

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій

Кафедра математики та інформатики

Кочевенко Дмитро Юрійович


**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «КОНУС» З ВИКОРИСТАННЯМ
КОМП'ЮТЕРНИХ 3-D МОДЕЛЕЙ**


кваліфікаційна робота

здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня

освітньої програми «Математика»

за спеціальністю 014.04. Середня освіта (Математика)

Особистий підпис  Дмитро КОЧЕВЕНКО

Науковий керівник  Юлія ЖУЧОК,
кандидат фізико-математичних, доцент
кафедри математики та інформатики

В.о. завідувача кафедри _____ Юрій КОЗУБ,
доктор технічних наук, професор
кафедри математики та інформатики

Полтава – 2025

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «КОНУС» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ.....	7
1.1. Методичні особливості навчання стереометрії.....	7
1.2. Аналіз сучасних дидактичних ресурсів з теми "Конус"	11
1.3. Структурно-логічний аналіз поняття "конус"	19
1.4. Формування понятійного апарату теми "Конус"	23
Висновки до розділу.....	28
РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ 3D МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА КОНУСИ.....	30
2.1. Огляд програмного забезпечення для 3D-моделювання конуса.....	30
2.2. Інтеграція 3D-моделювання в процес навчання геометрії під час вивчення теми «Конус»	41
2.3. Основні типи задач на конуси та їх розв'язування з використанням комп'ютерних 3D моделей.....	42
2.4. Методичні рекомендації щодо використання GeoGebra для вивчення конуса	46
2.5. Розв'язування типових завдань ЗНО за допомогою 3D-моделей	50
2.6. Розробка плану-конспекту уроку з теми «Конус» в курсі геометрії 11 класу	60
Висновки до розділу.....	73
ВИСНОВКИ	74
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	75
ДОДАТОК А.....	81

ВСТУП

Розділ геометрії “Стереометрія” вимагає встановлення зв’язків між абстрактно-логічним і образним мисленням. Цей процес значно полегшується при застосуванні програмних засобів, використання яких дозволяє здійснювати динамічні перетворення зображень просторових об’єктів, покрокову їх побудову, графічно ілюструвати геометричні тіла.

Аналіз науково-методичної літератури дозволяє зробити висновок, що психолого-педагогічні та методичні аспекти використання комп’ютерних технологій розглядалися в роботах багатьох науковців. Так, розгляд комплексу питань, пов’язаних із використанням сучасних інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі в середній і вищій школі, започатковано в роботах К. Макліна, А. П. Єршова, М. І. Жалдака, Ю. С. Рамського, В. І. Клочка, О. Г. Мордковича, Н. В. Морзе, С. А. Ракова, О. В. Співаковського та інших дослідників. Дидактичні й психологічні аспекти застосування інформаційних технологій навчання досліджувалися в працях В. П. Беспалька, О. М. Леонтьєва, Ю. І. Машбиця, Н. Ф. Тализіної та інших. Вивчення проблем, пов’язаних з психологічними особливостями навчальної діяльності студентів, здійснювали у своїх роботах А. М. Алексюк, Ю. К. Бабанський, Л. В. Занков, І. Я. Лернер, Т. С. Яценко та інші. Аналіз проблем математичної освіти, розробка теоретичних і методичних аспектів навчання математики в сучасних умовах знайшла відображення в працях М. І. Бурди, Ю. М. Колягіна, З. І. Слєпкань, О. І. Скафи, В. О. Швеця, М. І. Шкіля та інших. Проблеми створення і впровадження методичних систем навчання природничо-математичних дисциплін у середніх і вищих навчальних закладах досліджували М. І. Жалдак, Ю. Г. Лотюк, Н. В. Морзе, З. І. Слєпкань, О. В. Співаковський, М. С. Львов та інші. Проблеми використання ІКТ та впровадження на їх основі дистанційного навчання математики в середній і вищій школі досліджувались у роботах М. І. Жалдака, В. І. Клочка, О. Г. Мордковича, Н. В. Морзе, С. А. Ракова, Ю. С. Рамського, О. В. Співаковського, Ю. В. Горошка, М. С. Львова, В. А. Крекніна, Ю. В. Триуса, В. С. Круглика, Т. В. Зайцевої та інших.

Питаннями розробки та впровадження систем динамічної математики в освітній процес активно займалися такі вчені, як М. Жалдак, Ю. Горошко, Є. Вінниченко, С. Раков, Т. Крамаренко, В. Ракута та інші. Вони досліджували різноманітні аспекти цієї теми, зокрема особливості використання програмного забезпечення GeoGebra в навчанні математики. Зокрема, М. Хохенватер, В. Ракута, Р. Зіатдинов, О. Семеніхіна, М. Друшляк та інші детально описали інтерфейс програми GeoGebra, способи її застосування в навчанні та навели приклади розв'язання задач за допомогою цього інструменту.

Конус – це не просто абстрактна геометрична фігура. Він оточує нас скрізь: від соснових шишок до будівельних лійок. Розуміння властивостей конуса має величезне практичне значення в різних сферах життя. Проте, незважаючи на всю очевидність цієї фігури, багато учнів стикаються з труднощами при її вивченні. Чому так відбувається? Відповідь криється в особливостях нашого просторового мислення. Щоб допомогти учням краще уявити та зрозуміти конус, а також спростити процес розв'язання задач, все частіше використовують сучасні технології, зокрема, 3D-моделювання.

Сучасна педагогіка пропонує безліч інноваційних підходів до вивчення геометричних тіл за допомогою комп'ютерних програм, які значно підвищують ефективність навчання. “Розв'язування задач на обчислення площ та периметрів перерізів многогранників” із виконанням побудови малюнка і громіздких обчислень у GRAN-3D [3], “Систематизація понять, вироблення вмінь і навичок у побудові кутів у многогранниках” із застосуванням GRAN-3D [4], “Дослідження поверхонь у просторі” з використанням GRAN-2D, GRAN-3D, Derive [5], вивчення теми “Тіла обертання” із розглядом його прикладних аспектів за допомогою програмних засобів GRAN-2D, GRAN-3D [6] та інші.

Незважаючи на значні досягнення у використанні комп'ютерних моделей у навчанні математики, питання ефективного застосування 3D-моделей під час вивчення конуса залишається актуальним. Зокрема, виникають питання щодо оптимальних способів використання моделей, їх впливу на розуміння учнями просторових відношень та ефективності різних типів моделей. Саме тому було

обрано тему дослідження «Методика вивчення теми «Конус» з використанням комп'ютерних 3D моделей».

Об'єктом дослідження є особливості викладання теми "Конус" у середній школі.

Предметом дослідження є методика вивчення теми «Конус» з використанням комп'ютерних 3D моделей в курсі геометрії 11 класу на профільному рівні.

Мета дослідження полягає у виявленні методичних особливостей вивчення теми «Конус» в курсі геометрії старшої школи із застосуванням комп'ютерних 3D моделей.

Досягнення мети дослідження передбачає виконання таких завдань:

- 1) провести детальний аналіз сучасних досліджень у галузі використання 3D-технологій у навчанні геометрії;
- 2) провести аналіз навчальних програм та підручників;
- 3) розкрити математичну сутність поняття "конус" та проаналізувати його місце в шкільному курсі геометрії;
- 4) узагальнити та систематизувати теоретичні відомості з теми «Конус»;
- 5) провести порівняльний аналіз популярних програм для 3D-моделювання та обрати оптимальне програмне забезпечення для вивчення конуса;
- 6) розробити практичні рекомендації для вчителів щодо використання GeoGebra для візуалізації та дослідження властивостей конуса;
- 7) створити методичну розробку уроку з теми «Конус» з використанням комп'ютерних 3D моделей.

Для проведення дослідження було застосовано комплексний підхід, що включав ретельний аналіз наукової літератури та методичне моделювання. Отримані результати мають високу практичну цінність, оскільки розроблені дидактичні матеріали та практичні рекомендації дозволяють зробити процес навчання більш наочним та цікавим, можуть бути ефективно використані вчителями математики для підвищення якості навчання геометрії. Використання

3D-технологій сприяє розвитку просторової уяви учнів та поглибленню їхніх математичних знань.

