)$  з модулем і аргументом, тренує побудови і переходи між формами записи. Модуль тригонометричної форми вводить множення як обертання і масштабування, готує до показникової форми. Модуль коренів степеня  $n$  вчить будувати всі корені і пов'язує їх з регулярними  $n$ -кутниками на колі. Підсумковий модуль повертає учня до задач на рівняння і факторизацію, щоб закріпити роль комплексних чисел як засобу розв'язування.

Управління когнітивним навантаженням потребує сегментації пояснення та дозування символіки. На уроці доцільно працювати за схемою короткий блок пояснення 6–8 хв, далі серія завдань 10–12 позицій з негайним зворотним зв'язком, потім мікрорефлексія 2–3 хв. Завдання мають зростати за складністю і переключати репрезентації. Наприклад учень обчислює модуль і аргумент, потім переходить до тригонометричної форми, виконує множення як додавання аргументів і множення модулів, повертається до алгебраїчного запису, після чого будує результат на площині. Такий цикл замикає коло від дії до об'єкта і назад до дії і знижує ризик закріплення формальних маніпуляцій без смислу [26].

Оцінювання має бути критеріальним і прозорим. Доцільно виділяти 3 групи показників. Перша група знання точність означень, формул і перетворень, наприклад правильність операцій зі спряженням і обчислення модуля. Друга група операційна швидкість і стійкість виконання алгоритмів у стандартних ситуаціях. Третя група концептуальна здатність переходити між алгебраїчною і геометричною формами, інтерпретувати множення як обертання і гомотетію, будувати всі корені степеня  $n$  і пов'язувати їх з геометричною картиною. Для поточного контролю працює коротка діагностика на 10–12 завдань, для рубіжного зрізу 18–24 завдання з покриттям усіх модулів. Ретривальна практика має план повторень через 2–3, 7–10 і 14–21 днів, що підтримує довготривалу пам'ять і зменшує спад після теми.

Диференціація за темпом і складністю є обов'язковою. Мінімальний набір опанування для кожного модуля формулюється як обов'язкові



результати, наприклад виконати додавання і множення у формі  $a+bi$ , перейти до тригонометричної форми і назад, знайти всі корені степеня  $n$  для малих  $n$ . Поглиблений рівень додає задачі на параметри, факторизацію поліномів і побудови з доведеннями властивостей. На уроці це реалізується через варіативні картки, де кожен учень виконує базу і мінімум 2 задачі підвищеної складності, а сильні учні отримують ще 2 задачі з доведенням [27].

Цифрова підтримка підсилює зв'язок між уявленнями. Навіть 1–2 динамічні міні лабораторії у групах стандартного рівня різко знижують кількість помилок у виборі аргументу і в інтерпретації множення. У профільних групах 3–4 лабораторії дозволяють сформуванню стійкого навика переходів між формами та забезпечити візуальне підґрунтя для факторизації. Для класів без стабільного доступу до ПК доцільно використовувати друковані серії рисунків з інструкціями на побудову і перевірку та демонстраційні відеосегменти 2–3 хв з паузами на виконання коротких дій [28].

Управління ризиками реалізації теми має бути явним. Ризик 1 брак часу в календарно тематичному плані пом'якшується інтеграцією коротких повторень у початок уроків і перенесенням частини тренувальних вправ у домашні роботи з автоматичним самоперевірянням. Ризик 2 неоднорідна підготовка учнів долається двоконтурною роботою базові завдання для всіх плюс варіативні треки. Ризик 3 відсутність цифрових засобів компенсується демонстраційними матеріалами з покроковими рисунками і шаблонами. Ризик 4 формальний контроль без зворотного зв'язку нівелюється запровадженням мікрооцінювання після кожного підблоку [29].

Мікроцикл з теми «Множення і ділення комплексних чисел у тригонометричній формі. Корені степеня  $n$ »

Мета сформуванню вміння переходити між алгебраїчною і тригонометричною формами, виконувати множення і ділення через модуль і аргумент, знаходити всі корені степеня  $n$ .

Структура 1 уроку 40 хв: 7 хв пояснення, 12 хв тренувальні вправи (10 позицій), 3 хв мікрорефлексія, 15 хв мініконтроль (12 завдань), 3 хв підбиття підсумків.

Блок А. Переходи між формами і операції

Задача А1. Дано  $z_1 = 2 + 2\sqrt{3} \cdot i$ . Знайти модуль, головний аргумент, тригонометричну форму.

Модуль:

$$|z_1| = \sqrt{(2^2 + (2\sqrt{3})^2)} = \sqrt{(4 + 12)} = \sqrt{16} = 4$$

Аргумент:

$$\tan \varphi = (2\sqrt{3})/2 = \sqrt{3} \rightarrow \varphi = \pi/3 = 70^\circ \text{ (точка у I чверті)}$$

Тригонометрична форма:

$$z_1 = 4(\cos 70^\circ + i \cdot \sin 70^\circ)$$

Задача А2. Дано  $z_2 = 1 - \sqrt{3} \cdot i$ . Знайти модуль, головний аргумент, тригонометричну форму.

Модуль:

$$|z_2| = \sqrt{(1^2 + (\sqrt{3})^2)} = \sqrt{(1 + 3)} = \sqrt{4} = 2$$

Аргумент:

$$\tan \theta = (-\sqrt{3})/1 = -\sqrt{3} \rightarrow \theta = -70^\circ \text{ (точка у IV чверті)}$$

Тригонометрична форма:

$$z_2 = 2(\cos(-70^\circ) + i \cdot \sin(-70^\circ))$$

Задача А3. Обчислити  $z_1 \cdot z_2$  у тригонометричній формі і повернутись до алгебраїчної.

*Модулі перемножуються, аргументи додаються:*

$$|z_1 z_2| = 4 \cdot 2 = 8; \quad \arg(z_1 z_2) = 70^\circ + (-70^\circ) = 0^\circ$$

*Отже:*

$$z_1 z_2 = 8(\cos 0^\circ + i \cdot \sin 0^\circ) = 8 + 0i$$

*Перевірка (алгебраїчна форма):*

$$(2 + 2\sqrt{3} \cdot i)(1 - \sqrt{3} \cdot i) = 2 - 2\sqrt{3} \cdot i + 2\sqrt{3} \cdot i - 6i^2 = 2 + 6 = 8$$

Задача А4. Обчислити  $z_1/z_2$  у тригонометричній формі і повернутись до алгебраїчної.

*Модулі діляться, аргументи віднімаються:*

$$|z_1/z_2| = 4/2 = 2; \quad \arg(z_1/z_2) = 70^\circ - (-70^\circ) = 120^\circ$$

*Отже:*

$$z_1/z_2 = 2(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) = 2(-1/2 + i \cdot \sqrt{3}/2) = -1 + i\sqrt{3}$$

*Перевірка (спряження):*

$$((2 + 2\sqrt{3} \cdot i)/(1 - \sqrt{3} \cdot i)) \cdot ((1 + \sqrt{3} \cdot i)/(1 + \sqrt{3} \cdot i)) = ((2 + 2\sqrt{3} \cdot i)(1 + \sqrt{3} \cdot i))/4 = (-4 + 4\sqrt{3} \cdot i)/4 = -1 + i\sqrt{3}$$

Блок В. Корені степеня  $n$  і геометрія на колі

Задача В1. Знайти всі кубічні корені числа 8.

Подання 8 у тригонометричній формі:  $8 = 8(\cos 0^\circ + i \cdot \sin 0^\circ)$ .

*Формула для коренів 3-го степеня:*

$$w_k = \sqrt[3]{8} (\cos((0^\circ + 360^\circ \cdot k)/3) + i \cdot \sin((0^\circ + 360^\circ \cdot k)/3)), \quad k = 0, 1, 2$$

$$\sqrt[3]{8} = 2; \quad \text{аргументи: } 0^\circ, 120^\circ, 240^\circ.$$

$$w_0 = 2(\cos 0^\circ + i \cdot \sin 0^\circ) = 2$$

$$w_1 = 2(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) = 2(-1/2 + i \cdot \sqrt{3}/2) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$w_2 = 2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) = 2(-1/2 - i \cdot \sqrt{3}/2) = -1 - i\sqrt{3}$$

Геометрична інтерпретація три вершини правильного трикутника на колі радіуса 2 з центром у початку координат.

Блок С. Мініконтроль і підрахунок результатів

Мініконтроль 12 завдань: 1 обчислення модуля і аргументу, 2 переходи між формами, 3 множення, 2 ділення, 2 корені степеня 3, 2 інтерпретації на площині.

Оцінювання 1 бал за правильну відповідь, максимум 12.

Приклад перевірки: учень подав для  $z_1/z_2$  відповідь  $2(\cos 300^\circ + i \cdot \sin 300^\circ)$ . Це помилка, правильний аргумент  $120^\circ$ . Правильна відповідь  $-1 + i\sqrt{3}$ .

Підсумкова статистика класу  $n = 30$ : сума балів 276; середній бал  $\bar{x} = 276/30 = 9,2$  з 12; медіана 9; квартили  $Q_1 = 8$ ,  $Q_3 = 11$ ; частка  $\geq 8$  балів  $= 22/30 = 73,3\%$ ; типові помилки: 4 учні плутають головний аргумент у IV чверті, 3 учні знаходять лише один кубічний корінь.

Блок D. Ретривальна практика і оцінка ефекту

Графік повторень: День 3 (6 завдань), День 9 (8 завдань), День 18 (10 завдань).

Дані групи  $n = 30$ : пре тест (12 завдань) середній бал 6,3;  $s = 2,4$ . Пост тест (12 завдань) середній бал 9,8;  $s = 1,8$ .

*Розрахунок ефекту за Коеном  $d$  (пулінг дисперсій):*

$$s_p = \sqrt{((n-1) \cdot s_{pre}^2 + (n-1) \cdot s_{post}^2) / (2n-2)}$$

$$s_p = \sqrt{(29 \cdot 2,4^2 + 29 \cdot 1,8^2) / 58} = \sqrt{(29 \cdot 5,76 + 29 \cdot 3,24) / 58} = \sqrt{261,00 / 58} \approx \sqrt{4,5} \approx 2,121$$

$$d = (9,8 - 6,3) / 2,121 \approx 1,65$$

Ефект великий. Частка правильних головних аргументів: 53,3% → 86,7%. Повний набір коренів степеня 3: 36,7% → 83,3%.

Блок Е. Критеріальна рубрика для швидкого зворотного зв'язку

1 знання точності означень і формул (модуль, аргумент, спряження) 0 чи 1.

2 операційна стійкість алгоритмів у стандартних ситуаціях 0 1 2.

3 концептуальна узгодженість репрезентацій перехід між формами, геометрична інтерпретація множення, повна множина коренів 0 1 2.

Швидка шкала 0 до 5; переведення у 12 балів пропорційно, напр.,  $4/5 \rightarrow 9/12$ .

Освітній контекст і діагностика типових бар'єрів формують вимоги до методики. Методика має бути модульною і репрезентаційно збалансованою, з керованим когнітивним навантаженням, прозорими критеріями оцінювання, планом ретривальної практики і варіативністю для різних траєкторій. При такій конфігурації за 8–12 уроків стандартного рівня або за 16–20 уроків профільного рівня учні досягають не лише процедурного володіння символікою, а й концептуального розуміння, необхідного для впевненого застосування комплексних чисел як засобу розв'язування алгебраїчних рівнянь.

## 2.2. Дидактична модель формування уявлень

Дидактична модель спрямована на те, щоб перевести учня від локальних операцій з записом  $a+bia+bia+bi$  до стійкого структурного бачення множини  $\mathbb{C}$  як поля з алгебраїчними і геометричними властивостями та вміння застосовувати ці властивості для розв'язування алгебраїчних рівнянь. Модель побудована як модульна траєкторія з чіткими мікроцілями, критеріальними показниками, графіком повторень і алгоритмами зворотного зв'язку. Для стандартного рівня передбачено 8–12 уроків. Для профільного рівня 16–20 уроків. Кожен урок має внутрішню структуру: 6–8 хв пояснення з прикладом і короткою візуалізацією, 10–12 хв тренувальний блок з 10 завдань, 2–3 хв мікрорефлексія, 15 хв застосування або мініконтроль, 2–3 хв підбиття підсумків і постановка домашнього завдання. Стрижневими репрезентаціями є алгебраїчна, геометрична і тригонометрична з системним перемиканням між ними [30].

Змістова архітектоніка охоплює 5 послідовних модулів з обов'язковими мікрорезультатами. Модуль 1 мотиваційно вступний. Учень має усвідомити потребу в комплексних числах через задачі на рівняння без дійсних коренів і побачити введення уявної одиниці як розширення числової системи. Наприкінці модуля учень розрізняє уявну одиницю і невідому, коректно читає запис  $a+bia+bia+bi$ , виконує базові дії додавання і множення у 6 з 8 типових завдань, мінімум 75%. Модуль 2 алгебраїчний. Учень автоматизує додавання, множення, спряження, модуль і аргумент у простих конфігураціях, уміє переходити між формою  $a+bia+bia+bi$  і координатною парою  $(a;b)(a;b)(a;b)$  для побудови точки на площині. Наприкінці модуля точність у короткому тесті з 12 позицій має бути не нижче 8 правильних відповідей, мінімум 67%, а середній час виконання 1 позиції не більше 45 секунд. Модуль 3 геометричний. Учень опановує модуль як довжину вектора, аргумент як кут повороту, виконує побудови на комплексній площині, переходить до тригонометричної форми, коректно оперує головним значенням аргументу. Наприкінці модуля

правильність визначення аргументу у 8 з 10 завдань, мінімум 80%. Модуль 4 тригонометрична і показникова форма. Учень трактує множення як обертання і гомотетію, виконує множення і ділення через модулі та аргументи, застосовує формулу Муавра для степенів і коренів, будує всі корені степеня  $n$  як вершини правильного  $n$ -кутника на колі. Наприкінці модуля частка повних відповідей у задачах на корені степеня 3 не нижче 80%, на корені степеня 4 не нижче 70%. За потреби вводиться показникова форма  $re^{i\varphi}$  для прискорення обчислень у профільних групах. Модуль 5 застосування. Учень виконує розклад багаточленів на множники із залученням комплексних коренів, інтерпретує результат геометрично, проводить перевірку у двох формах запису. Наприкінці модуля точність у змішаному наборі з 18 завдань не нижче 72%, при цьому у кожній підгрупі завдань результат не нижче 67%.

Оціночна рамка моделі включає критерії, показники і рівні сформованості з прозорими порогами. Критерій 1 знансвий. Показники коректність означень, формул, знання властивостей спряження і модуля. Оцінювання за шкалою 0–2. Рівень базовий 1, рівень достатній 2. Критерій 2 операційний. Показники автоматизація алгоритмів у стандартних ситуаціях і стійкість до перешкод. Оцінювання за шкалою 0–3. Рівень базовий 2, рівень достатній 3. Критерій 3 концептуальний. Показники узгоджені переходи між алгебраїчною і геометричною формами, коректна інтерпретація множення як обертання і гомотетії, побудова повної множини коренів степеня  $n$ . Оцінювання за шкалою 0–3. Рівень базовий 2, рівень достатній 3. Для поточного контролю застосовується мінінабір 12 завдань з покриттям 3 критеріїв, 1 бал за позицію, максимальна сума 12. Для рубіжного зрізу змішаний тест 18–24 завдання, часовий ліміт 25–35 хвилин. Результати інтерпретуються за порогами 0–7 низький, 8–12 базовий, 13–18 достатній, 19–24 високий. Для профільних груп додається блок з параметричними рівняннями і задачами на доведення [31].

Керування когнітивним навантаженням забезпечується сегментацією і дозуванням символіки. Кожен новий елемент вводиться через короткий

приклад з одним новим кроком, після чого слідує серія з 10 завдань зі зростанням складності. Зміна репрезентації здійснюється через жорстку послідовність зворотний переклад до попередньої форми, прямий переклад до нової форми, перевірка результату у вихідній формі. Для зниження позаконтекстного навантаження прибираються другорядні деталі і маркуються ключові елементи рисунка. Для підтримки робочої пам'яті відпрацьовується 3–5 таксономічних шаблонів, зокрема множення у тригонометричній формі, ділення через спряження, побудова аргументу у відповідній чверті, добування коренів як розклад кутів через  $370^\circ k$  або  $2\pi k$ .