Структура роботи. Дана наукова робота складається з трьох основних частин: вступу, основної частини, поділеної на два розділи, та висновків. Така структура спрямована на розкриття методичних аспектів викладання теми «Конус» у шкільному курсі геометрії та інтеграцію сучасних технологій у навчальний процес.

Перший розділ присвячений методичним аспектам викладання теми «Конус». У ньому розглядаються особливості навчання стереометрії, аналізуються сучасні дидактичні ресурси, а також проводиться структурно-логічний аналіз поняття «конус». Значна увага приділяється формуванню понятійного апарату, необхідного для ефективного засвоєння теми. Завершення розділу містить висновки щодо ефективності традиційних підходів і можливих шляхів їх вдосконалення.

Другий розділ акцентує увагу на застосуванні комп'ютерних технологій у навчанні геометрії, зокрема використанні 3D-моделей для розв'язування задач на конуси. У ньому проводиться огляд програмного забезпечення, інтеграція 3D-моделювання у навчальний процес, аналізуються типові задачі та методичні підходи до їх розв'язування. Окремі підрозділи присвячені методичним рекомендаціям щодо використання програмного забезпечення GeoGebra та розробці уроку з теми «Конус». Особливе місце займає аналіз застосування 3D-моделей для підготовки до НМТ.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «КОНУС» В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ГЕОМЕТРІЇ

1.1. Методичні особливості навчання стереометрії

Ефективність навчання безпосередньо пов'язана з майстерністю вчителя та його вмінням обирати відповідні методи і прийоми роботи. Методика навчання кожного предмета є результатом тривалих досліджень і враховує як загальні закономірності навчання, так і специфіку конкретної дисципліни. Яскравим прикладом цього є праці Я. А. Коменського, який ще у XVII столітті розробляв універсальні принципи навчання. [15, 21] Сучасні дослідження в галузі педагогіки підтверджують, що ефективність навчання значно зростає, коли вчитель володіє різноманітними методичними прийомами і вміло їх поєднує.

Сучасне розуміння поняття «методика» можемо спостерігати в роботі С. Гончаренка «Методика як наука», де він визначає її так: «Методика конкретного навчального предмета – це галузь педагогічної науки, що досліджує зміст навчального предмета й характер навчального процесу, який сприяє засвоєнню учнями необхідного рівня знань, умінь та навичок, розвитку мислення школярів, формуванню світогляду і виховання якостей громадянина своєї країни» [11].

Методика навчання – це не хаотичний набір прийомів, а скоординована система, що складається з взаємопов'язаних елементів. Як показано на рис. 1.1, одним з ключових елементів цієї системи є принципи навчання. За визначенням [17], принципи навчання – це основні вимоги до навчального процесу, які забезпечують його ефективність. Іншими словами, принципи – це ті фундаментальні ідеї, якими ми керуємося у своїй педагогічній діяльності. Їх стабільність зумовлена тісним зв'язком із суспільними цінностями.

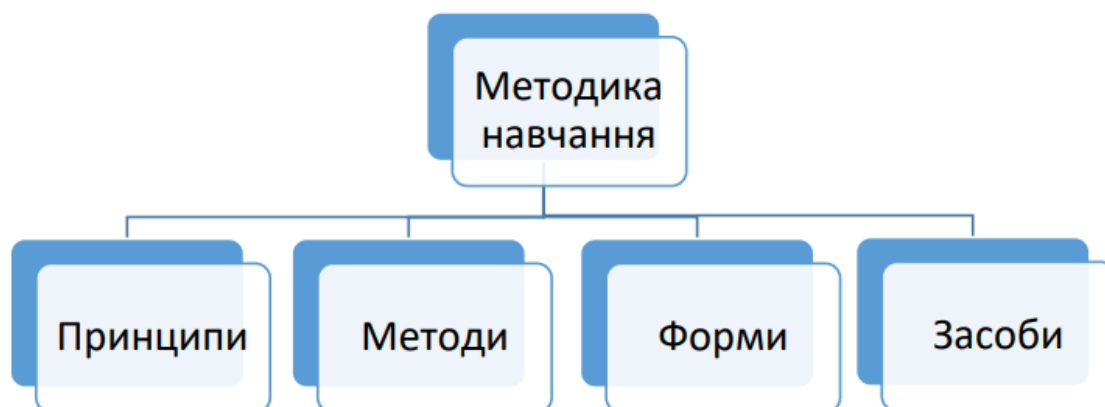


Рис. 1.1. Складові методики навчання

Ефективне навчання ґрунтується на кількох фундаментальних принципах. Передусім, учитель має забезпечувати учням достовірні знання, що відповідають сучасному стану науки (принцип науковості). Крім того, навчальний матеріал має подаватися послідовно та логічно, щоб учень міг легко засвоїти нові знання (принцип систематичності). Для кращого запам'ятовування важливо залучати різні канали сприйняття (принцип наочності). Водночас, матеріал має бути адаптований до вікових особливостей та індивідуальних можливостей учнів (принцип доступності). І, нарешті, навчання має бути активним процесом, в якому учень не просто пасивно сприймає інформацію, а й активно її осмислює та застосовує на практиці (принцип свідомості й активності). Важливо також пам'ятати про тісний зв'язок теорії з практикою, адже знання мають бути корисними в реальному житті [32].

Принципи навчання, такі як науковість, систематичність та наочність, є фундаментальними і залишаються актуальними протягом багатьох років. Однак саме методи навчання, як інструменти реалізації цих принципів, постійно розвиваються.

Різні автори пропонують різні класифікації методів навчання. Так, С. Петровський та Є. Голант виділяють їх за джерелом інформації (словесні, наочні, практичні), І. Лернер та М. Скаткін – за характером пізнавальної діяльності (пояснювально-ілюстративні, проблемні тощо), а С. Бондар фокусується на рівні

залученості учня (пасивні, активні, інтерактивні). [6, 19]

Ця різноманітність підходів свідчить про те, що методика навчання є динамічною системою, яка постійно збагачується новими ідеями та адаптується до сучасних викликів. Вибір конкретного методу залежить від багатьох факторів, таких як навчальна мета, вікові особливості учнів, предметна область та особистісні характеристики вчителя.

Однією зі складових методики навчання є форми навчання. «Форма організації навчання – спосіб організації навчальної діяльності, який регулюється певним, наперед визначеним розпорядком; зовнішнє вираження узгодженої діяльності вчителя та учнів, що здійснюється у визначеному порядку і в певному режимі» [33].

Урок традиційно є основною одиницею навчального процесу. Різноманітність дидактичних завдань, що стоять перед школою, обумовлює існування різних типів уроків. Так, залежно від мети, виділяють уроки вивчення нового матеріалу, відпрацювання навичок, узагальнення знань тощо. [18] Сучасна педагогіка все частіше звертається до комбінованих уроків, які дозволяють поєднати різні види діяльності в межах одного заняття, підвищуючи його ефективність. «Засіб навчання – це матеріальний або ідеальний об'єкт, який «розміщено» між учителем та учнем і використовується для засвоєння знань, формування досвіду пізнавальної та практичної діяльності» [13].

До засобів навчання входять як традиційні навчальні матеріали (підручники, посібники), так і сучасні технології (комп'ютерні програми, освітні веб-сайти та онлайн-сервіси). Цей широкий спектр засобів дозволяє зробити навчальний процес більш інтерактивним, цікавим та ефективним. «Об'єкти, які виконують функцію засобів навчання, можна класифікувати за різними ознаками: за їх властивостями, суб'єктами діяльності, впливом на якість знань і розвиток здібностей, їх ефективністю в навчальному процесі (щодо зменшення кількості помилок при розв'язуванні задач)» [13]. Як ми вже з'ясували, кожен навчальний предмет має свої особливості, які вимагають індивідуального підходу до навчання. Стереометрія, як розділ геометрії, що вивчає властивості

тривимірних фігур, не є винятком. [30] Головними завданнями вивчення стереометрії є розвиток просторової уяви (здатності уявляти об'ємні фігури) та логічного мислення (вміння будувати доведення та розв'язувати задачі). Г. Бевз у своїй праці детально розглянув методику викладання стереометрії та запропонував низку ефективних прийомів, які допомагають учням краще освоїти цей складний матеріал. Далі ми детальніше зупинимося на деяких з цих прийомів, зокрема, на тих, що стосуються побудови просторових фігур.