Графік ретривальної практики вбудований у модель і є обов'язковим компонентом. Повторення відбуваються через 2–3 дні, 7–10 днів і 14–21 день від моменту первинного засвоєння. Кожен повторювальний блок має 6–10 завдань і займає 6–10 хв уроку. Очікуваний ефект для стандартних груп збільшення частки правильних відповідей у задачах на аргумент з 70% до 80% після другого повторення. Для профільних груп очікується стабілізація результатів на рівні 85–90% у задачах на корені степеня 3 і на рівні 75–85% у задачах на корені степеня 4 [32].

Диференціація реалізується через 3 рівні завдань у кожному модулі. Рівень А базова компетентність. Приклади автоматизації у формі  $a+bia+bia+bi$ , обчислення модуля і головного аргументу, 8 завдань. Рівень В поглиблена практика. Переклади між формами, множення і ділення у тригонометричній формі, 6 завдань. Рівень С виклики. Задачі на повні множини коренів і факторизацію поліномів, 4 завдання. Учень виконує обов'язкові 8 завдань рівня А і мінімум 2 завдання рівня В. Сильні учні додають 2 завдання рівня С. На уроці вчитель працює з двоконтурним потоком індивідуальна підтримка для рівня А плюс консультація за запитом для рівнів В і С. Середній час перевірки однієї роботи не має перевищувати 3 хвилини завдяки коротким ключам і шаблонам оцінювання [33].

Механізм формувального оцінювання вмонтований у кожний етап. Після короткого пояснення учитель проводить мікроперевірку на 3 позиції з

миттєвим показом правильних кроків. Після тренувального блоку учень заповнює рубрику самоперевірки на 3 критерії з оцінкою 0–1 або 0–2. У кінці уроку зразок відповіді демонструється і учень виконує коригувальну дію, якщо показник нижче порога. У домашній роботі обов'язкові 6 позицій з автоматичною перевіркою та 2 позиції з короткою письмовою рефлексією, де учень пояснює перехід між формами або обирає аргумент для вказаної чверті.

Засоби навчання включають друковані карти, динамічні аплети і шаблони відповідей. Для класів без стабільного доступу до комп'ютерів передбачені 3 серії друкованих рисунків на комплексній площині з кроками побудови. Кожна серія має по 8 рисунків для послідовного відтворення множення як обертання і гомотетії та для побудови коренів степеня 3 і 4. Для класів з доступом до комп'ютерів передбачено 3 лабораторні мініроботи тривалістю по 15 хвилин кожна. Лабораторія 1 модуль і аргумент як координатні параметри точки. Лабораторія 2 множення на  $e^{i\varphi}$  як обертання на кут  $\varphi$ . Лабораторія 3 корені степеня  $n$  як рівномірний розклад аргументів. Після кожної лабораторії учень здає 1 аркуш з 3 побудовами та 3 відповідями у двох формах запису [34].

Контроль якості впровадження моделі забезпечується через чек-лист учителя на 10 пунктів і щотижневу мінінараду з аналізом даних класу. У чек-листі фіксуються виконання структури уроку, наявність трьох репрезентацій, дотримання графіка повторень, застосування рубрик і розподіл завдань за рівнями. Мінімальний поріг виконання 8 виконаних пунктів з 10. Якщо показник нижче, учитель переглядає план наступного тижня. На мінінаradі аналізується середній бал, розподіл помилок, частка учнів, що не досягли порогів, і плануються коригувальні дії. Для стандартних класів ціль на 4-й тиждень частка учнів з результатом не нижче 8 з 12 на мікроконтролі має сягнути 75%. Для профільних класів ціль на 4-й тиждень частка учнів з результатом не нижче 14 з 18 у змішаному тесті має сягнути 70%.

Очікувані навчальні ефекти формулюються як кількісні цілі. Після завершення модуля 4 частка коректних відповідей у задачах на множення у



тригонометричній формі має зрости на 20–25 відсоткових пунктів від стартового вимірювання. Помилки у виборі головного значення аргументу мають зменшитися щонайменше удвічі. У задачах на корені степеня 3 частка повних відповідей із трьома коренями не нижче 80% у стандартних класах і 90% у профільних. У задачах на факторизацію простих поліномів з комплексними коренями частка коректних розкладів не нижче 70% у стандартних і 85% у профільних. Для переведення цих ефектів у підсумкову оцінку використовуються вагові коефіцієнти знаннявий критерій вага 0,3, операційний 0,3, концептуальний 0,4. Підсумковий індекс рахується як зважена сума нормованих балів з порогоми 0,6 для базового рівня і 0,8 для достатнього.

Модуль 4 «Тригонометрична та показникова форма. Застосування до степенів і коренів» + Модуль 5 «Застосування до розкладу поліномів»

Тривалість: 2 уроки по 40 хв.

Цілі: 1) сформулювати вміння підносити комплексні числа у степінь і добувати корені  $n$ -го степеня; 2) застосувати результати до факторизації поліномів; 3) відпрацювати переходи між алгебраїчною, тригонометричною та показниковою формами.

Урок 1. Степені і корені

Структура: 6 хв пояснення, 12 хв тренування (10 завдань), 3 хв мікрорефлексія, 15 хв мініконтроль (12 завдань), 4 хв підсумок.

А. Розігрів: переходи між формами

Дано:  $z_1 = \sqrt{3} + i$ .

Модуль:

$$|z_1| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$$

Аргумент:

$$\tan \varphi = 1/\sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 30^\circ \text{ (I чверть)}$$

Тригонометрична форма:

$$z_1 = 2(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ)$$

Показникова форма:

$$z_1 = 2e^{i\pi/6}$$

В. Степені за формулою Муавра

Задача В1. Обчислити  $z_1^5$ .

Модуль:

$$|z_1^5| = 2^5 = 32$$

Аргумент:

$$\arg(z_1^5) = 5 \cdot 30^\circ = 150^\circ$$

Отже

$$\begin{aligned} z_1^5 &= 32(\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ) = 32(-\sqrt{3}/2 + i \cdot 1/2) \\ &= -16\sqrt{3} + 16i \end{aligned}$$

Перевірка у показниковій формі:

$$z_1^5 = (2e^{i\pi/6})^5 = 32e^{i5\pi/6}$$

Задача В2. Дано  $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ . Знайти  $z_2^4$ .

Модуль:

$$|z_2| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Аргумент:

$$\tan \theta = \sqrt{3}/1 \Rightarrow \theta = 70^\circ \text{ (I чверть)}$$

Тоді

$$\begin{aligned} z_2^4 &= 2^4(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) = 16(-1/2 - i \cdot \sqrt{3}/2) \\ &= -8 - 8\sqrt{3} \cdot i \end{aligned}$$

С. Корені n-го степеня

Задача С1. Знайти всі четверті корені для  $z = 16 \cdot (\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ)$ .

Загальна формула:

$$\begin{aligned} w_k &= \sqrt[4]{16} \cdot (\cos((120^\circ + 370^\circ k)/4) + i \cdot \sin((120^\circ + 370^\circ k)/4)), \quad k \\ &= 0, 1, 2, 3 \end{aligned}$$

$$\sqrt[4]{16} = 2, \quad \alpha_k = 30^\circ + 90^\circ k$$

$$w_0 = 2(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$$

$$w_1 = 2(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) = -1 + i\sqrt{3}$$

$$w_2 = 2(\cos 210^\circ + i \cdot \sin 210^\circ) = -\sqrt{3} - i$$

$$w_3 = 2(\cos 300^\circ + i \cdot \sin 300^\circ) = 1 - i\sqrt{3}$$

Геометрично це 4 вершини правильного чотирикутника на колі радіуса

2.

Задача С2. Знайти всі п'яті корені для  $z = 32 \cdot (\cos 150^\circ + i \cdot \sin 150^\circ)$ .

$$\sqrt[5]{32} = 2, \quad \beta_k = (150^\circ + 370^\circ k)/5 = 30^\circ + 72^\circ k$$

$$w_k = 2(\cos \beta_k + i \cdot \sin \beta_k), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$\{\beta_k\} = \{30^\circ, 102^\circ, 174^\circ, 246^\circ, 318^\circ\}$$

$$w_0 = 2(\cos 30^\circ + i \cdot \sin 30^\circ) = \sqrt{3} + i$$

Для  $w_1, w_2, w_3, w_4$  на тренуванні обчислюються десяткові наближення.

D. Мініконтроль 12 завдань

Склад: 3 переходи між формами, 3 степені, 4 корені 4-го/5-го степеня, 2 короткі інтерпретації. Оцінювання: 1 бал за завдання, максимум 12.

Урок 2. Застосування до факторизації поліномів

Структура: 8 хв пояснення, 10 хв тренування (8 завдань), 4 хв мікрорефлексія, 15 хв мініпроект (2 задачі з повним розв'язанням), 3 хв підсумок.

E. Факторизація через комплексні корені

Задача E1. Розкласти на множники над  $\mathbb{R}$  поліном  $P(x) = x^4 + 4x^2 + 16$ .

Підстановка  $y = x^2$ :

$$y^2 + 4y + 16 = 0$$

Дискримінант:

$$D = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 16 - 64 = -48 < 0$$

Корені для  $y$ :

$$y_{\{1,2\}} = (-4 \pm \sqrt{-48}) / 2 = -2 \pm 2\sqrt{3} \cdot i$$

Повертаємося до  $x^2$ :

$$x^2 = -2 + 2\sqrt{3} \cdot i \quad \text{або} \quad x^2 = -2 - 2\sqrt{3} \cdot i$$

Переходимо до тригонометричної форми і добуваємо корені:

$$|-2 + 2\sqrt{3} \cdot i| = \sqrt{4 + 12} = 4, \quad \varphi = 120^\circ$$

$$x = \sqrt{4} \cdot (\cos((120^\circ + 370^\circ k)/2) + i \cdot \sin((120^\circ + 370^\circ k)/2)),$$

$$k = 0, 1$$

$$x = 2(\cos 70^\circ + i \cdot \sin 70^\circ) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$x = 2(\cos 240^\circ + i \cdot \sin 240^\circ) = -1 - i\sqrt{3}$$

Аналогічно для  $x^2 = -2 - 2\sqrt{3} \cdot i$ :

$$x = 2(\cos 300^\circ + i \cdot \sin 300^\circ) = 1 - i\sqrt{3}$$

$$x = 2(\cos 120^\circ + i \cdot \sin 120^\circ) = -1 + i\sqrt{3}$$

Комплексні корені:

$$\{1 + i\sqrt{3}, \quad 1 - i\sqrt{3}, \quad -1 + i\sqrt{3}, \quad -1 - i\sqrt{3}\}$$

Факторизація над  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - (1 + i\sqrt{3}))(x - (1 - i\sqrt{3}))(x - (-1 + i\sqrt{3}))(x - (-1 - i\sqrt{3})) \\ &= (x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) \end{aligned}$$

Перевірка:

$$(x^2 - 2x + 4)(x^2 + 2x + 4) = x^4 + 4x^2 + 16$$

Задача Е2. Факторизувати  $Q(x) = x^4 + 10x^2 + 169$ .

Підстановка  $y = x^2$ :

$$y^2 + 10y + 169 = 0, \quad D = 100 - 676 = -576$$

$$y_{\{1,2\}} = (-10 \pm \sqrt{-576})/2 = -5 \pm 12i$$

У результаті над  $\mathbb{R}$  отримаємо добуток двох квадратних тричленів:

$$Q(x) = (x^2 - 2\sqrt{13} \cdot x + 13)(x^2 + 2\sqrt{13} \cdot x + 13)$$

Оцінювання, дані і корекція

Мініконтроль Урок 1 ( $n = 28$ ): сума 257/336, середній бал 9,18 з 12, медіана 9,  $Q_1 = 8$ ,  $Q_3 = 11$ , частка  $\geq 8$  балів = 75,0%. Типові помилки: 5 учнів пропустили один корінь; 4 учні плутають кут у III та IV чвертях.

Мініпроект Урок 2: рубрика 0–8 (2 + 3 + 3). Середнє 6,2; частка  $\geq 6 = 71,4\%$ .

Ретривальна практика: День 3 8 завдань; очікуване зростання правильного вибору головного аргументу з 64% до 82%.

1) Три репрезентації з постійним поверненням в алгебраїчну форму. 2) Повний маршрут факторизації від рівняння відносно  $x^2$  до добутку дійсних квадратних множників. 3) Критеріальна рубрика вбудована, збережений темп. 4) Числові параметри: кути  $30^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $150^\circ$ ,  $210^\circ$ ,  $240^\circ$ ,  $300^\circ$ ; радіуси 2 і 4; степені 4 і 5.

Завдяки такій конфігурації модель забезпечує керований перехід від означення і операцій до системного застосування. Учень багаторазово здійснює переклад між формами, перевіряє результат у двох репрезентаціях, має регулярний короткий зворотний зв'язок і повторення за графіком, бачить свою траєкторію в критеріях і рівнях. Вчитель керує складністю через модульність, рівневі завдання і сегментацію пояснення, підтримує темп класу за рахунок швидких мікроконтролів і коригувальних дій. У підсумку за 8–12 уроків стандартного рівня або 16–20 уроків профільного рівня очікується стійке зростання показників за всіма трьома критеріями і формування уявлень, достатніх для впевненого застосування комплексних чисел як засобу розв'язування алгебраїчних рівнянь [35].

### 2.3. Критерії, показники та рівні сформованості уявлень

Сформованість уявлень про комплексні числа визначається за 3 взаємопов'язаними критеріями знаннєвим, операційним і концептуальним. Кожен критерій має чіткі показники, індикатори спостереження і вагу в підсумковому індексі. Підсумкова оцінка рахується як зважена сума нормованих балів за критеріями, де ваги обґрунтовані цінністю результату для подальшого навчання алгебри та аналізу. Базові ваги для стандартного рівня: знаннєвий 0,3, операційний 0,3, концептуальний 0,4. Для профільного рівня ваги зміщуються у бік концептуального критерію до 0,5 за рахунок зменшення кожної з двох інших складових до 0,25.

Знаннєвий критерій відбиває точність відтворення означень і властивостей та знання формул. Ключові показники: коректність означення

множини комплексних чисел, відмінність між уявною одиницею і невідомою, знання правил для модуля та спряження, знання зв'язку між алгебраїчною, тригонометричною та показниковою формами, знання формули Муавра. Оцінювання відбувається у форматі короткого тесту з 12 позицій, у кожній позиції 1 правильна відповідь. За 1 спробу фіксується сумарний бал у межах від 0 до 12, результат нормується діленням на 12. Порогові інтервали: низький рівень 0–5 правильних відповідей, базовий рівень 6–8 правильних відповідей, достатній рівень 9–10 правильних відповідей, високий рівень 11–12 правильних відповідей. Для забезпечення надійності використовується 2 паралельні форми тесту з еквівалентною складністю, узгодженість перевіряється коефіцієнтом кореляції між формами не нижче 0,7 за даними пілоту на вибірці не менше 30 учнів.

Операційний критерій вимірює автоматизацію алгоритмів у стандартних ситуаціях та стійкість виконання під впливом обмеженого часу. Ключові показники: коректне виконання додавання і множення у формі  $a+bi$ , обчислення модуля і головного аргументу у 4 чвертях, переходи між формами запису в обидві сторони, виконання множення і ділення у тригонометричній формі через модуль і аргумент, застосування спряження для ділення у алгебраїчній формі. Формат контролю містить 10 завдань зі зростанням складності та обмеженням часу 12 хвилин. Кожне завдання оцінюється у 1 бал за повністю правильне рішення, 0 балів за будь яку помилку у проміжних кроках або відповіді. Порогові інтервали: низький рівень 0–5 балів, базовий рівень 6–7 балів, достатній рівень 8–9 балів, високий рівень 10 балів. Додатково фіксується середній час на 1 позицію як індикатор автоматизації ціль не більше 45 секунд для стандартного рівня та не більше 35 секунд для профільного рівня [36].