У пунктах 5 і 6 цих положень зазначається, що «Для розвитку просторової уяви і графічної культури учнів на початку опрацювання кожної нової теми слід пропонувати вправи на малювання відповідних фігур. Малюнок в розв'язанні стереометричної задачі – не мета, а допоміжний засіб» [5]. Автор підкреслює, що ефективне вивчення стереометрії передбачає поєднання наочності та абстрактного мислення. З одного боку, учні повинні мати чітке уявлення про форму і розташування фігур у просторі. З іншого боку, вони мають навчитися оперувати не лише візуальними образами, а й логічними міркуваннями, фіксуючи свої думки на папері. Як зазначається в роботі [5], використання моделей доцільне лише тоді, коли воно допомагає учням краще зрозуміти умову задачі. Тобто, моделювання – це додатковий інструмент, а не обов'язкова умова успішного розв'язання. При цьому автор наголошує на важливості регулярної практики в побудові малюнків, оскільки саме завдяки цьому учні формують стійкі асоціації між геометричними образами і їхніми властивостями.

Як відомо, ефективність навчання значною мірою залежить від залучення різних органів чуття. Це особливо актуально для стереометрії, де розуміння просторових відношень є ключовим. І. Гулівата підкреслює, що розвиток просторової уяви учнів тісно пов'язаний з їхніми вміннями зображати тривимірні фігури на площині та виконувати різноманітні побудови. [12] Для досягнення цього, важливо використовувати різноманітні наочні матеріали, які допоможуть учням створити в своїй свідомості яскраві образи геометричних об'єктів. Тільки за таких умов можна забезпечити глибоке розуміння матеріалу та успішне вирішення стереометричних задач. Як зазначає І. Гулівата, особливі

труднощі при вивченні стереометрії виникають у учнів з переважно наочно-дійовим типом мислення. Для таких учнів побудова зображень геометричних фігур може стати справжнім викликом. [12] Автор пропонує вирішувати цю проблему за допомогою поетапної візуалізації процесу побудови. Цей метод передбачає створення дидактичних матеріалів, які б крок за кроком демонстрували учням, як побудувати зображення тієї чи іншої фігури. Завдяки такому підходу учні зможуть краще уявити кінцевий результат і успішніше опанувати навички побудови. 3. Слєпкань наголошує, що використання інформаційних технологій у навчанні має бути обґрунтованим і спрямованим на покращення навчального процесу, а не бути самоціллю. [29] Оскільки стереометрія вимагає від учнів розвиненої просторової уяви, використання наочних матеріалів є одним із ключових аспектів її викладання. Сучасні комп'ютерні технології надають нові можливості для створення динамічних і інтерактивних моделей геометричних фігур, що робить навчання більш ефективним та цікавим.

1.2. Аналіз сучасних дидактичних ресурсів з теми "Конус"

Сучасні навчальні програми з математики, запропоновані Міністерством освіти і науки України, пропонують учням 10-11 класів широкий спектр можливостей для розвитку математичних знань і вмінь. Залежно від інтересів та майбутніх планів, учні можуть обрати один з трьох рівнів вивчення: стандартний, профільний або поглиблений. Така гнучка система дозволяє кожному учню знайти оптимальний темп і глибину вивчення математики.

Згідно з навчальною програмою для учнів 10-11 класів (рівень стандарту), на вивчення математики відводиться 3 години на тиждень. Така розподіл годин передбачає поглиблене вивчення як алгебри, так і геометрії. Зокрема, в першому семестрі основна увага приділяється геометрії (2 години), а в другому – алгебрі (2 години). Загальний обсяг годин, відведений на вивчення алгебри, становить 54 години, а на геометрію – 51 годину. Такий розподіл годин дозволяє забезпечити збалансоване вивчення обох розділів математики.

Таблиця 1.1

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (рівень стандарту)[24]

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ 12 годин	
<p>«Учень/учениця: обчислює величини основних елементів тіл обертання; застосовує властивості тіл обертання до розв'язування задач; розпізнає види тіл обертання, їхні елементи; многогранники і тіла обертання у їх комбінаціях в об'єктах навколишнього світу.»</p>	<p>«Циліндр, конус, їх елементи. Перерізи циліндра і конуса: осьові перерізи циліндра і конуса; перерізи циліндра і конуса площинами, паралельними основі. Куля і сфера. Переріз кулі площиною.»</p>
Тема 3. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ 11 годин	
<p>«Учень/учениця: записує формули для обчислення об'ємів паралелепіпеда, призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі, площ бічної та повної поверхонь циліндра, конуса, площі сфери; має уявлення про об'єм тіла та його основні властивості; розв'язує задачі на обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл, зокрема прикладного змісту.»</p>	<p>«Поняття про об'єм тіла. Основні властивості об'ємів. Об'єми призми, паралелепіпеда, піраміди, циліндра, конуса, кулі. Площі бічної та повної поверхонь циліндра, конуса. Площа сфери.»</p>

На профільному рівні з математики в 10-11 класах учні приділяють значно більше часу вивченню алгебри порівняно зі стандартним рівнем. Так, загальний обсяг годин, відведений на алгебру, становить 210 годин, що майже в чотири рази перевищує відповідний показник для стандартного рівня.

Таблиця 1.2

Навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів (профільний рівень)[25]

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
Тема 2. ТІЛА ОБЕРТАННЯ 21 година	
<p>«Учень/учениця наводить приклади: тіл обертання; пояснює що таке: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульовий сегмент, сектор, пояс; формулює означення основних понять та властивостей для геометричних тіл, зазначених у змісті теми;</p>	<p>«Тіло обертання. Циліндр, конус, зрізаний конус, їх елементи. Перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса: осьові перерізи циліндра, конуса і зрізаного конуса; перерізи циліндра і конуса площинами,</p>

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
<p>формулює і доводить теореми про: переріз циліндра і конуса площиною, перпендикулярною до осі циліндра; переріз кулі будь-якою площиною;</p> <p>класифікує геометричні тіла за видом: циліндр; конус; зрізаний конус; куля; кульові сегмент, сектор, пояс;</p> <p>розрізняє елементи циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі, сегмента, сектора, пояса; видимі і невидимі елементи; центральний кут та плоскі кути, утворені перерізом площини, що проходить через вершину конуса;</p> <p>зображає рисунком, відповідно до властивостей ортогонального проєкціювання: циліндр; конус; зрізаний конус, кулю, сегмент, сектор, пояс; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик інших та є основними для заданих фігур – висота, твірна, радіус, хорда; площину, дотичну до сфери та переріз кулі площиною; осьові перерізи циліндра та конуса; комбінації просторових фігур;</p> <p>пояснює та записує відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса; перетин кулі площиною;</p> <p>аналізує та досліджує кут між похилою та її проєкцією (між діагоналлю твірною конуса і площиною основи, між діагоналлю перерізу циліндра і площиною основи); кут між двома площинами (кут між перерізом і площиною основи); перетин кулі площиною; дотичну площину до сфери; комбінацію просторових фігур;</p> <p>обґрунтовує властивості тіл обертання; позначення відповідних лінійних і плоских кутів; застосування теореми про три перпендикуляри та теорем для розв'язування прямокутних трикутників; радіусів вписаного і описаного кола;</p> <p>характеризує покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; вид перерізу геометричного тіла обертання та шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання; елементи комбінації просторових фігур;</p> <p>розв'язує вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту.»</p>	<p>паралельними основи; перерізи циліндра площинами, паралельними його осі; перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину.</p> <p>Куля і сфера. Переріз кулі площиною.</p> <p>Частини кулі: сегмент, сектор, пояс.</p> <p>Площина, дотична до сфери.</p> <p>Комбінації геометричних тіл.»</p>
Тема 4. ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ ТІЛ ОБЕРТАННЯ 16 годин	
«Учень/учениця наводить приклади: тіл обертання;	«Об'єм тіл обертання: циліндра, конуса,

Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів	Зміст навчального матеріалу
<p>пояснює що таке: об'єм циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин; площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса; площа сфери;</p> <p>формулює і доводить теореми про об'єм: циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин;</p> <p>розрізняє розгортки поверхні циліндра і конуса;</p> <p>зображує рисунком, відповідно до властивостей паралельного проєціювання: циліндра, конус, зрізаний конус; кулю та її частини; видимі та невидимі елементи, які є шуканими в задачах для знаходження характеристик обчислення об'єму;</p> <p>пояснює та записує відповідно до умови задачі: скорочений запис введення позначень за рисунком; формули для обчислення площ основи, висоти та об'єму циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єму кулі та її частин;</p> <p>вимірює та обчислює площі бічної та повної поверхні: циліндра, конуса, зрізаного конуса;</p> <p>аналізує та досліджує лінійні виміри та величини для обчислення об'єму;</p> <p>обґрунтовує розміщення основи висоти циліндра, конуса, зрізаного конуса; центр кулі; покрокові висновки під час розв'язування задач, застосовуючи відомі теореми та інші твердження;</p> <p>характеризує покрокові можливості досягнення відповіді до навчально-практичної задачі; модель прикладної задачі, перекладаючи її на мову геометрії; шляхи пошуку невідомих лінійних вимірів та величин для його розв'язання;</p> <p>вимірює та обчислює об'єм та площі поверхонь циліндра, конуса, зрізаного конуса; об'єм кулі та її частин; площу сфери;</p> <p>розв'язує вправи, що передбачають: використання вивчених означень, теорем, формул та властивостей до розв'язування задач, у т.ч. прикладного та практичного змісту; обчислення об'єму циліндра, конуса, зрізаного конуса, кулі; площ бічної та повної поверхні циліндра, конуса, зрізаного конуса, площу сфери. знаходження площ поверхонь комбінації просторових фігур.»</p>	<p>зрізаного конуса, кулі та її частин.</p> <p>Площа бічної поверхні, площа повної поверхні тіл обертання: циліндра, конуса, зрізаного конуса. Площа сфери.»</p>

Проаналізуємо основні вимоги до знань і вмінь учнів з теми «Конус».

Учень, який успішно завершив вивчення теми "Конус" на базовому рівні, демонструє міцні знання про це геометричне тіло. Він впевнено ідентифікує конус в оточенні, будує його зображення, точно описує його елементи та розв'язує стандартні задачі на обчислення його характеристик. Крім того, учень

має загальне уявлення про властивості конуса та його перерізів, що дозволяє йому успішно застосовувати отримані знання для вирішення різноманітних практичних задач. Вивчення конуса сприяє розвитку просторового мислення, логіки та аналітичних здібностей, що є важливими для успішного вивчення інших розділів математики та природничих наук.

Учень, який навчається за профільним рівнем, поглиблює свої знання про конус та його властивості. Він:

- Дає чіткі визначення конуса, зрізаного конуса та їх елементів. Формулює і доводить теореми, пов'язані з конусом.
- Класифікує геометричні тіла, розрізняє їх елементи та видимість.
- Будує точні зображення конуса та його елементів, враховуючи правила проектування.
- Обчислює різноманітні характеристики конуса та зрізаного конуса, використовуючи відповідні формули.
- Аналізує геометричні фігури, досліджує їх властивості та взаємозв'язки.
- Розв'язує складніші задачі, включаючи задачі прикладного характеру, обґрунтовуючи кожен крок розв'язання.
- Перекладає реальні ситуації на мову геометрії та будує математичні моделі для їх розв'язання.

Аналізуючи результати дослідження, можна зробити висновок, що вивчення конуса на базовому рівні формує у учнів фундаментальні знання про цю геометричну фігуру. Профільний рівень, у свою чергу, дозволяє учням не лише поглибити теоретичні знання, але й розвинути практичні навички, необхідні для подальшого вивчення математики та інших природничих наук. Завдяки більш детальному вивченню конуса, учні набувають здатності до самостійних досліджень та творчого застосування математичних знань.

Ключові відмінності між рівнями:

Глибина знань: учень профільного рівня має більш глибоке розуміння теоретичних основ та вміє застосовувати їх на практиці.

Складність задач: задачі для профільного рівня є більш складними та вимагають аналітичного мислення.

Зв'язок з іншими темами: учень профільного рівня встановлює зв'язки між різними темами геометрії та застосовує отримані знання для розв'язання комплексних задач.

Ключову роль у засвоєнні математичних знань відіграє систематична робота учнів із підручником. Для детальнішого розуміння цього питання проведемо порівняльний аналіз підручників з геометрії для 11 класу профільного рівня:

- 1) «Геометрія (профільний рівень)» – підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти авторів А. Мерзляка, Д. Номіровського, В. Полонського, М. Якіра [22];
- 2) «Геометрія (профільний рівень)» – підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти авторів Є. Неліна, О. Долгової [27];
- 3) «Геометрія (профільний рівень)» – підручник для 11 класу закладів загальної середньої освіти авторів О. Істера, О. Єргіної [14].

Підручник Мерзляка, Номіровського, Полонського та Якіра побудований за класичним абстрактно-дедуктивним принципом. Матеріал поділено на чотири логічні розділи: многогранники, тіла обертання, об'єми та площі, а також повторення курсу. Кожен розділ детально розглядає окремі теми, такі як "Конус", "Зрізаний конус" та інші. Для кращого засвоєння матеріалу автори використовують різноманітні методичні прийоми: виділення ключових понять жирним шрифтом, формулювання теорем курсивом, а також ілюстрації до кожного поняття. Особливістю підручника є включення задач, які допомагають учням самостійно сформулювати деякі властивості геометричних фігур.

Тема «Конуси» розкрита в другому параграфі розділу «Тіла обертання». Даній темі присвячені три пункти, зокрема, «Конус», «Зрізаний конус», «Комбінації конуса та піраміди». Також конус розглядається в темах «Комбінації циліндра (конуса) та сфери» та «Об'єми тіл обертання».

Задачі підручника розподілені на три рівні. ° – початковий та середній рівень, • – достатній, •• – високий рівень, * – задачі з ускладненням. Підручник містить переважно завдання базового та середнього рівня складності, що дозволяє закріпити основні поняття та вміння. Для більш обдарованих учнів передбачені завдання підвищеної складності та задачі з елементами ускладнення. Наприкінці кожної теми подано вправи для повторення пройденого матеріалу. Завдання розділені за кольором: сині – для домашньої роботи, чорні – для виконання на уроці. Варто зазначити відсутність усних вправ та прикладних задач, що потребує додаткових зусиль від учителя для створення різноманітних навчальних ситуацій.

У підручнику авторів Є. Неліна, О. Долгової стиль викладу навчального матеріалу абстрактно-дедуктивний. Підручник складається з трьох розділів: «Многогранники», «Тіла обертання», «Об’єми й площі поверхонь геометричних тіл».

Підручник побудований за чіткою структурою: кожен розділ поділений на параграфи. На початку кожного параграфа подається короткий вступ, який орієнтує учня на основні поняття та ідеї, що розглядатимуться. Потім автори детально розбирають кожне поняття, надаючи строгі математичні доведення та ілюстрації. Для кращого розуміння матеріалу, у підручнику наведено приклади розв’язання типових задач з докладними поясненнями кожного кроку. Ключові терміни, теореми та властивості виділені шрифтом для зручності сприйняття.

Тема «Конуси» частково розкривається в другому параграфі розділу «Тіла обертання». Подаються основні поняття, властивості про конус та зрізаного конуса. Розглядаються перерізи конуса площинами. Даній темі присвячено один пункт «Конус і деякі його перерізи. Зрізаний конус». Також конус розглядається в темі «Принцип Кавальєрі. Об’єм похилої призми. Об’єм піраміди і конуса».

Підручник пропонує різнорівневі завдання: від простих, позначених символом °, до складних, позначених зірочкою. Завдання середнього рівня складності не мають спеціального маркування. Крім того, наприкінці кожного параграфа є рубрика "Прояви свою компетентність", де зібрані більш складні

задачі для допитливих учнів. Хоча в підручнику переважають завдання середнього та високого рівня, відсутність чіткого розподілу на домашні та класні роботи може створити певні незручності для вчителя.