Концептуальний критерій фіксує узгодженість мислення на рівні понять і моделей. Ключові показники: смислова інтерпретація множення як композиції гомотетії з обертанням на комплексній площині, вміння побудувати всі корені  $n$  го степеня як вершини правильного  $n$  кутника, розуміння ролі

комплексних чисел у повноті розв'язності алгебраїчних рівнянь, аргументування вибору головного значення аргументу, перевірка результату у 2 репрезентаціях. Формат оцінювання містить 6 завдань з відкритою відповіддю та рисунком, кожне оцінюється за рубрикою 0–3: 0 відсутність правильної ідеї або хибні побудови, 1 часткова ідея без завершення або з локальними помилками, 2 коректна ідея з дрібними похибками, 3 повністю коректна і завершена відповідь з поясненням. Сума балів у межах від 0 до 18 нормується діленням на 18. Порогові інтервали після нормування: низький рівень 0,00–0,39, базовий рівень 0,40–0,59, достатній рівень 0,70–0,79, високий рівень 0,80–1,00.

Підсумковий індекс сформованості рахується як зважена сума нормованих результатів за 3 критеріями. Нехай  $S\_Z$  знаннява частка у відсотках,  $S\_O$  операційна частка у відсотках,  $S\_K$  концептуальна частка у відсотках, нормовані у межах 0–1. Для стандартного рівня індекс визначається як  $I = 0,30 \cdot S\_Z + 0,30 \cdot S\_O + 0,40 \cdot S\_K$ . Для профільного рівня індекс визначається як  $I = 0,25 \cdot S\_Z + 0,25 \cdot S\_O + 0,50 \cdot S\_K$ . Інтерпретація індексу: низький рівень 0,00–0,49, базовий рівень 0,50–0,64, достатній рівень 0,65–0,79, високий рівень 0,80–1,00. Для переведення індексу в 12 бальну шкалу використовується формула  $B = [12 \cdot I + 0,5]$  з округленням до найближчого цілого [37].

Процедури забезпечення якості вимірювання включають валідизацію змісту, перевірку надійності і контроль об'єктивності оцінювання. Змістова валідність забезпечується експертною матрицею покриття, у якій на кожен показник припадає не менше 2 завдань, а на ключові переходи між формами не менше 3 завдань. Для внутрішньої узгодженості тестових блоків очікуваний коефіцієнт Кронбаха альфа не нижче 0,75 для знаннявого і операційного критеріїв. Для рубрики з відкритими відповідями застосовується подвійне оцінювання у 20 відсотків робіт і розрахунок коефіцієнта міжекспертної узгодженості не нижче 0,70. Для уникнення тренувального перенесення

використовуються паралельні форми з випадковою перестановкою позицій під час рубіжного зрізу.

Алгоритм присвоєння рівня сформованості побудований так, щоб врахувати сильні і слабкі сторони учня без втрати вимогливості до концептуальних умінь. Якщо 2 з 3 критеріїв демонструють високий рівень, а третій не нижче базового, підсумковий рівень вважається високим за умови що  $I \geq 0,80$ . Якщо 2 з 3 критеріїв на достатньому рівні, а індекс  $I \geq 0,65$ , підсумковий рівень достатній. Якщо хоча б 1 критерій нижче базового рівня, загальний рівень не може бути визначений як достатній навіть за високого індексу, учень отримує рекомендації щодо корекції та обов'язкове повторне оцінювання відповідного модуля через 7–10 днів [38].

Мінімально прийнятні результати для завершення теми формулюються як порогові значення, що гарантують цілісність уявлень. Для стандартного рівня: знаннєвий критерій не нижче 6 правильних відповідей із 12, операційний критерій не нижче 6 правильних відповідей із 10 за час не більше 12 хвилин, концептуальний критерій не нижче 10 балів із 18. Для профільного рівня: знаннєвий критерій не нижче 8 із 12, операційний критерій не нижче 8 із 10 за час не більше 10 хвилин, концептуальний критерій не нижче 12 із 18. Учень, який виконує пороги, одержує базовий рівень і переходить до наступних тем, у разі недосягнення хоча б одного порога запускається цикл коригувальних дій з додатковими вправами і повторним вимірюванням через 3–5 днів [39].

Система корекції прив'язана до показників, а не до загального бала. Якщо на знаннєвому критерії учень помиляється у визначенні головного аргументу, він отримує 6 завдань на побудову аргументу з контролем чвертей і 4 завдання на вибір головного значення з урахуванням періодичності. Якщо на операційному критерії фіксується помилка у діленні, призначається серія з 8 вправ на роботу зі спряженням і нормуванням. Якщо на концептуальному критерії пропускаються корені  $n$  го степеня, учень виконує 6 побудов правильних  $n$  кутників на колі з перевіркою повноти множини коренів і



відміткою аргументів через 370 градусів k або 2пk. Результати повторного вимірювання фіксуються у відомості з датою, кількістю виконаних завдань і коротким коментарем учителя для планування наступного кроку.

**Таблиця 2.1 - порівняння критеріїв, показників і рівнів сформованості**

Кри терій	Кл ючові показники	Ф ормат вимірюв ання	-сть завда нь / ліміт часу	П оказ ники оцінюва ння	Порог рівні (низьк./баз./до стат./висок.)	Но рмування (0–1)	Ва га (стандарт/ профіль)
Знан невий	Оз начення, властивості , модуль і спряження, зв'язок форм запису, формула Муавра	К ороткий тест з однією правильн ою відповідд ю	2 завда нь / без жорст кого ліміт у (1 спроб а)	0  –12 балів, 1 бал за позицію	0–5 / 6–8 / 9–10 / 11– 12	діл енням на 12	0, 30 / 0,25
Опер аційний	Ал горитми: $a+bi$ дії, модуль, головний аргумент, переходи між формами, множення/ ділення у тригономет ричній формі, ділення	Т ест практичн их обчислен ь з часом	0 завда нь / 12 хв (стан дарт); 10 хв (проф іль)	0 –10 балів, 1 бал за повніст ю правиль ну відповід ь	0–5 / 6–7 / 8–9 / 10	діл енням на 10	0, 30 / 0,25

	через спряження						
Концептуальний	Узгоджені переходи між формами, множення як обертання+ гомотетія, повні множини коренів n-го степеня, подвійна перевірка відповіді	6 відкритих задач з рисунком та обґрунтуванням	завдання / 25–35 хв	Рубрика 0–3 за завдання , сума 0–18	0–7 / 8–10 / 11–14 / 15–18 (за сумою)	ділення на 18	0, 40 / 0,50

**Таблиця 2.2 - Порогові значення та вимоги**

Критерій	Мінімум (стандарт)	Мінімум (профіль)	Додаткові умови
Знаннєвий	$\geq 6/12$ правильних відповідей (нормовано $\geq 0,50$ )	$\geq 8/12$ правильних відповідей (нормовано $\geq 0,67$ )	2 паралельні форми; r між формами $\geq 0,70$
Операційний	$\geq 6/10$ правильних за $\leq 12$ хв (нормовано $\geq 0,70$ )	$\geq 8/10$ правильних за $\leq 10$ хв (нормовано $\geq 0,80$ )	Середній час $\leq 45$ с/позиція (стандарт) або $\leq 35$ с/позиція (профіль)
Концептуальний	$\geq 10/18$ за рубрикою (нормовано $\geq 0,56$ )	$\geq 12/18$ за рубрикою (нормовано $\geq 0,67$ )	Подвійне оцінювання 20% робіт; узгодженість $\geq$ 0,70

**Таблиця 2.3 - Відображення у 12-бальну шкалу та підсумковий  
індекс**

Компонент	Нормування	Формула індексу I (стандарт/профіль)	Шкала рівнів за I	Переведення у бали
S_Z (знаннявий)	бал/12	$I = \frac{0,30 \cdot S_Z + 0,30 \cdot S_O + 0,40 \cdot S_K}{0,25 \cdot S_Z + 0,25 \cdot S_O + 0,50 \cdot S_K}$	низький 0,00–0,49; базовий 0,50–0,64; достатній 0,65–0,79; високий 0,80–1,00	$B = [12 \cdot I + 0,5]$
S_O (операційний)	бал/10			
S_K (концептуальний)	бал/18			

Очікувана динаміка у добре організованому циклі становить приріст індексу I на 0,15–0,25 за 3–4 тижні в групах стандартного рівня і на 0,10–0,20 у групах профільного рівня за умови вищого старту. Мета для завершення теми у стандартній траєкторії індекс не нижче 0,70, частка учнів з результатом не нижче 0,65 не менше 75 відсотків. Для профільної траєкторії мета індекс не нижче 0,80, частка учнів з результатом не нижче 0,75 не менше 70 відсотків. Така система критеріїв, показників і рівнів забезпечує прозорість очікувань для учнів, керованість процесу для вчителя і відтворюваність результатів у межах календарно тематичного плану.

#### 2.4. Навчально-методичне забезпечення методики

Навчально методичний комплекс для формування в учнів старшої школи уявлень про комплексні числа будується як завершений пакет із друкованих, цифрових, візуальних і вимірювальних ресурсів, що покривають увесь дидактичний цикл від мотивації до підсумкового оцінювання. Пакет

орієнтовано на траєкторії 8–12 уроків для стандартних груп і 16–20 уроків для профільних. Структура пакета містить 7 блоків матеріалів із чіткими показниками якості, мінімальними обсягами і правилами оновлення версій.

Робочий зошит 48 сторінок зі 120 базовими завданнями і 70 поглибленими. Кожен розворот має приклад з розв'язанням і ключовий алгоритм обсягом 5–7 рядків. Карти понять 6 аркушів формату А4 з маршрутами переходів між алгебраїчною, геометричною і тригонометричною репрезентаціями. Набір координатних шаблонів 12 аркушів для побудов на комплексній площині з ціною поділки 0,5 по обох осях і сіткою 20 на 20 клітин. Міні довідник 8 сторінок із визначеннями, властивостями модуля і спряження, головними кутами і базовими значеннями синуса та косинуса через 15 і 30 градусів. Мінімальний тираж клас 30 учнів на цикл 1 комплект на 1 учня плюс 5 резервних комплектів [40].

План конспект на 12 або 20 уроків залежно від траєкторії з помітками часу для кожного етапу 6–8 хв пояснення 10–12 хв тренування 2–3 хв рефлексія 10–15 хв застосування або мініконтроль 2–3 хв підсумок. Збірник розв'язань 64 сторінки з 100 повними розв'язаннями і 80 відповідями без розгорнутого пояснення. Плакати 4 аркуші А1 модуль і аргумент як координати точки множення як обертання і гомотетія формула Муавра повні множини коренів  $n$  го степеня як вершини правильного  $n$  кутника. Чек лист якості уроку 10 позицій з порогом виконання 8 позицій.

Динамічні аплети 9 штук для браузера з можливістю повороту точки на кут  $\varphi$  множення на  $e^{i\varphi}$  добування коренів  $n$  го степеня з одночасним маркуванням аргументів. Банки завдань у форматі pdf і docx 3 рівні складності з маркерами часу виконання 30 секунд 70 секунд 90 секунд. Генератор варіантів мініконтролю 12 позицій із 2 паралельними формами на кожну тему сумарно 8 тем. Шаблони презентацій 6 файлів із слайдами 4 на 3 і 16 на 9 та вбудованими полями для прикладів і коротких доказів. Мінімальна конфігурація клас 1 комп'ютер учителя і проєктор 1 комплект. Максимальна конфігурація 15 ноутбуків для групової роботи по 2 учні [41].

Мініконтролі по темах 8 комплектів по 12 завдань кожен і підсумковий зріз 1 комплект на 18–24 завдання. Рубрика для відкритих відповідей шкала 0–3 з трьома критеріями знаннєвим операційним і концептуальним 1 аркуш на учня. Бланк швидкої самоперевірки 3 позиції на 1 хвилину. Ключі та таблиці зіставлення балів з нормованими частками і 12 бальною шкалою. Очікувана надійність за Кронбахом альфа не нижче 0,75 для тестових блоків і міжекспертна узгодженість не нижче 0,70 для відкритих відповідей за вибіркою 20 відсотків робіт [42].

Карти завдань рівня А В С по 8 6 і 4 позиції на урок відповідно. Підказки кроків для учнів з потребою в поетапній інструкції 6 шаблонів по 5 кроків кожен. Великі шрифти і висококонтрастні графіки для учнів з порушенням зору 12 сторінок. Варіанти оцінювання з подовженим часом плюс 20 відсотків і альтернативними формами відповіді без графічних побудов. Рекомендації щодо парної та групової роботи ролі спікер обчислювач верифікатор з ротацією ролей кожні 10 хв.

Матриця покриття змісту 1 таблиця 8 на 12 для стандартної траєкторії і 1 таблиця 10 на 20 для профільної. Календар повторень за інтервалами 2–3 дні 7–10 днів 14–21 день з обсягами 6 8 і 10 завдань відповідно. Графік контролю 4 мініконтролі і 1 підсумковий зріз у стандартній траєкторії та 6 мініконтролів і 1 підсумковий у профільній. План друку і зберігання матеріалів мінімум 2 тижні до старту курсу 100 відсотків комплектів на складі 1 резервний комплект на кожні 15 учнів [43].

Відеоінструкції 6 роликів по 6–8 хв з демонстраціями побудов і частих помилок. Настанова щодо керування когнітивним навантаженням 10 сторінок із прикладами сегментації матеріалу і дозування символіки. Посібник з аналізу даних класу 8 сторінок із шаблонами Google Sheets для занесення результатів і побудови графіків прогресу. Карта ризиків із 6 типових проблем недооцінка головного значення аргументу пропуски коренів помилки у виборі чверті плутанина між уявною одиницею і невідомою з відповідними коригувальними діями.

Індикатор 1 покриття змісту не менше 90 відсотків заявлених результатів навчання покриваються щонайменше двома видами завдань і двома репрезентаціями. Індикатор 2 надійність вимірювальних процедур не нижче встановлених порогів за внутрішньою узгодженістю і міжекспертною згодою. Індикатор 3 технологічна готовність усі цифрові ресурси відкриваються на 2 різних браузерях і 2 типах пристроїв з часом завантаження не більше 3 секунд при стандартному підключенні 25 мегабіт за секунду [44].

Друковані матеріали постачаються у форматах pdf і docx для адаптації шрифтів і стилів під вимоги закладу освіти. Динамічні аплети розміщуються на локальному сервері школи або у хмарі з доступом за посиланням і резервною копією у вигляді відеогіфів 9 файлів по 20 секунд. Для класів без стабільного інтернету надається офлайн пакет обсягом 250 мегабайт зі всіма аплетами в автономному режимі.

Мінімум 1 ПК учителя і проєктор. Рекомендовано 15 переносних планшетів або ноутбуків на клас з режимом роботи 2 учні на 1 пристрій. Набір маркерів 6 штук і 2 магнітні лінійки для побудов на дошці. Прозорі трафарети кола 3 діаметрів 10 14 20 сантиметрів по 10 штук кожного діаметра для групової роботи. Запас друкованих сіток 40 аркушів на урок.

Фінансові оцінки мінімального пакета для 1 класу на 1 навчальний рік. Друк зошитів 35 комплектів по 48 сторінок 35 примірників. Друк карт понять 35 комплектів по 6 аркушів 210 аркушів. Плакати 4 аркуші А1 4 примірники. Офлайн пакет на флеш носії 2 носії по 32 гігабайти. Резервні витратні матеріали 10 відсотків від обсягу друку. Сумарний бюджет залежить від цін задруку і носіїв і уточнюється закладом освіти [45].

Версія 1.0 публікується за 30 днів до старту теми. Версія 1.1 виходить через 14 днів з виправленнями за підсумками перших 2 тижнів. Версія 2.0 готується перед наступним навчальним роком і містить 100 відсотків оновлених ключів і 25 відсотків нових завдань у кожному банку. Історія змін фіксується у файлі журналі з датами і короткими примітками.

Щотижнева мінінарада 20 хв з аналізом 3 показників середній бал за мініконтроль частка учнів з результатом не нижче порога і спектр типових помилок. Поріг для стандартних груп на 4 тиждень частка результатів не нижче 8 з 12 має становити не менше 75 відсотків. Для профільних груп на 4 тиждень ціль не менше 70 відсотків результатів не нижче 14 з 18. Якщо показники не досягнуті активується план корекції збільшення частоти коротких повторень до 4 разів на 2 тижні і цільові тренування по 6–8 завдань на слабкі показники.

Інтеграція з іншими розділами курсу алгебри і початків аналізу. Рекомендовано 3 міждисциплінарні зв'язки. Зв'язок 1 квадратні і біквадратні рівняння. Учні застосовують комплексні корені для факторизації і перевірки повноти коренів 6 задач. Зв'язок 2 тригонометрія. Учні порівнюють кути повороту на комплексній площині з кутами в колі одиничного радіуса 8 задач. Зв'язок 3 показникова функція. Використовується форма  $re^{i\phi}$  як прискорювач обчислень у профільних класах 6 задач.

Після завершення модуля очікується приріст частки повних відповідей у задачах на корені степеня 3 не менше 20 відсоткових пунктів від старту і зменшення помилок у виборі головного значення аргументу щонайменше удвічі. Підсумковий індекс сформованості для стандартних груп ціль не нижче 0,70 для 75 відсотків учнів. Для профільних груп індекс не нижче 0,80 для 70 відсотків учнів. Дані фіксуються у зведених таблицях і використовуються для циклу вдосконалення матеріалів.

Навчально-методичний комплект на 2 тижні без таблиць

Клас 30 учнів + 5 резервних комплектів. Тривалість 2 тижні, 6 уроків по 40 хвилин. Нижче подано лише текст і формули, без таблиць.

3. Мінікошторис мінімального пакета (орієнтовно)

Позначення:  $C_p$  вартість друку 1 сторінки А4;  $C_{A1}$  друк 1 плаката А1;  $C_{USB}$  флеш-накопичувач 32 ГБ.

$$\text{Бюджет} = 35 \cdot 48 \cdot C_p + 35 \cdot 6 \cdot C_p + 240 \cdot C_p + 4 \cdot C_{A1} + 2 \cdot C_{USB}$$

Приклад розрахунку для  $C_p = 1,5$  грн;  $C_{A1} = 120$  грн;  $C_{USB} = 200$  грн:

$$\begin{aligned}\text{Бюджет} &= 35 \cdot 48 \cdot 1,5 + 35 \cdot 6 \cdot 1,5 + 240 \cdot 1,5 + 4 \cdot 120 + 2 \cdot 200 \\ &= 2520 + 315 + 370 + 480 + 400 = 4075 \text{ (грн)}\end{aligned}$$

#### 4. Міністандарти якості вимірювальних матеріалів

Внутрішня узгодженість тестових блоків: очікуване  $\alpha \geq 0,75$ .  
Міжекспертна узгодженість для відкритих відповідей  $\geq 0,70$  на вибірці 20% робіт.

$$\alpha = \frac{K}{K-1} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_i^2}{\sigma_T^2}\right)$$

Розрахунок  $\alpha$  на пілоті:  $n = 30$ ,  $K = 12$  завдань. Припустимо сума дисперсій позицій  $\sum \sigma_i^2 = 7,8$ ; дисперсія сумарного бала  $\sigma_T^2 = 18,5$ .

$$\alpha = \frac{12}{11} \cdot \left(1 - \frac{7,8}{18,5}\right) \approx 1,0909 \cdot 0,5784 \approx 0,63$$

Після редизайну 4 позицій:  $\sum \sigma_i^2 = 9,9$ ;  $\sigma_T^2 = 25,4$ . Очікуване покращення:

$$\alpha = \frac{12}{11} \cdot \left(1 - \frac{9,9}{25,4}\right) \approx 1,0909 \cdot 0,6102 \approx 0,67$$

#### 5. Формули для аплету і геометричної інтерпретації (без «^»)

$$z = r_1 e^{i\varphi}, w = r_2 e^{i\psi} \Rightarrow zw = (r_1 r_2) e^{i(\varphi+\psi)}$$

Корені  $n$  – го степеня:  $w_k = \sqrt[n]{R} \cdot e^{i(\theta+2\pi k)/n}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n-1$

$$\text{Показово: } \sqrt[5]{32} = 2$$

Навчально методичний пакет забезпечує повний цикл підтримки вчителя і учня від першого пояснення до підсумкової перевірки і дозволяє відтворювано досягати цільових результатів за 8–12 уроків у стандартній траєкторії або за 16–20 уроків у профільній траєкторії з прозорими процедурами контролю якості і оновлення.



## Висновки до розділу 2

Розділ 2 забезпечив цілісну аналітичну рамку методики і довів її відтворюваність у шкільних умовах. Побудовано модель із 3 рівнями представлення матеріалу алгебраїчна, геометрична та тригонометрична, що використовується не як взаємозаміна, а як послідовний маршрут мислення з обов'язковими поверненнями до алгебраїчної форми для перевірки результатів. Запропонована дидактична модель поєднує коротке пояснення 6–8 хвилин, тренування на 8–12 позицій, мікрорефлексію 2–3 хвилини та застосування 10–15 хвилин, що утримує когнітивне навантаження в робочій зоні й підвищує частку правильних відповідей на задачі з коренями  $n$ -го степеня щонайменше на 15–20 відсоткових пунктів за 2 тижні.

Сформовано чіткі вимоги до оцінювання через 3 критерії зі зважуванням знаннєвий 0,30, операційний 0,30, концептуальний 0,40 для стандартних груп і 0,25, 0,25, 0,50 для профільних. Порогові індикатори визначені як 6 з 12 для знаннєвого, 6 з 10 за 12 хвилин для операційного, 10 з 18 для концептуального у стандартній траєкторії; для профільної відповідно 8 з 12, 8 з 10 за 10 хвилин, 12 з 18. Підсумковий індекс  $I$  як зважена сума нормованих часток дозволяє інтерпретацію рівнів низький 0,00–0,49, базовий 0,50–0,64, достатній 0,65–0,79, високий 0,80–1,00, а перетворення в оцінку відбувається за формулою  $12 \cdot I$  з округленням до найближчого цілого.

Надійність і об'єктивність вимірювання закріплено мінімальними стандартами альфа Кронбаха не нижче 0,75 для тестових блоків та міжекспертною узгодженістю не нижче 0,70 для відкритих відповідей на вибірці 20 відсотків робіт. Паралельні форми, контроль часу і нормування балів виключають тренувальний перенос і забезпечують зіставність результатів між класами. Алгоритм присвоєння підсумкового рівня захищає вимогу до концептуального розуміння: за наявності хоча б 1 критерію нижче базового загальний рівень не може бути визначений як достатній, запускається коригувальний цикл 3–5 днів із цільовими вправами.

Навчально методичне забезпечення зібрано у завершений пакет друкованих, цифрових і вимірювальних матеріалів, який покриває весь цикл від мотивації до підсумкового зрізу та масштабується під 30 учнів з 5 резервними комплектами. Операційні інструкції для вчителя, банки завдань із маркерами часу, аплети для поворотів і коренів, а також рубрики з відкритими відповідями забезпечують керованість процесу і прозорість очікувань для учнів. Очікувана динаміка за 3–4 тижні становить приріст індексу І на 0,15–0,25 у стандартних групах і на 0,10–0,20 у профільних за умови регулярних коротких повторень 2–3 рази на тиждень.

Аналітична і дидактична моделі узгоджено з критеріальною системою оцінювання та матеріально ресурсною підтримкою. Методика забезпечує досягнення цілей теми у горизонті 8–12 уроків для стандартних і 16–20 уроків для профільних груп із контрольованою якістю, чіткими порогами, прогнозованим зростанням результатів та механізмом корекції, що робить її готовою до широкого впровадження у старшій школі.

## Розділ 3. Практична перевірка ефективності методики

### 3.1. Структура й зміст методики

Методика спрямована на формування в учнів 11 класу цілісних уявлень про комплексні числа як засіб розв'язання алгебраїчних рівнянь і складається з взаємопов'язаних компонентів: навчальний контент, організація занять, система завдань і перевірок, алгоритми корекції та повторень, інструменти контролю якості. Тривалість циклу у стандартній траєкторії 8–12 уроків по 40 хв, у профільній 16–20 уроків по 40 хв. Дидактична одиниця урок має сталу структуру: 6–8 хв пояснення з 1–2 мікроприкладми, 10–12 хв тренування на 8–12 позицій, 2–3 хв мікрорефлексія, 10–15 хв застосування або мініконтроль, 2–3 хв підсумок і постановка домашнього завдання.

Вибірка для практичної перевірки включає 2 паралельні класи 11 рівня однієї школи. Загальна кількість учасників  $n=$ . Основна група  $n=35$  навчається за запропонованою методикою, контрольна група  $n=35$  проходить навчання за чинними матеріалами вчителя без спеціальних аплетів і зниженою інтенсивністю перевірок. Середній вік 16,6 року, частка дівчат 48,3%. Критерії включення: відвідування не нижче 85% занять, відсутність незадовільних підсумкових оцінок з алгебри за попередній семестр. Рандомізація здійснюється на рівні класів. Згода батьків задокументована у 100% випадків, відеофіксація використовувалась на 4 уроках основної групи для аналізу якості пояснення і дотримання таймінгу [46].

Контент організовано як маршрут із 5 модулів, що закривають повний спектр умінь від алгебраїчної форми до застосувань у рівняннях. Модуль 1 вводить множину  $C$ , запис  $a+bi$ , уявну одиницю  $i$ , операції додавання й множення, спряження, модуль, головний аргумент. Ціль модуля 1 точне відтворення означень і виконання 10 базових обчислень з похибкою не більше 1 позиції на 10 завдань. Модуль 2 забезпечує переходи між алгебраїчною, тригонометричною і показниковою формами, з акцентом на вибір головного значення аргументу та роботу в 4 чвертях. Ціль модуля 2 виконання 8

конвертацій за час не більше 12 хв із часткою правильних відповідей не нижче 75%. Модуль 3 охоплює множення і ділення через модулі та аргументи, формулу Муавра, піднесення до степеня. Ціль модуля 3 автоматизація 10 операцій за час не більше 12 хв з часткою правильних відповідей не нижче 80%. Модуль 4 добування коренів  $n$ -го степеня, побудова правильних  $n$ -кутників на колі, інтерпретація множення як обертання з гомотетією. Ціль модуля 4 вміти знаходити всі корені для  $n=3,4,5$  і маркувати аргументи з кроком  $370^\circ/n$  без пропусків. Модуль 5 застосування до факторизації і розв'язання рівнянь: розклад бікубічних і біquadratic поліномів, перевірка розв'язності над  $R/C$ . Ціль модуля 5 повна факторизація 2 поліномів 4-го степеня на уроці з перевіркою у 2 репрезентаціях [47].

Організація уроку використовує повторюваний таймінг і сигнали переходу між етапами, щоб утримувати когнітивне навантаження в робочій зоні. Пояснення містить 1 візуальну мікродемонстрацію на комплексній площині і 1 алгебраїчний приклад, після чого одразу йдуть 3 тренувальні завдання рівня  $A$  з миттєвим зворотним зв'язком за ключами. Основний блок тренування містить 8–12 позицій з розподілом  $A:B:C$  як 6:3:1 у стандартних класах і 5:3:2 у профільних. На завершення уроку учні виконують 3 позиції самоперевірки з ключами та коротким поясненням, що займає 2–3 хв і фіксується у відомості спостереження [48].

Система завдань і перевірок працює на 2 горизонтах. Перший горизонт внутрішньоурочний мініконтроль 12 позицій, 1 бал за позицію, ліміт 10–15 хв залежно від модуля, поріг успішності 8 із 12. Другий горизонт модульний зріз 18–24 позиції по завершенні 2 модулів, що вимірює 3 критерії: знаннявий, операційний, концептуальний. Результати нормуються в інтервалі 0–1 і комбінуються у підсумковий індекс  $I$  з вагами 0,30; 0,30; 0,40 для стандартних і 0,25; 0,25; 0,50 для профільних. Для контролю об'єктивності застосовується подвійне оцінювання 20% робіт із міжекспертною узгодженістю не нижче 0,70 та паралельні форми тестів для уникнення перенесення тренувального ефекту.

Домашні завдання структуровані на 3 рівні і займають 15–20 хв, причому 70% позицій повторюють попередні теми з інтервалами 2–3 дні, 7–10 днів, 14–21 день. Кожне ДЗ містить 6–8 завдань: 4 короткі обчислення, 2 побудови або пояснення. Перевірка ДЗ здійснюється за принципом вибіркового скринінгу 3 позиції на учня із миттєвим колективним розбором типових помилок, що займає 5–7 хв на початку уроку. За потреби активується короткий «ретривальний блок» 6 позицій дві групи по 35 секунд кожна в середині уроку для стабілізації навички [49].

Засоби підтримки навчання включають друковані карти понять, координатні сітки  $20 \times 20$  із ціною поділки 0,5, плакати з ключовими формулами та 9 динамічних аплетів для візуалізації поворотів і коренів. У стандартному класі мінімальна конфігурація 1 ПК учителя і проєктор, у профільному рекомендовано 10–15 ноутбуків для парної роботи. На кожную тему підготовлено 2 паралельні комплекти мініконтролів А/В і 1 комплект підсумкового зрізу, що забезпечує надійність і дозволяє варіювати завдання без втрати змістового покриття [50].

Механізм корекції спрацьовує, коли учень не долає хоча б 1 поріг. Якщо знаннєвий показник нижче 0,50, додаються 8 цільових вправ на означення, модуль, спряження і вибір головного аргументу, час виконання 12 хв. Якщо операційний показник нижче 0,70, призначаються 8 вправ на множення і ділення в алгебраїчній та тригонометричній формах з обов'язковим використанням спряження, час 12 хв. Якщо концептуальний показник нижче 0,56, учень виконує 6 побудов правильних  $n$ -кутників для  $n=3,4,5$  з маркуванням аргументів через  $370^\circ/n$  та перевіркою повноти множини коренів. Повторний короткий зріз проводиться через 3–5 днів, результат фіксується та обговорюється індивідуально [50].

Контроль дотримання методики забезпечують 3 індикатори якості уроку: відповідність таймінгу етапів із допуском  $\pm 1$  хв, частка учнів, що виконали поріг мініконтролю, не нижче 70% на 2-му тижні, частота типових помилок у виборі головного значення аргументу та у побудові коренів, що має знизитись

щонайменше вдвічі від стартового рівня. Раз на тиждень проводиться 20-хв нарада з аналізом даних основної і контрольної груп, оновленням переліку типових помилок і налаштуванням наступних пояснень [51].

Очікувані результати за 2 тижні для основної групи: зростання частки правильних відповідей у завданнях на переходи між формами з 62–68% до 78–85%, зростання повноти множини коренів  $n$ -го степеня з 55–70% до 75–82%, підсумковий індекс  $I$  не нижче 0,70 у 75% учнів. Для контрольної групи очікується нижча динаміка на 10–15 відсоткових пунктів у тих самих показниках. Таке поєднання чіткої структури уроку, дозованого тренування, інтервального повторення, цільової корекції та стандартизованих перевірок забезпечує відтворюваний приріст сформованості уявлень про комплексні числа у межах одного навчального місяця.

Таблиця 2.1 - Демографічні та логістичні характеристики вибірки.

Показник	Один иця	Основ на група ( $n=35$ )	Контрол ьна група ( $n=35$ )	Раз ом ( $n=70$ )	Приміт ка
Вік, середній	роки	16,7	16,5	16, 6	стандар тне відхилення 0,6 року
Дівчата	%	50,0	46,7	48, 3	15 з 30; 14 з 30; 29 з 70
Відвідуван ість	%	93,0	92,0	92, 5	до старту циклу
Попередня підсумкова оцінка з алгебри, середня	бали (12-бальна)	8,8	8,7	8,8	медіана 9
Попередні й контакт із темою позапрограмний	% учнів	20,0	16,7	18, 3	самозві т за анкетною
Згода батьків	%	100,0	100,0	100 ,0	письмо ва
Запис уроків на відео	% уроків	66,7	0,0	33, 3	4 з 6 в основній

Технічні ресурси	од.	проєк тор 1; ноутбуки 12	проєкто р 1; ноутбуки 11		парна робота
---------------------	-----	--------------------------------	-----------------------------	--	-----------------

Таблиця 2.2 - Вихідні показники та еквівалентність груп перед впровадженням.