У підручнику авторів О. Істера, О. Єргіної стиль викладу навчального матеріалу абстрактно-дедуктивний. Підручник складається з чотирьох Розділів: «Многогранники», «Тіла обертання», «Об'єми многогранників», «Об'єми та площі поверхонь тіл обертання».

Кожен параграф підручника поділений на логічні блоки. Ключові поняття, теореми та властивості виділені жирним шрифтом для зручності запам'ятовування. Кожне поняття ілюструється рисунками, що допомагає краще уявити геометричні об'єкти. Автори пропонують почати вивчення теми зі знайомства з просторовою фігурою в цілому, а потім переходити до детального розгляду її елементів і властивостей. Для закріплення теоретичного матеріалу наведені приклади розв'язання задач з короткими поясненнями.

Тема «Конуси» частково розкривається в другому розділі «Тіла обертання». Подаються основні поняття, властивості про конус та зрізаного конуса. Розглядаються перерізи конуса площинами. Даній темі присвячено два пункти «Конус» та «Комбінації геометричних тіл». Також конус розглядається в темі «Об'єми та площі поверхонь тіл обертання» в пункті «Об'єм конуса і зрізаного конуса».

Задачі підручника розподілені на три рівні. 1 – початковий, 2 – середній рівень, 3 – достатній, 4 – високий рівень, * – задачі з ускладненням, в кінці параграфа пропонуються «Життєва математика» та «Цікаві задачі для учнів неледачих». Підручник пропонує широкий спектр завдань для закріплення матеріалу. Завдання розподілені за рівнями складності та позначені кольорами для зручності. Крім того, наприкінці кожної теми представлено тестові завдання у форматі ЗНО, що дозволяє учням перевірити свої знання. Однак, відсутність усних вправ та прикладних задач може обмежувати можливості для розвитку різних видів математичної діяльності.

Кожен з розглянутих підручників містить вичерпний теоретичний матеріал. Проте, для отримання найповніших знань, рекомендується використовувати їх у комплексі.

1.3. Структурно-логічний аналіз поняття "конус"

Вивчення теми "Конус" вимагає від учнів не лише знання формул та алгоритмів розв'язання задач, а й розвинених просторових уявлень. Для ефективного засвоєння матеріалу доцільно використовувати сучасні інформаційно-комунікаційні технології. Моделювання геометричних фігур у спеціальних програмах дозволяє економити час на побудові креслень і сприяє глибшому розумінню властивостей конуса. Такий підхід підтверджується аналізом навчального матеріалу, який демонструє значний обсяг нових понять та навичок, які мають освоїти учні [табл. 1.3, 1.4].

Таблиця 1.3

Логіко-математичний аналіз теоретичного матеріалу теми «Конус» [22, 27, 14]

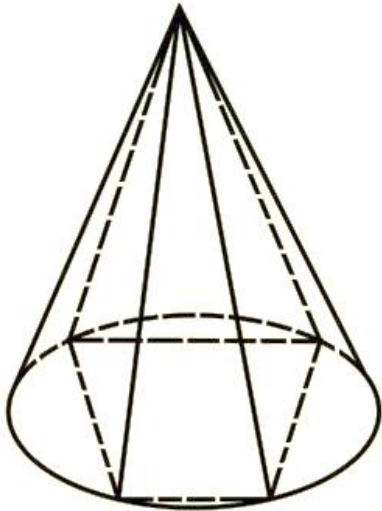
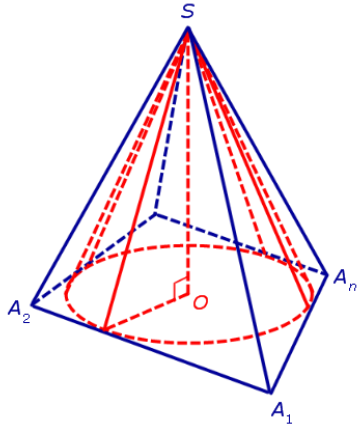
	Поняття	Факти	Способи діяльності
Нові	<ul style="list-style-type: none"> тіло обертання поверхня обертання конус осьові перерізи конуса перерізи конуса площинами, паралельними основі перерізи конуса площинами, які проходять через його вершину комбінації геометричних тіл 	<ul style="list-style-type: none"> теорема про вісь тіла обертання; теорема про перетин конуса площиною, паралельною основі; властивості конуса; 	<ul style="list-style-type: none"> Побудова зображень тіл обертання. Виділення основних властивостей тіл обертання. Розпізнавання многокутників, тіл обертання та їх комбінацій. Розв'язування задач на знаходження невідомих елементів тіл обертання.
Базові	<ul style="list-style-type: none"> Коло; многокутники (квадрат, прямокутник, 	<ul style="list-style-type: none"> Теорема [основна властивість паралельного перенесення], 	<ul style="list-style-type: none"> Елементарні геометричні побудови,

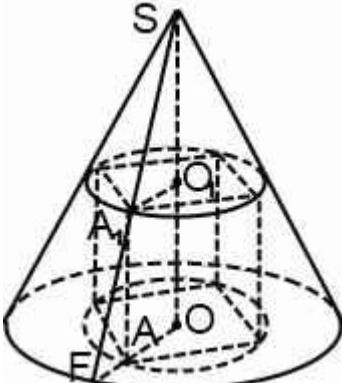
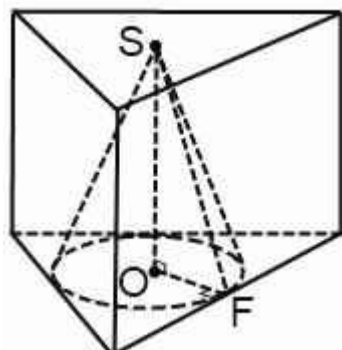
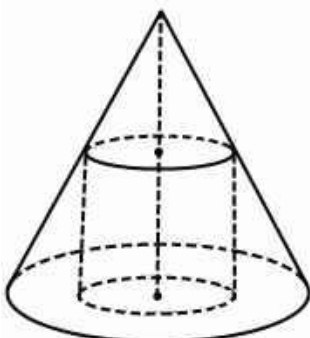
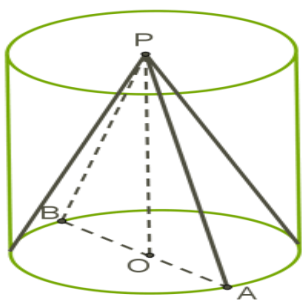
	Поняття	Факти	Способи діяльності
	трикутник, ромб, паралелограм); ● Прямокутний трикутник; ● Перпендикуляр; ● Бісектриса; ● Формули для знаходження площ многокутників та кола;	● теорема [формула відстані між двома точками], ● теорема [косинусів], ● наслідок 1, ● наслідок 2, ● теорема [про рівняння прямої], ● теорема [властивість середньої лінії трикутника], ● теорема [властивість середньої лінії трапеції], ● теорема [властивості паралелограма], ● нерівність трикутника.	● побудова чотирикутників та їх елементів, ● найпростіші задачі в координатах.

Таблиця 1.4

**Логіко-математичний аналіз формулювань означень нових понять теми
«Конус» [22, 27, 14]**

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристичні властивості
1. Конус	«Конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо його катета.»	Описове означення. 
2. Зрізаний конус	«Зрізаний конус - це частина конуса, що міститься між його основою і січною»	Означення через найближчий рід.

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристичні властивості
	площиною, паралельною основі.»	
3. Дотична площина до конуса	«Площина, яка має з конусом одну спільну твірну і не має з поверхнею конуса інших спільних точок називається <i>дотичною площиною до конуса.</i> »	
4. Подібні конуси	«Два конуси називаються <i>подібними</i> , якщо в них відповідні твірні і радіуси основ пропорційні.»	Означення через найближчий рід
5. Піраміда, вписана в конус	«Піраміда називається <i>вписаною в конус</i> , якщо її вершини збігаються, а основа піраміди вписана в основу конуса.»	Означення описове 
6. Піраміда, описана навколо конуса	«Піраміда називається <i>описаною навколо конуса</i> , якщо її вершини збігаються, а основа піраміди описана навколо основи конуса.»	