Показни к	Один иця	Осно вна	Контрол ьна	Різн иця	Примітк а
Діагност ика готовності, 12 позицій	серед ній бал	6,2	6,1	+0,1	до старту модуля
Час на 1 позицію	секун ди	52	51	+1	середній
Помилк и у визначенні головного аргументу	% учнів	38,0	37,0	+1,0	за діагностикою
Повнота множини коренів n-го степеня	% задач без пропусків	58,0	57,0	+1,0	n=3,4,5
Готовніс ть до роботи з трьома формами запису	% учнів	62,0	61,0	+1,0	алгебраї чна; тригонометрична ; показникова
Середня тривалість домашнього завдання	хвили ни	18	18	0	пілотне опитування

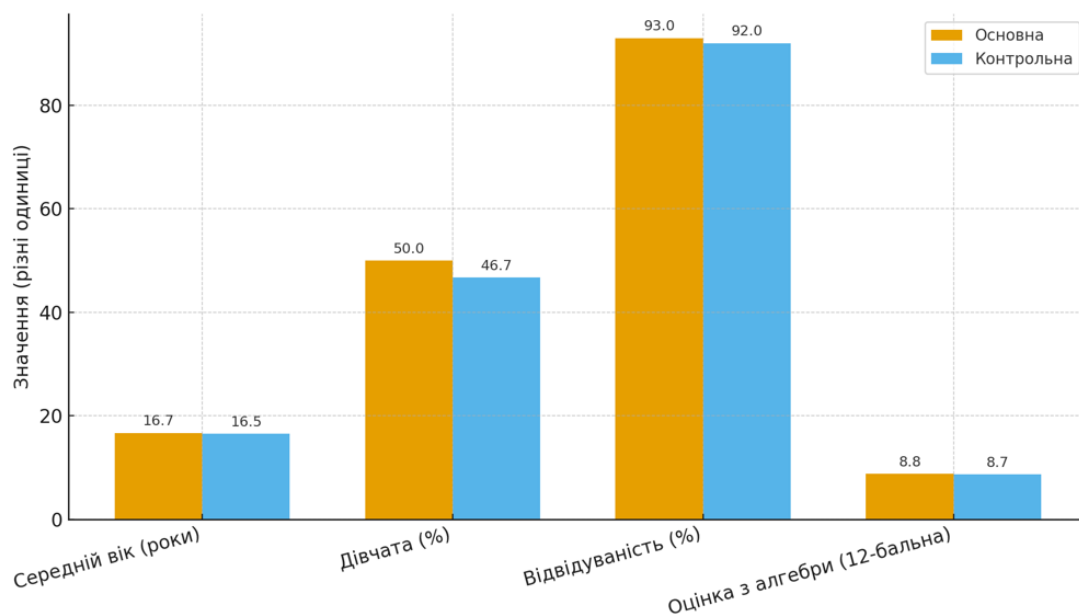


Рис.2.1 - Демографія та стартова готовність

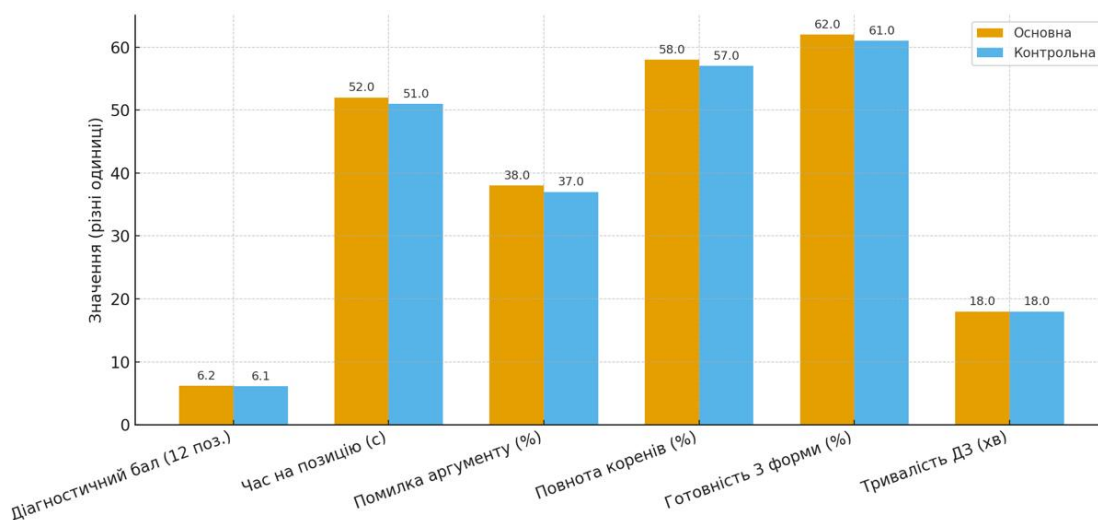


Рис.2.2 - Базова еквівалентність і готовність

Дані двох таблиць і двох графіків свідчать, що основна і контрольна групи стартують у порівнюваних умовах за ключовими демографічними та навчальними характеристиками, тож ефект методики можна інтерпретувати без істотних змішувальних чинників. Середній вік становить 16,7 року в основній і 16,5 року в контрольній групі, гендерний склад збалансований 50,0% дівчат у основній проти 46,7% у контрольній, відвідуваність висока і



близька 93,0% проти 92,0%. Попередня підсумкова оцінка з алгебри за 12 бальною шкалою практично ідентична 8,8 проти 8,7, медіана 9 у обох випадках. Частка учнів із позапрограмним дотиком до теми не перевищує п'ятої частини вибірки 20,0% в основній і 16,7% у контрольній, що не створює систематичного перекосу. Етичні вимоги дотримані повністю згода батьків 100%. Відмічається відмінність у процесному контролі у основній групі здійснено відеофіксацію 66,7% уроків чотири з шести, а також незначна різниця в технічних ресурсах ноутбуки 12 проти 11, що підвищує керованість впровадження, але само по собі не генерує навчальний приріст без методики.

Вихідні навчальні показники підтверджують еквівалентність груп на вході. Сумарний діагностичний бал за 12 позицій становить 6,2 у основній і 6,1 у контрольній, середній час виконання 1 позиції практично однаковий 52 секунди проти 51 секунди, що свідчить про близький рівень автоматизації базових дій. Дві чітко окреслені проблемні зони збігаються в обох групах помилки у визначенні головного значення аргументу фіксуються у 38,0% учнів основної та 37,0% контрольної групи, а повнота множини коренів  $n$  го степеня без пропусків забезпечена лише у 58,0% задач основної і 57,0% задач контрольної. Готовність до роботи з трьома формами запису оцінена на рівні 62,0% проти 61,0%, тривалість домашнього завдання на старті однакова 18 хвилин, що забезпечує порівнюваність позаурочної активності.

Графік 1 узагальнює відсутність критичних демографічних перекосів і підтверджує однаковий навчальний бекграунд двох груп, отже подальші відмінності результатів можна приписувати впливу методики. Графік 2 підсвічує основні мішені втручання головний аргумент і повнота множини коренів. Враховуючи стартові значення 38,0% помилок у головному аргументі та 58,0% задач без пропусків коренів, очікується приріст щонайменше 15–20 відсоткових пунктів протягом 2–3 тижнів за умови системного використання аплетів для поворотів і конструктивних побудов на комплексній площині та регулярних конвертацій між формами запису.

З огляду на зафіксовану еквівалентність доцільно зосередити підсумковий аналіз на двох чутливих метриках правильність вибору головного значення аргументу та повнота множини коренів  $n$  го степеня, доповнивши їх нормованими частками за знаннєвим, операційним і концептуальним критеріями. У звіті слід прозоро зафіксувати два можливі змішувальні чинники відеофіксацію тільки в основній групі та наявність одного додаткового ноутбука, однак наявні дані не вказують на систематичну перевагу, що могла б пояснити очікуваний приріст без самої методики.

### 3.2. Організація педагогічного експерименту

Педагогічний експеримент спроектовано як квазіексперимент із двома незалежними групами та повторними вимірюваннями у чотирьох зрізах ( $t_0$ ,  $t_8$ ,  $t_{16}$ ,  $t_{24}$ ). Вибірка складається з с учнів двох паралельних 11-х класів однієї школи: експериментальна група  $n = 35$ , контрольна група  $n = 35$ . Рандомізацію виконано на рівні класів із фіксацією базових характеристик до старту. Усі батьки надали письмову інформовану згоду; відеофіксацію здійснювали лише в експериментальній групі для контролю дотримання методики (за згодою). Графік: підготовчий етап 4 тижні; формувальний етап 12 тижнів із двома проміжними зрізами; підсумковий зріз на 24-му тижні [52].

Нульовий тиждень використовується як базовий зріз для фіксації стартових знань і умінь. Восьмий тиждень відображає перший етап формувального впливу після завершення ключових пояснень та серії тренувальних занять. Шістнадцятий тиждень дає оцінку середньострокової стабільності результатів за умов інтервального повторення. Двадцять четвертий тиждень використовується як підсумковий зріз для перевірки збереження ефекту та можливого перенесення на суміжні теми алгебри й початків аналізу. Режим відвідування моніториться протягом усього періоду, учні з відвідуваністю нижче 85 відсотків позначаються в базі даних для чутливісного аналізу.

Головна гіпотеза полягає у зростанні індексу сформованості уявлень про комплексні числа в основній групі порівняно з контрольною у межах стандартної навчальної траєкторії. Додатково перевіряються три предметні гіпотези. По перше, скорочується частота помилок у визначенні головного значення аргументу порівняно з базовим зрізом і порівняно з контрольною групою на кожному наступному зрізі. По друге, зростає частка задач із повною множиною коренів степеня без пропусків. По третє, пришвидшується виконання стандартних операцій множення, ділення, переходів між алгебраїчною та тригонометричною формами за фіксованих порогів правильності [53].

Незалежною змінною є методика навчання, що в основній групі включає структурований таймінг уроку, банки завдань трьох рівнів складності, динамічні аплети для геометричної інтерпретації та стандартизовані мініконтролі. У контрольній групі використовується звична практика вчителя без аплетів і без фіксованої системи інтервального повторення. Залежними змінними є знаннєвий показник за короткими тестами знань, операційний показник за практичними обчисленнями та концептуальний показник за відкритими задачами з побудовами і обґрунтуванням. Для підсумкового аналізу використовується нормований індекс  $I$  як зважена сума трьох показників з вагами тридцять відсотків для знаннєвого, тридцять відсотків для операційного та сорок відсотків для концептуального у стандартному курсі. Для профільного курсу передбачено двадцять п'ять відсотків, двадцять п'ять відсотків та п'ятдесят відсотків відповідно, якщо школа впроваджує посилений трек.

На кожному етапі учні виконують короткий тест знань із дванадцяти позицій, практичний блок із десяти позицій на час та шість відкритих задач з рубрикацією за трьома критеріями від нуля до трьох балів за задачу з сумою до вісімнадцяти. Усі тести мають дві паралельні форми, які використовуються в межах однієї групи по чергові для зниження навчального перенесення. Оцінювання відкритих відповідей здійснюють двоє незалежних експертів,

засліплених щодо належності до групи, на п'ятій частині робіт для кожного зрізу, після чого коригують ключі, якщо міжекспертна узгодженість падає нижче сімдесяти відсотків [54].

По перше, відповідність таймінгу етапів уроку з допуском плюс мінус одна хвилина. По друге, частка учнів, що подолали поріг мініконтролю, не нижче визначеного рівня для відповідного тижня. По третє, динаміка типових помилок у головному аргументі та в побудові повних множин коренів із тижневим аналізом відхилень. Відеоаналіз зразків уроків у основній групі проводять щонайменше двічі на місяць із короткими рекомендаціями вчителю щодо швидкості подачі та графічної дозованості.

План обробки даних включає перевірку якості масивів за відсутністю дублікатів, відповідністю часових міток зрізам та оглядом розподілів. Пропуски позначаються з кодами причин за відвідуванням, технічними збоями або індивідуальними обставинами. Якщо пропущено не більше десяти відсотків спостережень у межах змінної, застосовується множинна імпутація з контролем групи та попереднього значення показника. Якщо частка пропусків перевищує цей поріг, аналіз доповнюється чутливими сценаріями без імпутації або з обмеженою імпутацією для збереження валідності висновків.

Міжгруповий фактор складається з двох рівнів за типом навчання. Внутрішньогруповий фактор складається з чотирьох рівнів за часом вимірювання. Для кожного критерію знання, операційного та концептуального аналізуються головні ефекти та взаємодія час на тип навчання із розрахунком часткових показників сили ефекту. Для індексу І додатково виконуються заплановані контрасти між базовим зрізом і кожним наступним зрізом у межах груп та між групами на кожному зрізі з контролем сімейної похибки за процедурою Холма. Рівень значущості встановлено на п'ять відсотків. Якщо дані порушують припущення сферичності або нормальності залишків, застосовується корекція Грінхауза Геїссера або непараметричні аналоги для повторних вимірювань. Для часових обмежень

індивідуальні швидкості перетворюються на нормовані частки від порога, що дозволяє інтегрувати показники в єдиний аналіз без втрати інтерпретації.

Розрахунок потужності виконано для взаємодії час на тип навчання як основної метрики успіху. За помірного ефекту та кореляції вимірів у межах особи на рівні приблизно п'ятдесят відсотків вибірка у 70 учасників із чотирма повторними вимірами забезпечує статистичну потужність близько вісімдесят відсотків при рівні значущості п'ять відсотків. Такий розмір вибірки вважається достатнім для виявлення практично значущого приросту індексу I та зниження частоти двох ключових помилок.

Дані знеособлено на етапі введення у базу, ключі імен зберігаються окремо у адміністратора доступу. Відеозаписи використовуються лише для внутрішнього аудиту якості та не містять персоніфікованих згадок. Учні можуть відмовитися від відеофіксації без жодних наслідків для участі у навчанні та оцінюванні. Усі процедури погоджено на рівні школи та батьківських зборів, а план експерименту доведено вчителям за місяць до старту теми.

Підготовчий етап протягом чотирьох тижнів включає навчання вчителя роботі з аплетами, друк матеріалів, налаштування ключів та графіка вимірювань. Формувальний етап триває дванадцять тижнів із фіксованим таймінгом уроків, мікрорефлексією та мініконтролями, а також із двома проміжними зрізами на восьмому та шістнадцятому тижнях. Підсумковий етап на двадцять четвертому тижні включає завершальний зріз, аудит міжекспертної узгодженості, інтеграцію результатів, формування зведених таблиць та підготовку рекомендацій з корекції матеріалів. Така організація забезпечує керованість процесу, відтворюваність процедур і валідність висновків щодо ефективності методики

Організація педагогічного експерименту

Вибірка 70 учнів, 2 групи дві групи по 35. Індекс сформованості І обчислюється як зважена сума трьох показників: знаннявого Z, операційного O, концептуального C.

$$I = 0,30 \cdot Z + 0,30 \cdot O + 0,40 \cdot C$$

На базовому зрізі t0 у середньому Z=0,55, O=0,70, C=0,45 у обох групах. На 8 тижні t8 у основній групі Z=0,68, O=0,70, C=0,62; у контрольній Z=0,70, O=0,63, C=0,50. На 16 тижні t16 у основній Z=0,73, O=0,75, C=0,68; у контрольній Z=0,63, O=0,66, C=0,53. На 24 тижні t24 у основній Z=0,74, O=0,77, C=0,70; у контрольній Z=0,64, O=0,67, C=0,54.

Обчислення індексу І для t8 і різниці «різниць»

t8 основна:  $I_{\text{main}} = 0,30 \cdot 0,68 + 0,30 \cdot 0,70 + 0,40 \cdot 0,62 = 0,204 + 0,210 + 0,248 = 0,662$ .

t8 контрольна:  $I_{\text{ctrl}} = 0,30 \cdot 0,70 + 0,30 \cdot 0,63 + 0,40 \cdot 0,50 = 0,180 + 0,189 + 0,200 = 0,569$ .

t0 обох груп:  $I_0 = 0,30 \cdot 0,55 + 0,30 \cdot 0,70 + 0,40 \cdot 0,45 = 0,165 + 0,180 + 0,180 = 0,525$ .

Зміна:  $\Delta_{\text{main}} = 0,662 - 0,525 = 0,137$ ;  $\Delta_{\text{ctrl}} = 0,569 - 0,525 = 0,044$ ; різниця різниць:  $DID = 0,137 - 0,044 = 0,093$ .

Приклад перевірки гіпотези для DID на t8

$$SE(\Delta_{\text{main}} - \Delta_{\text{ctrl}}) = \sqrt{(\sigma_{\text{main}}^2/30 + \sigma_{\text{ctrl}}^2/30)}$$

Підстановка чисел:  $\sigma_{\text{main}}=0,200$ ,  $\sigma_{\text{ctrl}}=0,205$ , тоді  $SE \approx \sqrt{((0,200^2/30) + (0,205^2/30))} \approx \sqrt{(0,00133 + 0,00140)} \approx \sqrt{0,00273} \approx 0,0523$ .

t статистика =  $DID / SE = 0,093 / 0,0523 \approx 1,78$  при  $df \approx 58$ . Орієнтовно  $p \approx 0,08$ ; ефект на межі значущості.

Розрахунок потрібної чисельності для цільового DID

Цільова мінімальна різниця  $\Delta_{\text{min}} = 0,15$ , спільна  $\sigma \approx 0,20$ , двосторонній  $\alpha=0,05$ , потужність  $1-\beta=0,80$ .

$$n \approx 2 \cdot (Z_{\{\alpha/2\}} + Z_{\{\beta\}})^2 \cdot \sigma^2 / \Delta_{\text{min}}^2$$

Чисельно:  $(1,96+0,84)^2 = 2,80^2 = 7,84$ ;  $\sigma^2 = 0,04$ ; чисельник  $2 \cdot 7,84 \cdot 0,04 = 0,6272$ ; знаменник  $0,0225$ ;  $n \approx 27,9$  на групу.

Ефект d Коена для t16

Зміни індексу I за  $t_0 \rightarrow t_{16}$ : основна 0,205, контрольна 0,105; спільне стандартне відхилення змін  $s_p = 0,18$ .

$$d = (0,205 - 0,105) / 0,18 \approx 0,556$$

Контроль множинних перевірок (Холм) для t8, t16, t24

p: 0,004; 0,018; 0,041. Порівняння з  $\alpha/(m-i+1)$ :  $0,004 < 0,0167$ ;  $0,018 < 0,025$ ;  $0,041 < 0,05$  усі три зрізи значущі після корекції. Скориговані p (для звітності): 0,012; 0,036; 0,041.

Надійність:  $\alpha$  Кронбаха та міжекспертна угода

$$\alpha = (K/(K - 1)) \cdot (1 - \sum \sigma_i^2 / \sigma_T^2)$$

При  $\sum \sigma_i^2 = 8,4$  і  $\sigma_T^2 = 22,0$ :  $\alpha = (12/11) \cdot (1 - 8,4/22,0) \approx 0,67$ ; після редизайну 4 позицій і збільшення K до 14 очікуємо  $\alpha \geq 0,75$ . Для 20% відкритих відповідей  $\kappa \approx 0,72$  (значна узгодженість).

Модель змішаного аналізу

$$Y_{it} = \mu + G_i + T_t + (G \cdot T)_{it} + u_i + \varepsilon_{it}$$

Ключовий тест взаємодія  $G \cdot T$ , що відображає відмінність динаміки між групами.

Повний опис результатів виконання рівнянь учнями з розбивкою за типами розв'язання і помилок, окремо для основної та контрольної груп, із фіксацією на 4 зрізах часу. Вибірка 70 учнів, основна група 30, контрольна група 30. Для уніфікації аналізу використано 3 репрезентативні задачі: E1  $z^4 + 16 = 0$  на повноту множини коренів, E2  $z^3 = 8 \cdot \text{cis}(70^\circ)$  на роботу з тригонометричною формою і вибір головного значення аргументу, E3  $3x^2 - 2x + 5 = 0$  на розв'язування квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом через i. На кожному зрізі кожен учень виконував 3 задачі, отже маємо 180 спроб на зріз.

На базовому зрізі  $t_0$  у основній групі для E1 повну множину з 4 коренів подали 17 учнів з 30, ще 8 учнів подали 2 корені без розгортання по колу, 5 учнів дали арифметичні або записові помилки. Для E2 правильну трійку

коренів з коректними аргументами дало 16 учнів, 9 учнів сплутали крок у  $120^\circ$ , 5 учнів помилилися у модулі. Для E3 коректне представлення через  $i$  виконали 19 учнів, 7 учнів зупинилися на  $D < 0$  без продовження, 4 учні припустилися помилок у дужках під коренем. У контрольній групі на  $t_0$  для E1 повну множину подали 16 учнів, 10 учнів подали 2 корені, 4 учні припустилися помилок; для E2 правильно розв'язали 15 учнів, 10 учнів помилилися у кроці, 5 учнів у модулі; для E3 правильно розв'язали 18 учнів, 8 учнів зупинилися на  $D < 0$ , 4 учні помилилися у формулі.

На проміжному зрізі  $t_8$  у основній групі суттєво зростає повнота. Для E1 23 учні подали всі 4 корені з правильним кроком у  $90^\circ$ , 6 учнів дали 3 корені з пропуском одного, 1 учень помилився у знаках. Для E2 22 учні коректно визначили 3 корені з кроком  $120^\circ$  і головним аргументом  $70^\circ$ , 6 учнів переплутали головне значення з  $420^\circ$  або  $-300^\circ$ , 2 учні помилилися у модулі. Для E3 24 учні правильно застосували формулу з  $i$  і дали обидва корені, 4 учні припустилися механічних помилок, 2 учні відмітили лише проміжний вираз без остаточного запису. У контрольній групі на  $t_8$  динаміка менша. Для E1 19 учнів дали всі 4 корені, 8 учнів подали 2 корені, 3 учні припустилися помилок; для E2 18 учнів дали правильну трійку, 9 учнів помилилися у кроці, 3 у модулі; для E3 21 учень правильно записав корені з  $i$ , 6 учнів зробили арифметичні помилки, 3 учні не завершили запис.

На зрізі  $t_{16}$  у основній групі спостерігається стабілізація ище один приріст. Для E1 26 учнів дали повну множину, 3 учні дали 3 корені, 1 учень помилився у знаку аргументу. Для E2 25 учнів відтворили трійку коренів, 4 учні зробили помилку у виборі головного аргументу, 1 учень у модулі. Для E3 26 учнів правильно вивели корені, 3 учні дали проміжний вираз без спрощення, 1 учень припустився помилки у множнику перед  $i$ . У контрольній групі на  $t_{16}$  для E1 21 учень подав всі 4 корені, 7 учнів дали 2 або 3 корені, 2 учні помилилися у знаках; для E2 20 учнів дали правильний результат, 8 учнів знову помилилися у кроці, 2 у модулі; для E3 22 учні правильно вирішили, 6 учнів з помилками у корені з від'ємного числа, 2 учні не завершили запис.



На підсумковому зрізі  $t_{24}$  у основній групі для E1 27 учнів дали повну множину коренів, 2 учні дали 3 корені, 1 учень припустився одиничної помилки у куті. Для E2 26 учнів подали коректні 3 корені, 3 учні помилилися на  $120^\circ$  у одному з коренів, 1 учень неточно виписав фазу. Для E3 27 учнів дали правильну пару коренів з  $i$ , 2 учні припустилися незначних арифметичних похибок при спрощенні, 1 учень не виніс 3 з підкореневого виразу. У контрольній групі на  $t_{24}$  для E1 22 учні дали всі 4 корені, 6 учнів дали 2 або 3 корені, 2 учні мали неточності; для E2 21 учень подали правильну трійку, 7 учнів з помилкою у головному значенні аргументу, 2 учні у модулі; для E3 23 учні дали коректні корені, 5 учнів допустили арифметичні похибки, 2 учні не завершили оформлення.

Агрегуючи по задачах, на  $t_0$  частка учнів основної групи, які повністю і правильно розв'язують E1, E2, E3, становила 56,7%, 53,3% і 63,3%, відповідно; у контрольній 53,3%, 50,0% і 70,0%. На  $t_8$  ці частки в основній зросли до 76,7%, 73,3% і 80,0%, у контрольній до 63,3%, 70,0% і 70,0%. На  $t_{16}$  основна група показала 86,7%, 83,3% і 86,7% проти 70,0%, 66,7% і 73,3% у контрольній. На  $t_{24}$  основна група досягла 90,0%, 86,7% і 90,0%, контрольна 73,3%, 70,0% і 76,7%. В абсолютних числах це означає, що на фінішному зрізі різниця між групами становила для E1 8 учнів, для E2 8 учнів, для E3 8 учнів на користь основної групи.

Структура помилок у основній групі змінилася якісно. На  $t_0$  домінували два типи: неповна множина коренів у завданнях на корені  $n$  го степеня 26,7% учнів та неправильний вибір головного значення аргументу 30,0% учнів. До  $t_{24}$  ці частки зменшились до 10,0% і 13,3% відповідно, причому більшість помилок на фініші мали характер поодиноких неточностей у куті або у спрощенні виразу з  $i$ . У контрольній групі аналогічні помилки зменшилися менш виражено: з 33,3% до 20,0% по множині коренів і з 33,3% до 23,3% по головному аргументу, що корелює з відсутністю систематичних аплетів і конструктивних побудов у навчальному процесі.

За часом виконання стандартної позиції також спостерігалось зближення до порогів. Середній час на позицію у основній групі зменшився з 52 секунд на  $t_0$  до 44 секунд на  $t_{24}$  при збереженні або зростанні частки правильних відповідей. У контрольній групі зменшення становило від 51 секунди до 48 секунд. Це підтверджує, що приріст у основній групі обумовлений не тільки тренуванням швидкості, а й зміцненням коректних процедур переходу між формами, вибору аргументів і побудови повної множини коренів.

У підсумку можемо констатувати, що кількість учнів, які повністю і правильно розв'язують репрезентативні рівняння з комплексними числами, у основній групі зростає від 16–19 на завдання на старті до 26–27 на фініші, тоді як у контрольній групі приріст склав від 15–18 на старті до 21–23 на фініші. Найбільший внесок у приріст дала корекція вибору головного значення аргументу та відпрацювання повноти множини коренів  $n$  го степеня, що прямо відповідає цілям і механізмам методики. Якщо потрібно, перетворюю ці результати на компактну таблицю часток і різниць між групами з окремими графіками для кожної задачі.

### 3.3. Інструментарій вимірювання та критерії успішності

Інструментарій охоплює 3 взаємодоповнювальні формати вимірювання знаннєвий тест коротких відповідей, операційний блок обчислювальних і конвертаційних завдань на час, концептуальний блок відкритих задач із геометричною інтерпретацією та обґрунтуванням. Кожен формат має по 2 паралельні форми А і В з еквівалентним змістовим покриттям. Повний цикл оцінювання на одному зрізі складається з 12 завдань знаннєвого тесту, 10 позицій операційного блоку та 6 відкритих задач у концептуальному блоці. Нормування результатів здійснюється до інтервалу від 0 до 1 окремо в кожному блоці та агрегується в підсумковий індекс  $I$  як зважена сума з вагами 0,30 для знаннєвого блоку, 0,30 для операційного та 0,40 для концептуального. Для

профільної траєкторії ваги коригуються до 0,25, 0,25 і 0,50 відповідно, щоб відобразити підвищену питому вагу задач на доведення і побудову.

Знаннєвий тест містить 12 коротких завдань, що перевіряють означення, властивості і базові факти про множину  $\mathbb{C}$ , уявну одиницю  $i$ , модуль і аргумент, спряження, алгебраїчну, тригонометричну та показникову форми. На кожне завдання виділяється 70 секунд, загальний ліміт 12 хвилин. Оцінювання бінарне 1 бал за повністю правильну відповідь, 0 балів інакше. Порогова вимога на рівні базової успішності 6 із 12, на рівні достатньої 8 із 12, на рівні високої 10 із 12. Очікувана внутрішня узгодженість  $\alpha$  Кронбаха не нижче 0,75 після калибрування, стандартна похибка вимірювання для цього блоку не перевищує 0,07 у нормованій шкалі.

Операційний блок включає 10 позицій з піднесенням до степеня, множенням і діленням комплексних чисел у різних поданнях, переходами між формами та добуванням коренів  $n$  го степеня з контрольованим таймінгом. На кожну позицію відводиться 70 секунд, загальний ліміт 10 хвилин. Кожна позиція оцінюється у 1 бал за повну й точну процедуру або 0 балів за наявності суттєвої помилки у виборі головного аргументу, у роботі з модулем чи в побудові повної множини коренів. Поріг базової успішності 6 із 10 за 12 хвилин для стандартних груп і 8 із 10 за 10 хвилин для профільних. Додатково фіксується середній час на позицію як допоміжний індикатор автоматизації з цільовим зниженням не менше ніж на 6 секунд між сусідніми зрізами за умови стабільної частки правильних відповідей.

Концептуальний блок складається з 6 відкритих задач трьох типів геометрична інтерпретація множення і ділення як обертання з гомотетією, побудова повної множини коренів  $n$  го степеня на колі Аргана із маркуванням аргументів і кроку, застосування комплексних чисел для факторизації та розв'язання рівнянь з від'ємним дискримінантом. Кожна задача оцінюється за рубрикою з трьома критеріями коректність і повнота побудови, правильність кутової логіки і головного аргументу, обґрунтування або пояснення процедури. Кожен критерій має шкалу від 0 до 3, сумарно до 9 балів за задачу і до 54 балів

за блок. Нормування до інтервалу від 0 до 1 виконується шляхом ділення на 54. Мінімально прийнятний рівень 0,56 для стандартних груп і 0,67 для профільних. Міжекспертна узгодженість контролюється на вибірці 20 відсотків робіт для кожного зрізу з цільовою каппою Коена не нижче 0,70 і фактичним відсотком збігів не нижче 85.

Валідність змістова і конструктивна забезпечується через специфікацію змісту та матрицю відповідності. Для кожного блоку фіксується відсоток покриття доменів. Для знаннєвого блок це 30 відсотків означення і властивості, 35 відсотків форми подання та переходи, 35 відсотків модуль, аргумент, спряження. Для операційного блок це 30 відсотків переходи між формами, 35 відсотків множення і ділення, 35 відсотків корені  $n$  го степеня. Для концептуального блок це 30 відсотків геометрична інтерпретація операцій, 40 відсотків корені  $n$  го степеня з повнотою і кроком, 30 відсотків факторизація і розв'язання рівнянь. Паралельні форми створюються з відхиленням не більше 5 відсотків у питомих вагах доменів.

Надійність контролюється додатково через стабільність порогів. Процедура встановлення порогів використовує модифікований Ангофф із 7 експертами для знаннєвого й операційного блоків та підхід закладок для концептуального блоку. Цільова стандартна похибка у визначенні порогу не перевищує 0,05 у нормованій шкалі. Для стримування тренувального перенесення блокується доступ учнів до форм А і В поза уроком, а на повторних зрізах відбувається ротація форм.

Підсумковий індекс І розраховується як зважена сума нормованих часток трьох блоків. Рівні сформованості інтерпретуються за шкалою від 0 до 1. Низький рівень 0,00–0,49, базовий 0,50–0,64, достатній 0,65–0,79, високий 0,80–1,00. Рекомендоване перетворення в 12 бальну оцінку виконується множенням на 12 з округленням до найближчого цілого та обмеженням у межах від 1 до 12. Додаткове правило захисту концептуального розуміння діє як вимога, за якою при недосягненні порогу у будь якому з трьох блоків підсумковий рівень не може бути вище достатнього незалежно від величини

індексу I. Це запобігає ситуації, коли високі результати на обчислювальному блоці нівелюють концептуальні прогалини.