Поняття	Формулювання означення	Вид означення, характеристичні властивості
7. Призма, вписана в конус	«Призма є вписаною в конус, якщо всі вершини верхньої основи призми лежать на бічній поверхні конуса, а нижня основа лежить на основі конуса.»	
8. Конус, вписаний в призму	«Конус є вписаним в призму, якщо його вершина лежить у верхній її основі, а основа вписана в нижню основу призми.»	
9. Циліндр, вписаний в конус	«Циліндр є вписаним в конус, якщо одна з його основ дотикається до всіх твірних конуса, а друга основа лежить на основі конуса.»	
10. Конус, вписаний в циліндр	«Конус є вписаним у циліндр, якщо основа конуса збігається з основою циліндра, а вершина конуса лежить у верхній основі циліндра.»	

Як видно з таблиці 1.3, більшість понять, пов'язаних з темою "Конус", є новими для учнів. Для того щоб допомогти учням сформувати чіткі уявлення про геометричні об'єкти та їх властивості, необхідно використовувати різноманітні засоби наочності. Візуальні образи, створені за допомогою малюнків, моделей та

інших технічних засобів, сприяють кращому розумінню абстрактних математичних понять.

Комп'ютерні моделі мають значні переваги перед традиційними засобами навчання. Їхня головна особливість – динамічність. На відміну від статичних фізичних моделей чи малюнків, комп'ютерну модель можна змінювати багаторазово, демонструючи різні варіанти та особливості об'єкта дослідження. Це дозволяє учням глибше зрозуміти властивості геометричних фігур і сприяє розвитку їхнього просторового мислення. Як зазначає О. Вітюк у своїй праці «Розвиток образного мислення учнів при вивченні стереометрії з використанням комп'ютера», використання ІКТ у навчальному процесі перетворює учня з пасивного спостерігача на активного дослідника [8].

Використання комп'ютерних моделей не лише економить час на уроках, але й суттєво підвищує ефективність навчання. Вони стимулюють дослідницьку активність учнів, спонукаючи їх до самостійного освоєння нового матеріалу. Такий підхід дозволяє глибше зануритися в тему і краще зрозуміти її суть. Детальний аналіз понять, представлений у таблицях 1.3 і 1.4, дає можливість скласти оптимальний план вивчення теми "Конус" та розробити систему вправ, спрямованих на закріплення нових знань, підібрати цікаві завдання для кожного учня, враховуючи його індивідуальні особливості.

1.4. Формування понятійного апарату теми "Конус"

Поняття конуса має давні історичні корені. Перші уявлення про геометричні тіла, зокрема конус, виникли у людей в результаті спостережень за навколишнім світом. Термін "конус" має грецьке походження і пов'язаний з формою ялинової шишки. Саме грецькі математики VII-III ст. до н.е. зробили значний внесок у розвиток геометрії, зокрема, в систематизацію знань про конус і формулювання перших теорем, пов'язаних з цим геометричним тілом. До того часу геометричні фігури не мали чітких назв і вивчалися переважно емпірично.

Багатовікова робота грецьких вчених була підсумована *Евклідом* (325 до н.е - 265 до н.е.) в його знаменитій праці "Начала". В XI книзі дається таке означення конусу: якщо прямокутний трикутник обертається близько одного зі

своїх катетів зліва і повертається в той же самий стан, з якого він почав рухатися, то описана фігура буде конусом.

Евклід розглядає тільки прямі конуси, тобто такі, у яких вісь перпендикулярна до основи, лише *Аполоній* (262 до н.е. - 190 до н.е.) розділяє прямі і косі конуси, у яких вісь утворює з основою кут, відмінний від прямого.

У XII книзі "Начала" Евкліда містяться такі теореми:

- Об'єм конуса дорівнює однієї третини циліндра з рівною основою і рівною висотою: доведення цієї теореми належить *Евдоксу Книдському* (408 до н.е - 355 до н.е) ;
- Відношення об'ємів двох конусів з рівними основами дорівнює відношенню відповідних висот.
- Якщо два конуса рівновеликі, то площі їх основ обернено пропорційні відповідним висотам і навпаки.

Поняття об'єму конуса було вперше обчислене Героном Олександрійським у I столітті н.е. Архімед у III столітті до н.е. у своїй праці "Про кулі і циліндри" обґрунтував формулу для обчислення бічної поверхні конуса. Демокріт, хоча і не залишив після себе письмових праць, за припущеннями вчених, першим отримав формулу для обчислення об'єму піраміди та, відповідно, конуса.

Значний внесок у розвиток геометрії, зокрема, теорії конічних перерізів, зробила Платонівська академія. Глибоке дослідження властивостей таких геометричних тіл, як призма, піраміда, циліндр та конус, було проведено Платоном та його учнями ще у IV столітті до нашої ери. Однак, найбільш вичерпну теорію конічних перерізів розробив Аполлоній Пергеський у III столітті до н.е. Його праця "Начала" стала фундаментом для подальшого розвитку геометрії і донині вивчається у школах Англії.

Розглянемо теоретичні відомості про конус в підручниках.

«Круговим конусом називається фігура, що складається із круга і точки S, що не лежить у площині круга, і всіх відрізків, що сполучають цю точку з точками круга» [15].

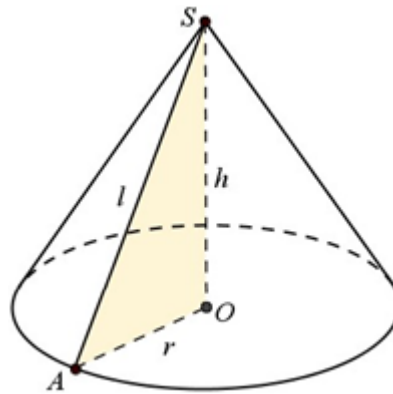


Рис. 1.1. Конус

Прямий круговий конус – це особливий вид конуса, в якому перпендикуляр, опущений з вершини конуса (точки S) на площину основи, проходить через центр цієї основи (точку O). Іншими словами, висота такого конуса є одночасно і віссю симетрії. Саме прямі кругові конуси найчастіше вивчаються в шкільному курсі геометрії. Їх можна уявити як результат обертання прямокутного трикутника AOS навколо катета OS . При цьому гіпотенуза SA опише бічну поверхню конуса, а катет OA – основу конуса – круг. Радіус круга називають радіусом конуса, точку S – вершиною конуса, відрізок SO – висотою, пряму SO – віссю конуса, SA – твірною конуса, де точка A лежить на колі основи.

Площина, що має з конусом лише одну спільну точку дотику, яка лежить на твірній конуса, називається дотичною площиною.

Перерізами поверхні конуса можуть бути частини параболи, гіперболи, еліпса та інших кривих.

У шкільному курсі вивчаються такі види перерізів конуса:

1. Осьові перерізи

Якщо площина перерізу проходить через вісь конуса, утворюється рівнобедрений трикутник (наприклад, $\triangle SAB$). У цьому трикутнику бічні сторони (SA і SB) є твірними конуса, а основа (AB) відповідає діаметру основи конуса.

2. Перерізи через вершину і хорду

Коли площина перерізу проходить через вершину конуса та перетинає його основу по хорді, у перерізі також утворюється рівнобедрений трикутник ($\triangle SAB$). У цьому випадку бічні сторони (SA і SB) є твірними

конуса, а основа (AB) – це хорда основи конуса.