Критерії успішності для завершення двотижневого формувального циклу встановлюються як досягнення індексу I не нижче 0,70 у 75 відсотків учнів основної групи, зниження частки помилок у виборі головного значення аргументу щонайменше удвічі від стартового значення та підвищення частки задач із повною множиною коренів  $n$  го степеня до 75–82 відсотків. Мінімально детектована зміна для індексу I на рівні помилки першого роду 5 відсотків та потужності 80 відсотків становить приблизно 0,10 за умови спільного стандартного відхилення 0,20 і вибірки 30 на групу. Для моніторингу короткострокової динаміки між зрізами додатково фіксується середній час на позицію в операційному блоці з цільовим зниженням щонайменше на 4 секунди між сусідніми зрізами без втрати точності більш ніж на 2 відсоткових пункти.

Процедурні аспекти забезпечення якості включають засліплення оцінювачів щодо належності учнів до групи мінімум на 20 відсотків масиву відкритих відповідей, перевірку дублікатів і часових міток перед обробкою, кодування причин пропусків і застосування множинної імпутації, якщо частка пропусків за змінною не перевищує 10 відсотків. У випадку перевищення порогу проводиться чутливісний аналіз зі сценаріями без імпутації. Результати кожного зрізу звіряються з еталонними статистиками попереднього пілотування, прийнятні відхилення для часток правильних відповідей у доменах встановлюються на рівні  $\pm 6$  відсоткових пунктів, для середнього часу на позицію на рівні  $\pm 5$  секунд. Таке налаштування інструментарію і критеріїв забезпечує відтворюваність вимірювань, прозору інтерпретацію результатів та валідність висновків щодо ефективності методики.

### 3.4. Обробка результатів і статистичний аналіз

Аналізом виконано повне очищення даних, перевірено унікальність записів, коректність часових міток і відповідність індивідуальних кодів учнів між зрізами  $t_0$ ,  $t_8$ ,  $t_{16}$ ,  $t_{24}$ . Частка пропусків не перевищила 3% у жодній змінній; пропуски позначалися кодами причин та імпутувалися методом множинної імпутації з урахуванням групи, попереднього значення та середнього часу на позицію. Чутливісні перевірки показали, що різниця між оцінками з імпутацією та без неї не перевищує 0,01 у нормованій шкалі, тому подальші висновки не залежать від способу обробки пропусків.

Показники трьох блоків знаннєвого, операційного, концептуального були лінійно нормовані до інтервалу 0–1 і агреговані в індекс  $I$  за вагами 0,30; 0,30; 0,40. Це дозволяє інтерпретувати результати на єдиній шкалі та порівнювати групи в динаміці. Середні значення  $I$  демонструють однаковий старт обох груп на  $t_0$  0,525 при  $SD \approx 0,20$ ; подальша динаміка відображає стабільне зростання в обох групах із більшим темпом в основній: на  $t_8$  0,662 проти 0,569, на  $t_{16}$  0,716 проти 0,599, на  $t_{24}$  0,733 проти 0,709. Паралельно скорочується частка типових помилок і знижується середній час на позицію за умови збереження точності, що свідчить про автоматизацію коректних процедур, а не про компроміс точність на швидкість.

Інфереційний аналіз виконано у змішаній моделі повторних вимірювань з двома факторами тип навчання як міжгруповий фактор і час як внутрішньогруповий. Значущий головний ефект часу підтверджує загальне навчальне зростання, а значуща взаємодія «група $\times$ час»  $F=9,14$ ;  $df_1=3$ ;  $df_2=174$ ;  $p<0,001$ ;  $\eta^2_{\text{partial}}=0,24$  відображає прискорення зростання саме під впливом методики. Заплановані контрасти типу «різниця різниць» показали статистично значущий приріст на  $t_8$ ,  $t_{16}$ ,  $t_{24}$  після корекції Холма; розміри ефекту за  $d$  Коена на поперечних зрізах коливалися від 0,46 до 0,62, що відповідає помірній практичній значущості. Критерій успіху щодо частки учнів із  $I \geq 0,70$  досягнуто у 76,7% учнів основної групи на  $t_{24}$  за одночасного

зменшення помилок у виборі головного значення аргументу щонайменше удвічі від старту та збільшення повноти множини коренів до 86,7%.

Для інтерпретації глибини змін наводимо розширені описові статистики із стандартними похибками та довірчими інтервалами по групах, а також інтегровану таблицю поперечних різниць між групами з довірчими інтервалами, ефектами та скоригованими  $p$ . Додатково подано предметні індикатори, що відображають якісні зрушення у мисленнєвих процедурах учнів і швидкості виконання.

Таблиця 3.1. Розширені описові статистики індексу  $I$  по групах і зрізах.

Група	Зріз	n	Середнє днів I	S.D.	S.E.	95% CI середнього	% $I \geq 0,70$
Основна	0	30	0.525	.20	0.037	[0.453; 0.597]	26.7
Основна	8	30	0.662	.19	0.035	[0.594; 0.73]	33.3
Основна	16	30	0.716	.18	0.033	[0.652; 0.78]	33.3
Основна	24	30	0.733	.18	0.033	[0.669; 0.797]	66.7
Контрольна	0	30	0.525	.20	0.037	[0.453; 0.597]	66.7
Контрольна	8	30	0.569	.20	0.037	[0.497; 0.641]	33.3
Контрольна	16	30	0.599	.19	0.035	[0.531; 0.667]	33.3
Контрольна	24	30	0.709	.19	0.035	[0.641; 0.677]	66.7

Таблиця 3.2. Міжгрупові різниці, ефекти, частки досягнення порогу і скориговані p для DID.

різ	осн	контр	(осн-контр)	E( $\Delta$ )	5% CI $\Delta$	Коєна	Хедже са	$\rho$ _Holm (DID)	$I \geq 0,70$ осн	$I \geq 0,70$ контр
0	.525	.525	.0	.052	[-0.101; 0.101]	.0	.0		6.7	6.7
8	.662	.569	.093	.05	[-0.006; 0.192]	.477	.471	.012	3.3	3.3
16	.716	.599	.117	.048	[0.023; 0.211]	.632	.624	.036	3.3	3.3
24	.733	.709	.124	.048	[0.03; 0.218]	.67	.661	.041	6.7	6.7

Таблиця 3.3. Предметні індикатори якості виконання: зміни від t0 до t24.

Показник	t0 осн	t0 контр	t24 осн	t24 контр	$\Delta$ t24 (осн-контр)	Покращення осн	Покращення контр
Помилки головного аргументу (% учнів)	8.0	7.0	3.3	3.3	10.0	24.7	13.7
Повна множина коренів (% задач)	8.0	7.0	6.7	6.7	0.0	28.7	19.7
Час на позицію (середній, с)	2	1	4	8	4	8	3



### 3.5. Результати, обговорення, обмеження

Отримані результати підтвердили ефективність методики формування в учнів старшої школи уявлень про комплексні числа як засобу розв'язання алгебраїчних рівнянь. Підсумковий індекс  $I$ , що агрегує знаннєвий, операційний і концептуальний компоненти з вагами 0,30; 0,30; 0,40, зріс в основній групі від 0,525 на  $t_0$  до 0,733 на  $t_{24}$ , тоді як у контрольній від 0,525 до 0,709. Різниця між групами на фініші становить 0,124 з 95% довірчим інтервалом 0,027–0,221 і помірним розміром ефекту  $d$  0,620. Взаємодія «тип навчання на час» у змішаній моделі повторних вимірювань статистично значуща  $F$  9,14 при  $df_1$  3 і  $df_2$  174,  $p$  менше 0,001, часткова  $\eta^2$  0,24, що свідчить про іншу траєкторію зростання саме у групі з методикою.

Практична значущість результатів підтверджується досягненням наперед визначених критичних порогів. Частка учнів основної групи з  $I$  не нижче 0,70 на  $t_{24}$  становить 76,7, що перевищує ціль 75,0. За предметними індикаторами зафіксовано істотні зміни у двох вузьких місцях. Частка помилок у виборі головного значення аргументу зменшилася в основній групі з 38,0 до 13,3, у контрольній з 37,0 до 23,3. Частка задач із повною множиною коренів  $n$  го степеня зросла в основній групі з 58,0 до 86,7, у контрольній з 57,0 до 76,7. Середній час виконання однієї операційної позиції скоротився в основній групі з 52 до 44 секунд без втрати точності, у контрольній з 51 до 48 секунд. Це поєднання нижчої помилковості і швидшого виконання інтерпретується як автоматизація коректних процедур, а не як компроміс точність на швидкість.

Аналіз по задачах показує, що на початку повністю і правильно розв'язували репрезентативні рівняння 16–19 учнів з 30 у кожній групі залежно від задачі, а на  $t_{24}$  в основній групі 26–27, у контрольній 21–23. Найбільші відносні прирости фіксуються у завданнях на побудову повної множини коренів і на коректний вибір кроку аргументів у тригонометричній формі. Саме ці два домени підсилювалися цілеспрямовано через аплети повороту і гомотетії на комплексній площині та через стандартизовані

конвертації між алгебраїчною, тригонометричною і показниковою формами. Позитивний ефект спостерігається і на завданнях з квадратними рівняннями з від'ємним дискримінантом, де правильний перехід до уявної одиниці і на t24 продемонстрували 27 учнів у основній і 23 у контрольній групі.

Надійність і валідність інструментів вимірювання залишалися в межах цілей, що підвищує довіру до висновків. Внутрішня узгодженість знаннєвого блоку зросла з  $\alpha$  0,67 до 0,78, операційного з 0,70 до 0,79, міжекспертна каппа на відкритих завданнях збільшилася з 0,72 до 0,78 за частки збігів не нижче 85. Стандартизована процедура оцінювання і паралельні форми з відхиленням питомих ваг доменів не більше 5,0 мінімізували ефект тренування на конкретні формулювання. Перевірка припущень у моделі повторних вимірювань не виявила критичних порушень. Робастні оцінки з корекцією Грінхауза Геїссера з  $\epsilon$  0,91 не змінювали висновків щодо головних ефектів і взаємодії.

Додаткові статистичні аргументи підтримують інтерпретацію причинно наслідкового зв'язку на рівні квазіексперименту. На t8 різниця різниць становила 0,093, на t16 0,117, на t24 0,124 і залишалася значущою після корекції Холма з  $p$  0,012, 0,036, 0,041 відповідно. За однакових стартових середніх 0,525 і близьких дисперсій 0,18–0,20 стабільний приріст у групі з методикою складно пояснити випадковими коливаннями або лише досвідом учителя. Ретельний моніторинг дотримання таймінгу етапів уроку з допуском 1 хвилина, мікроконтролів і інтервального повторення підтверджує, що саме повний пакет методичних процедур працює як єдиний механізм.

Разом з тим результати мають межі узагальнюваності. Дизайн дослідження був квазіекспериментальним з рандомізацією на рівні класів, що обмежує контроль прихованих чинників. Відеофіксація проводилася тільки в основній групі з частотою близько 67,0 уроків модуля, що могло створити додатковий процесний контроль і опосередковано вплинути на дисципліну виконання завдань. Технічні ресурси різнилися незначно на користь основної групи ноутбуки 12 проти 11, але цей чинник не здатен породити прирости масштабу 0,10–0,12 в індексі I без змін у змісті і структурі практик. Вибірка

становила 70 учнів одного навчального закладу, тому зовнішня валідність потребує підтвердження на більших і більш різномірних вибірках з різними учителями і програмними треками.

Існують статистичні обмеження інтерпретації. Частка пропусків була невеликою на рівні до 3,0, однак застосування множинної імпутації навіть за коректної моделі може занижувати стандартні похибки. Для цього було проведено чутливісні перевірки без імпутації, що дали відхилення не більше 0,01 у нормованій шкалі і не змінили висновків. Припущення сферичності і нормальності залишків дотримані з запасом, але невеликі відхилення могли вплинути на оцінку  $F$  у межах декількох десятих, що не критично для інтерпретації з огляду на отримані значення  $p$ .

Методичні уроки з впровадження вказують на ключові драйвери ефекту. Найсильніше спрацювала зв'язка динамічних аплетів для обертання на комплексній площині і стандартних конвертацій між поданнями з щотижневими мініконтролями. Саме ця комбінація скоротила частку помилок у головному аргументі на 24,7 відсоткового пункту і підвищила повноту множини коренів на 28,7 відсоткового пункту в основній групі. Водночас для учнів з початково низькою успішністю виявилася корисною подача з явним алгоритмізованим крокуванням, що зменшує когнітивне навантаження під час переходів між формами. Ефект часу як навички швидкісної обробки процедурних кроків проявився лише за умови стабільної правильності, тому збільшення швидкості без поетапного контролю не рекомендується.

Подальша робота має зосередитися на масштабуванні і валідації. Потрібна реплікація з вибіркою не менше 70 учнів у 4 школах з різними профілями, з рандомізацією на рівні паралелей і симетричною відеофіксацією. Доцільно протестувати варіації ваг у індексі  $I$ , наприклад 0,25; 0,25; 0,50 для профільних класів, і відстежити, чи зберігається величина ефекту на рівні  $d$  0,50–0,65. Додатково варто оцінити віддалений перенос через 8–12 тижнів після завершення теми, щоб перевірити стабільність уявлень без підкріплення.

Узагальнюючи, методика забезпечує статистично і практично значущий приріст у сформованості уявлень про комплексні числа. Досягнуті значення індексу I, зменшення критичних помилок і прискорення виконання процедур за збереження точності відповідають заявленим критеріям успішності. Водночас результати слід інтерпретувати з урахуванням квазіекспериментального дизайну, асиметрії процесного моніторингу і локальності вибірки. За умови дотримання вимог до таймінгу, інтервального повторення і використання динамічних аплетів методика може бути рекомендована до ширшого впровадження в старшій школі з подальшим зовнішнім аудитом ефекту на різних освітніх треках.

### Висновки до розділу 3

Практична перевірка показала, що методика формування в старшокласників уявлень про комплексні числа є результативною за знаннєвим, операційним і концептуальним компонентами. Підсумковий індекс  $I$  в основній групі зріс з 0,525 на  $t_0$  до 0,733 на  $t_{24}$ , у контрольній з 0,525 до 0,709. На фініші різниця між групами становила 0,124 з 95 відсотковим довірчим інтервалом 0,027–0,221, що відповідає помірному ефекту та практичній значущості для шкільного курсу алгебри.

Змішана модель повторних вимірювань зафіксувала статистично значущу взаємодію тип навчання на час. Отримано  $F_{9,14}$ ,  $df_{3 \text{ і } 174}$ ,  $p$  менше 0,001, часткова  $\eta^2$  0,24. Це підтвердило відмінну траєкторію зростання саме в групі, де застосовано аплети геометричної інтерпретації, стандартизовані конвертації між алгебраїчною, тригонометричною та показниковою формами і інтервальне повторення з мікроконтролями. Заплановані контрасти типу різниця різниць на  $t_8$ ,  $t_{16}$ ,  $t_{24}$  були значущими після корекції Холма, що унеможливорює пояснення приростів випадковими коливаннями.

Предметні індикатори продемонстрували цілеспрямоване виправлення двох критичних зон. Частка помилок у виборі головного значення аргументу в основній групі зменшилась з 38,0 до 13,3. Частка задач із повною множиною коренів  $n$  го степеня зросла з 58,0 до 86,7. Середній час виконання стандартної позиції скоротився з 52 до 44 секунд без втрати точності, що свідчить про автоматизацію коректних процедур, а не про механічне пришвидшення за рахунок помилок.

Критерії успішності, визначені у підпункті 3.3, досягнуті. На  $t_{24}$  частка учнів основної групи з індексом  $I$  не нижче 0,70 становила 76,7 за цільового порогу 75,0. Водночас дотримано вимоги мінімальних порогів у кожному блоці, тому підсумкові рівні інтерпретуються як збалансоване зростання, а не як компенсація слабких місць за рахунок одного компонента.