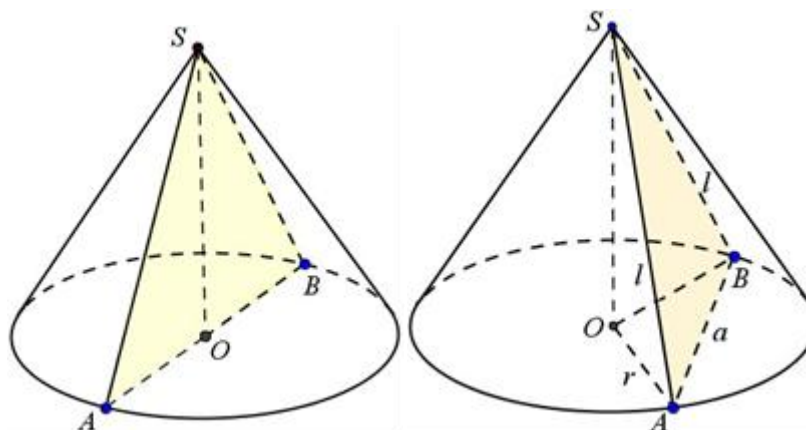


Рис. 1.2. Перетин конуса площинами

Такі площини перетинають конус по колу, відтинаючи при цьому конус (менший, з вершиною S та радіусом основи O_1B) та зрізаний конус

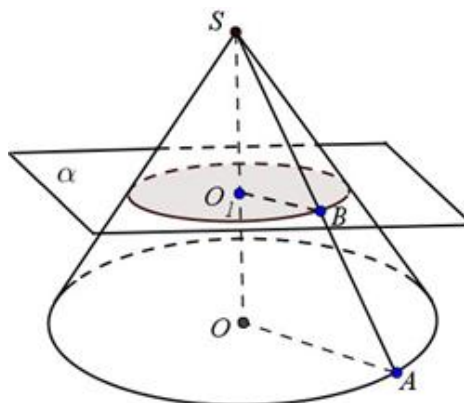


Рис. 1.3. Перетин конуса площиною

Обертаючи прямокутну трапецію O_1BAO навколо сторони O_1O , ми отримаємо геометричне тіло – зрізаний конус. При такому обертанні основи трапеції утворюють основи зрізаного конуса, а бічні сторони – його бічну поверхню.

На рисунку пряма OO_1 – вісь зрізаного конуса, відрізок OO_1 – висота, $AB = l$ – твірна зрізаного конуса, відрізки O_1B , OA – радіуси основ.

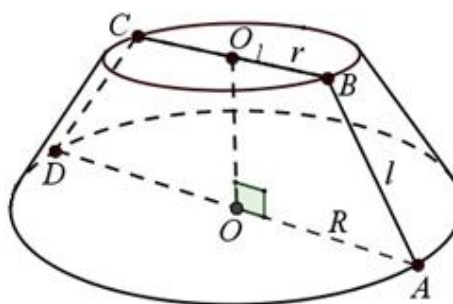


Рис. 1.4. Зрізаний конус

Аналогічно розглядають перерізи зрізаного конуса, отримують рівнобічні трапеції чи кола, інші перерізи (криві другого порядку) не розглядають.

Розгорткою бічної поверхні конуса є сектор, радіус якого дорівнює l , довжина дуги якого дорівнює $2\pi r$.

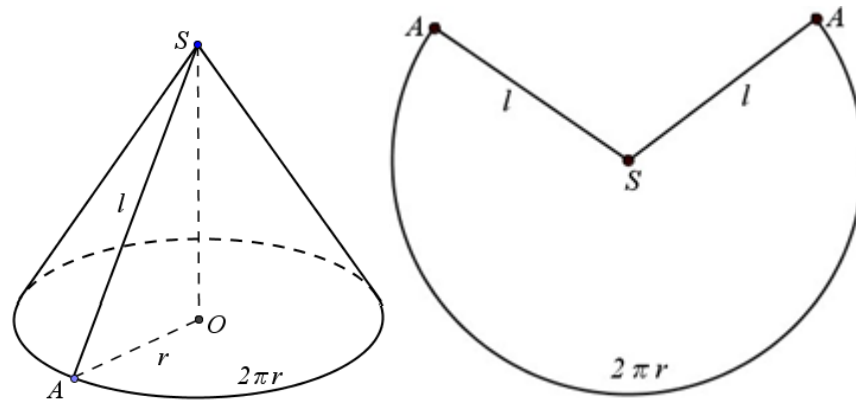


Рис. 1.5. Розгортка конуса

Формули для обчислення площ поверхонь та об'ємів

Площа бічної поверхні прямого кругового конуса визначається за формулою $S_{б.} = \pi r l$, де r – радіус кола, що є основою конуса, а l – довжина відрізка, який сполучає вершину конуса з будь-якою точкою кола основи (твірна). Щоб знайти площу всієї *поверхні* конуса, треба до площі її бічної поверхні $S_{б.}$ додати площу $S_{ос.}$ основи: $S_{повн.} = S_{б.} + S_{ос.}$, звідки $S_{повн.} = \pi r l + \pi r^2$, або $S_{повн.} = \pi r (l + r)$ [16].

Об'єм кругового конуса

$$V = \frac{1}{3} S_{ос.} \cdot h; \quad V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

де $S_{ос.}$ - площа основи, h - висота конуса, $h = \sqrt{l^2 - r^2}$

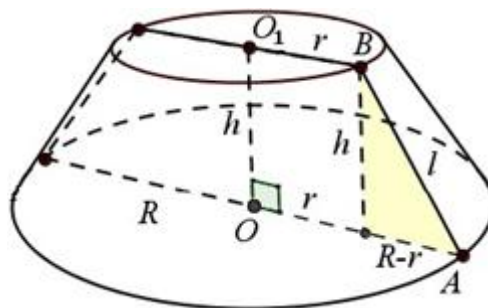


Рис. 1.6. Зрізаний конус

Площа бічної поверхні зрізаного конуса визначається як сума площ двох секторів, що є частинами його розгортки. Ця сума може бути виражена

формулою $S_6 = \pi r l + \pi R l$, де r і R – радіуси верхньої та нижньої основ відповідно, а l – довжина твірної. Спрощуючи цей вираз, отримуємо $S_6 = \pi(r+R)l$. Щоб знайти площу всієї *поверхні* зрізаного конуса, треба до площі її бічної поверхні S_6 додати площі двох її основ $S_{oc.1}$ і $S_{oc.2}$: $S_{повн.} = S_6 + S_{oc.1} + S_{oc.2}$, звідки $S_{повн.} = \pi r l + \pi R l + \pi r^2 + \pi R^2$.

Об'єм зрізаного конуса

$$V_{зріз.} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S_{oc.1} + \sqrt{S_{oc.1} S_{oc.2}} + S_{oc.2})$$

де $S_{oc.1}$ і $S_{oc.2}$ площі основ, h – висота конуса або

$$V = \frac{1}{3} \pi h \cdot (r^2 + rR + R^2), \text{ де } h = \sqrt{l^2 - (R - r)^2}$$

Для найкращого запам'ятовування формул після їхнього виведення, доцільно акцентувати увагу учнів на тому що конус (зрізаний конус) у тривимірному просторі (3D) «звужуються» догори, а тому у об'ємах тіл маємо третину добутку площі основи на висоту.

Висновки до розділу

У першому розділі проведено детальний аналіз змісту теми "Конус". Дослідження було спрямоване на аналіз методик викладання теми "Конус" у сучасних підручниках з математики та навчальних програмах різного рівня. Порівняльний аналіз підручників авторських колективів: А. Мерзляк, Д. Номіровський, В. Полонський, М. Якір; Є.; Нелін, О. Долгова; О. Істер, О. Єргіна дозволив виявити особливості подачі матеріалу, зокрема, логічні зв'язки між поняттями та послідовність викладу. Було встановлено, що автори дотримуються схожої схеми: від простого до складного, починаючи з базових понять і поступово ускладнюючи матеріал. Особливу увагу було приділено аналізу методів введення нових понять та використанню аналогій, наприклад, зіставленню звичайного та зрізаного конуса. Отримані результати дозволяють зробити висновки про найбільш ефективні методи навчання цій темі та розробити рекомендації для вчителів.

Для досягнення мети – ефективного засвоєння учнями знань про конус в умовах обмеженого часу – було прийнято рішення про використання інформаційно-комунікаційних технологій. Застосування 3D-моделювання дозволяє не лише візуалізувати геометричні об'єкти, але й створити динамічні моделі, що ілюструють різні властивості конуса.

РОЗДІЛ 2. ВИКОРИСТАННЯ КОМП'ЮТЕРНИХ 3D МОДЕЛЕЙ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧ НА КОНУСИ

2.1. Огляд програмного забезпечення для 3D-моделювання конуса

З початку ХХІ століття комп'ютери стали невід'ємною частиною освітнього процесу, трансформуючи його з традиційного в інтерактивне. Застосування комп'ютерів як носіїв навчальних матеріалів та динамічних наочностей дозволяє створювати відкрите навчальне середовище, яке поєднує в собі традиційне та дистанційне навчання (К. Польгун). Особливо важливим є використання комп'ютерів для вивчення стереометрії, де наочність відіграє ключову роль у розумінні просторових відношень.