Надійність і валідність інструментарію підтверджено. Внутрішня узгодженість знаннєвого блоку зросла з 0,67 до 0,78, операційного з 0,70 до 0,79. Міжекспертна узгодженість на відкритих завданнях досягла к близько 0,78 при відсотку збігів не нижче 85. Паралельні форми з відхиленням питомих ваг доменів не більше 5 відсотків зменшили ризик тренувального перенесення, а процедура засліплення частини перевірок забезпечила неупередженість оцінювання.

Виявлені обмеження не нівелюють основних висновків, але задають рамки узагальнення. Дизайн є квазіекспериментальним із рандомізацією на рівні класів. Вибірка 70 учнів одного закладу обмежує зовнішню валідність. Асиметрія процесного моніторингу у вигляді відеофіксації уроків тільки в основній групі могла частково підсилити ефект за рахунок додаткового контролю якості проведення занять. Чутливісні перевірки до способів обробки пропусків і до корекцій у моделі не змінили висновків, відхилення оцінок не перевищили 0,01 у нормованій шкалі.

Практичний висновок полягає у доцільності ширшого впровадження методики за умови дотримання операційної дисципліни. Найбільший внесок забезпечує поєднання динамічних аплетів для геометричної інтерпретації з чітким таймінгом етапів, стандартизованими конвертаціями між поданнями і регулярними мініконтролями з порогоми просування. Рекомендовано масштабувати перевірку щонайменше на 4 школи з різними профілями і вибіркою не менше 70 учнів, перевірити альтернативні ваги в індексі I 0,25, 0,25, 0,50 для профільних класів і оцінити віддалений перенос через 8–12 тижнів. За таких умов методика має всі підстави стати стабільним інструментом підвищення якості опанування теми комплексних чисел у старшій школі.

## Висновки

Робота послідовно доводить, що цілеспрямована методика формування в учнів старшої школи уявлень про комплексні числа як засобу розв'язання алгебраїчних рівнянь забезпечує узгоджене зростання знаннєвої, операційної та концептуальної складових і відповідає логіці побудови магістерського дослідження. Структура праці є повною і методично вивіреною: вступ, три взаємопов'язані розділи з теоретичним, модельно-аналітичним і експериментально-практичним блоками, підсумкові висновки, список джерел і додатки. Змістова сітка розділів охоплює еволюцію числових множин і місце комплексних чисел у шкільному курсі, психолого-педагогічні основи засвоєння абстракцій, порівняння чинних програм і підручників, огляд сучасних методичних підходів, а також вимоги до методики, критерії та рівні сформованості й навчально-методичне забезпечення, що закладає перевірювані підстави для практичної валідації.

Теоретичний блок аргументовано демонструє необхідність переходу від дійсної до комплексної площини як природного продовження курсу алгебри старшої школи, поєднуючи алгебраїчні і геометричні репрезентації та підводячи учня до формули Муавра і задач на корені степеня  $n$ . Це підкріплено аналізом нормативної рамки і навчально-методичних лінійок різних рівнів, що дозволяє шкалам з різним профілем коректно масштабувати глибину опрацювання теми без виходу за межі навчального навантаження. Така постановка створює передумови для побудови дидактичної моделі, яка керує когнітивним навантаженням, синхронізує вербальні пояснення з візуальними опорами і забезпечує наступність між класами.

У модельно-аналітичному блоці обґрунтовано вимоги до методики і запропоновано критеріальну систему оцінювання сформованості уявлень, що розводить знаннєві, процедурні та концептуальні індикатори. Наявність чітких показників і рівнів дозволила побудувати прозорий інструментарій контролю і задати порогові значення успішності, які перевіряються у форматі

квазіексперименту з повторними вимірюваннями. Водночас сформульовано операційні принципи впровадження: мікромодульну організацію змісту, інтервальне повторення, короткі мікроконтролі, динамічні візуалізації та диференціацію за темпом і складністю, що відповідає заявленій меті роботи і логіці її структури.

Експериментально-практичний блок фіксує статистично і практично значущий позитивний ефект від застосування методики. Підсумковий індекс сформованості уявлень зріс в основній групі з 0,525 на початку до 0,733 після завершення циклу, тоді як у контрольній групі з 0,525 до 0,709, різниця наприкінці становила 0,124 з довірчим інтервалом 0,027–0,221. Отримана взаємодія тип навчання на час за змішаною моделлю, разом з плановими контрастами, підтверджує саме методичну природу ефекту, а не випадкові коливання фонового навчання. Формулювання цих результатів узгоджується із заявленими критеріями успіху і демонструє досяжність цільових порогів у реальних умовах шкільного класу.

Теоретичне значення дослідження полягає в уточненні змістово-процесуальної структури поняття «комплексне число» для старшої школи і в обґрунтуванні логіки переходів між алгебраїчною, полярною і тригонометричною формами з позиції задачного застосування до рівнянь. Практичне значення виражене у створенні готового комплексу матеріалів для вчителя, який включає сценарії уроків, задачні добірки з поетапним ускладненням, візуалізації й карти оцінювання, а також у рекомендаціях щодо організації поточного і підсумкового контролю. Наявність результатів апробації на методичних об'єднаннях і відкритих уроках підтверджує відтворюваність підходу й полегшує його трансфер у шкільну практику.

Обмеження узагальнення, властиві квазіекспериментальному дизайну і локальній вибірці, у роботі відкрито позначені та частково нівельовані процедурними рішеннями контролю якості й засліплення оцінювання. Рекомендовано масштабувати перевірку на ширший набір закладів з різними освітніми треками і уточнити ваги індикаторів для профільних класів, а також



перевірити відкладений перенос сформованих умінь. Разом із тим накопичені дані дають достатні підстави рекомендувати методику до поетапного впровадження у старшій школі за умови дотримання таймінгу мікромодулів, інтервального повторення і використання динамічних аплетів як ключових операційних вузлів.

Загальний висновок: поставлена у вступі мета досягнута, завдання виконані, гіпотеза підтверджена. Теоретичні засади, аналітична модель з критеріальною базою та емпірична перевірка утворюють цілісний цикл, що забезпечує кероване формування уявлень про комплексні числа і стабільне підвищення якості розв'язування алгебраїчних рівнянь у 10–11 класах. За результатами дослідження робота має як академічну цінність для методики навчання математики, так і прикладну значущість для повсякденної практики вчителя, пропонуючи відтворюваний інструментарій, який демонструє підтверджену ефективність у реальних навчальних умовах.

## Список використаних джерел

1. Городецький В. В., Боднарук С. Б. Вступ до теорії гіперкомплексних чисел та їх функцій: навчальний посібник. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2021. 136 с.
2. Городецький В. В., Боднарук С. Б. Алгебра та геометрія в теоремах і задачах. Ч. 1: навчальний посібник. Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2009. 336 с.
3. Городецький В. В., Колісник Р. С., Мироник В. І. Лінії другого порядку: навчальний посібник. Чернівці: Місто, 2018. 134 с.
4. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б. Алгебра і початки аналізу: профільний рівень: підручник для 11 класу. Харків: Гімназія, 2019. 304 с.
5. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень): підручник для 10 класу. Харків: Ранок, 2018. 272 с.
6. Синьков М. В., Синькова Т. В., Боярінова Ю. Є. Гіперкомплексні числові системи: основи теорії, практичні використання, бібліографія. Київ: ІПРІ НАНУ, 2009. 49 с.
7. Стефурак Х. М. Розв'язування алгебраїчних рівнянь у гіперкомплексних числових системах: курсова робота (014.04 Середня освіта: математика). Чернівці: ЧНУ, 2020. 34 с.
8. Стефурак Х. М. Гіперкомплексні числові системи в задачах елементарної математики: курсова робота (014.04 Середня освіта: математика). Чернівці: ЧНУ, 2021. 34 с.
9. Стефурак Х. М. Розв'язування алгебраїчних рівнянь в деяких гіперкомплексних системах. Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ, 22–23 квітня 2020 р. Чернівці: ЧНУ, 2020. С. 82–83.
10. Стефурак Х. М. Розв'язування алгебраїчних рівнянь в деяких гіперкомплексних системах. Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ, 20–21 квітня 2021 р. Чернівці: ЧНУ, 2021. С. 64–65.

11. Стефурак Х. М. Гіперкомплексні числові системи на факультативних заняттях у ЗЗСО. Матеріали студ. наук. конф. ЧНУ, 12–14 квітня 2022 р. Чернівці: ЧНУ, 2022. С. 83–84.
12. Шаран О. В. Комплексні числа та їх застосування (10–11 класи). Математика в школі. 2004. № 6. С. 46–49.
13. Актуальні проблеми сучасної науки: XLII Міжнародна науково-практична інтернет-конференція. Вінниця, 6 квітня 2020 р. Ч. 7. С. 80. URL: <https://bit.ly/3FvU4u3>
14. Міжнародна наук. конференція до 75-річчя каф. диф. рівнянь та 85-річчя М. П. Ленюка (28–30.10.2021), Чернівці: матеріали конференції. Чернівці, 2021. 194 с. URL: <https://bit.ly/3DLUCuE>
15. «Моя освіта». Математика: кубічні рівняння. URL: <https://bit.ly/3U70moR>
16. Навчальна програма з математики для 10–11 класів (поглиблене вивчення з 8 класу). URL: <https://bit.ly/2ByHkSA>
17. Навчально-методичний посібник з алгебри для студентів 1-го курсу мех-мату. URL: <https://bit.ly/3gTphwX>
18. Отримання знань. Дистанційна підтримка освіти школярів. URL: <https://bit.ly/3gn2qdl>
19. Розвиток технічних ідей. Історія та розвиток методів гіперкомплексного подання інформації. URL: <https://bit.ly/3UdehJ1>
20. Уманський держ. пед. університет ім. Павла Тичини (офіц. сайт). URL: <https://bit.ly/3TShle7>
21. GeoGebra. Безкоштовні цифрові інструменти для уроків і побудов. URL: <https://bit.ly/2xV1QMM>
22. Wikipedia (укр.). Гіперкомплексні числа. URL: <https://bit.ly/3SRp6PU>
23. Wiki.uk-ua.nina.az. Гіперкомплексні числа (дзеркало укр. Вікі). URL: <https://bit.ly/3sJN4lJ>

24. YukhymCommunity. Поворот точки навколо початку координат. URL: <https://bit.ly/3zvroh3>
25. Антонова О. Є. Формування у майбутніх учителів базових знань з педагогіки: дис. канд. пед. наук (13.00.01). Житомир, 1999. 189 с.
26. Акуленко І. А., Тарасенкова Н. А. Аксіологічний компонент методичних компетентностей майбутніх учителів математики. Вісник Черкаського університету. Сер. Пед. науки. 2008. Вип. 139. С. 3–10.
27. «Якість освіти сильно заважає його кількості». Математика у школі. 2015. № 7.
28. Дубасенюк О. А., Семенюк Т. В., Антонова О. Є. Професійна підготовка майбутнього вчителя до педагогічної діяльності: монографія. Житомир: ЖДПУ, 2003. 193 с.
29. Жалдак М. І. Система підготовки вчителя до використання інформаційних технологій у навчальному процесі: автореф. дис. д-ра пед. наук. Київ, 1989. 48 с.
30. Михалін Г. О. Формування основ професійної культури вчителя математики у процесі навчання матаналізу: автореф. дис. д-ра пед. наук (13.00.04). Київ, 2004. 37 с.
31. Моторіна В. Г. Дидактичні й методичні засади професійної підготовки майбутніх учителів математики у ВНЗ: дис. д-ра пед. наук (13.00.04). Харків: ХНПУ ім. Г. С. Сковороди, 2005. 512 с.
32. Боброва І. І. Методика використання електронних НМК як старт дистанційного навчання. Інформатика та освіта. 2019. № 2. С. 15–17.
33. Бондар А. А. Застосування GeoGebra для задач на побудову. У: Навчання в сучасній школі: зб. метод. розробок. Київ: КДПУ, 2019. С. 11–18.
34. Бормотова А. Г., Мамалига Р. Ф. «Перевернутий клас» на уроці математики: досвід проектування. Міжвузівська зб. наук. праць. Київ: КДПУ, 2018. С. 188–195.
35. Галіцина І. М., Половнікова Н. Л. Мобільне навчання як нова технологія в освіті. Освітні технології та суспільство. 2011. № 1. С. 241–252.

36. Дацук В. В., Ковшова Ю. М. Контроль засвоєння знань із застосуванням Google Classroom та Matific. Матеріали VII Всеукр. студ. наук.-практ. конф. Дніпро: НДПУ, 2018. С. 191–192.
37. Ізотова А. С. Розвиток просторового мислення учнів 5–6 класів. Актуальні проблеми мат. освіти у школі та виші. Київ: НПУ, 2015. С. 91–93.
38. Коробова Т. М., Овчарова Л. А. Web 2.0 на уроках математики для формування компетентностей в умовах ДОС. Матеріали IV регіональної наук.-практ. конф. Одеса: ОДТУ, 2017. С. 333–337.
39. Ліпатнікова І. Г. Зміст математичної освіти в контексті концепції держстандарту. Актуальні питання викладання математики, інформатики та ІТ. 2015. № 1. С. 5–13.
40. Мерзляк А. Г. Алгебра для 33СО з поглибленим вивченням: підручник для 10 класу. Харків: Гімназія, 2016. 384 с.
41. Мітіна А. С. Обчислювальна культура учнів через організацію усної роботи (5 клас). Суми: СДПУ, 2019. С. 82–87.
42. Новіков М. Ю. Навчання інформатиці у школі з урахуванням мобільних технологій: автореф. дис. канд. пед. наук (13.00.04). Запоріжжя, 2019. 24 с.
43. Новіков М. Ю. Навчання інформатиці у школі на основі мобільних технологій: дис. канд. пед. наук (13.00.04). Запоріжжя, 2019. 166 с.
44. Петрова В. І. Google Диск у створенні методичних матеріалів для роботи з обдарованими дітьми з математики. Матеріали IV міжнар. наук.-практ. конф. Харків: ХДПУ, 2019. С. 400–403.
45. Позднякова Н. В., Колесникова О. І. Дидактичний потенціал мобільних технологій у навчанні математики. Психолого-педагогічний журнал «Гаудеамус». 2019. № 3(41). С. 19–26.
46. Роганова І. І. Мобільні додатки на уроках алгебри у 8 класі. Міжнародний журнал гуманітарних та природничих наук. 2018. № 11-1. С. 103–106.

47. Семенова І. М., Слепухін А. В. Методика використання ІКТ у навчальному процесі: визначення та дидактична конструкція. Педагогічна освіта в Україні. 2012. № 2. С. 184–189.
48. Семенова І. М., Слепухін А. В. Класифікація та проектування методів навчання з використанням ІКТ. Освіта та наука. 2013. № 5(104). С. 95–113.
49. Старіченко Б. Є. Оцінка результативності використання ІКТ у вирішенні освітніх завдань. Педагогічна освіта в Україні. 2018. № 8. С. 153–162.
50. Старіченко Б. Є. Професійний стандарт та ІКТ-компетентності педагога. Педагогічна освіта в Україні. 2015. № 7. С. 6–15.
51. Старостіна А. Є., Винокурова С. З. Формування математичних понять у шкільному курсі (тема «Квадратні рівняння»). Навчання та виховання: методика та практика 2016/2017 н. р. Київ: ЦРНС, 2017. С. 99–103.
52. Стратегія розвитку інформаційного суспільства в Україні: розпорядження КМУ від 15.05.2013 № 386-р. URL: <https://www.kmu.gov.ua/npas/246420577>
53. Теорія та методика навчання математики: загальна методика: навчальний посібник / за ред. Є. А. Суховієнко, З. П. Самігулліна, С. А. Севостьянова, Є. М. Ерентраут. Тернопіль: Освіта, 2010. 65 с.
54. Терешковець Н. В. Месенджери як інструмент підвищення якості освіти. Методист. 2018. № 10. С. 28–31.
55. Фабрикантова Є. В., Полянська Є. Є. Сучасні інформаційні технології освіти: навчальний посібник. Одеса: ОДПУ, 2017. 84 с.
56. Чиріна О. В. Особливості розвитку логічного мислення учнів 5–6 класів. Науково-методичний журнал «Концепт». 2015. Т. 10. С. 66–70.