Однією з важливих характеристик педагогічного програмного засобу вважаємо інтерактивність, тобто безпосередній відгук системи на дії користувача. З огляду на це окремі програмні засоби математичного спрямування, які дозволяють організувати інтерактивний процес дослідження або інтерактивну візуалізацію аналітичних чи геометричних властивостей певного математичного об'єкта або конструкції, можна вважати педагогічними, тобто такими, які варто використовувати у математичній підготовці.

Важливу роль при вивченні математики відіграє унаочнення матеріалу, що вивчається. І. С. Якіманська зазначає, що унаочнення може виконувати як ілюстративну функцію, так і функцію пояснювальну, операторну, тобто не тільки ілюструвати зміст знань, а й інтерпретувати, показувати спосіб дії з матеріалом [22]. Використання ІКТ засобів унаочнення, таких як пакети динамічної геометрії, надає можливість формувати у школярів образне мислення, що є необхідною умовою ефективного засвоєння знань.

Як зазначає С. А. Раков [14, 16], плідною ідеєю використання ІКТ у математичних дослідженнях та навчанні математиці була ідея побудови інтерактивних систем для конструювання та маніпулювання геометричними моделями з динамічними вимірюваннями та обчисленнями їх характеристик. Сьогодні пакети динамічної геометрії (DGS – Dynamic Geometry Systems) широко використовуються у всьому світі як професіоналами – математиками, так

і педагогами, викладачами, студентами та школярами. У більшості країн Європи ці системи рекомендовані для використання у навчальному процесі (першою з цих країн була Австрія), більш за те, окремі розділи навчальних програм орієнтовані на використання DGS.

Українські дослідники, такі як М. Жалдак, Ю. Горошко, Є. Вінниченко, С. Раков, Т. Крамаренко, В. Ракута та інші, протягом тривалого часу вивчають можливості використання систем динамічної математики, зокрема GeoGebra, у процесі навчання математики в загальноосвітніх навчальних закладах. Їхні роботи охоплюють широкий спектр питань, від теоретичного обґрунтування застосування таких систем до розробки практичних методичних рекомендацій. Зокрема, М. Хохенватер [2], В. Ракута [5], Р. Зіатдинова [3], О. Семеніхіна [6], М. Друшляк [6] детально описують можливості GeoGebra для візуалізації геометричних об'єктів, побудови динамічних моделей та розв'язання різноманітних математичних задач. Результати їхніх досліджень свідчать про високу ефективність використання GeoGebra в навчальному процесі, що сприяє підвищенню мотивації учнів, розвитку їхніх математичних компетентностей та глибшому розумінню навчального матеріалу.

Огляд наукової педагогічної та методичної літератури у галузі навчання математики свідчить про те, що загалом досліджується два класи програмних засобів математичного спрямування, хоча водночас розробниками програмного забезпечення пропонується широкий вузько орієнтованих програм (графопобудовники, системи математичної статистики тощо) [2]. Перший клас включає системи комп'ютерної математики, в яких використовуються традиційні позначення та способи написання формул (Maple, MatLab, Maxima тощо). Ці системи особливо ефективні при розв'язуванні різноманітних прикладних задач, насамперед задач математичного моделювання в науці й техніці [3; 4; 5].

До другого класу відносять програми динамічної математики (далі – ПДМ), у яких передбачено не лише можливість креслення точних рисунків, побудови різноманітних графіків, відшукування коренів рівнянь, нерівностей та

їх систем тощо, що без середовища є ускладненим, а й можливість динамічних змін вихідної математичної конструкції, вивчення набору її числових характеристик чи їх відношень у динаміці (GeoGebra, Mathkit або Математический конструктор, DG, Gran, Cabri, Живая математика і подібні до них) [6; 7; 8].

Світовими лідерами серед пакетів DGS є наступні пакети: Cabri (Франція), SketchPad (США), Cinderella (ФРН), GEONExT (ФРН) та GeoGebra (США); в Україні створено два пакети динамічної геометрії: Gran–2D (науковий керівник М. І. Жалдак, програміст О. І. Вітюк), DG (науковий керівник С. А. Раков, програміст К. О. Осенков). Рівень розробок цих пакетів відповідає світовим, обидва пакета рекомендовані Міністерством освіти і науки, молоді та спорту України для використання у навчальному процесі у загальноосвітніх навчальних закладах і входять у державну поставку програмних засобів, які виконуються науково-методичним центром МОНМС України паралельно з поставками навчальних комп'ютерних класів.

Для створення тривимірних моделей геометричних об'єктів можна використовувати програму GRAN-3D [2], яка входить до складу серії програм GRAN, розроблених в Інституті кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України. На відміну від популярного веб-сервісу GeoGebra, GRAN-3D є десктопною програмою, що потребує встановлення на комп'ютер. Незважаючи на те, що інтерфейс GRAN-3D може здатися складнішим для новачків через велику кількість інструментів і налаштувань (рис. 2.1), він надає широкі можливості для створення складних тривимірних моделей та анімацій.

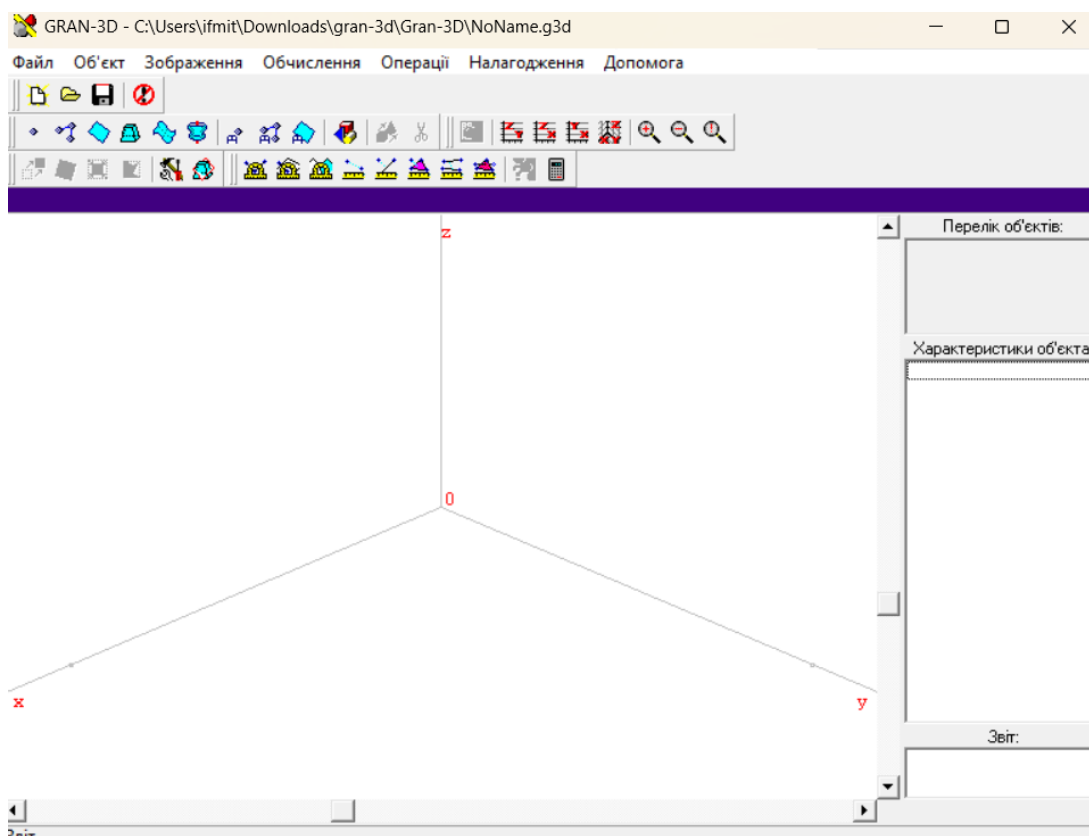


Рис. 2.1. Головне вікно GRAN-3D

Наявне меню для створення базових об'єктів (рис. 2.2).

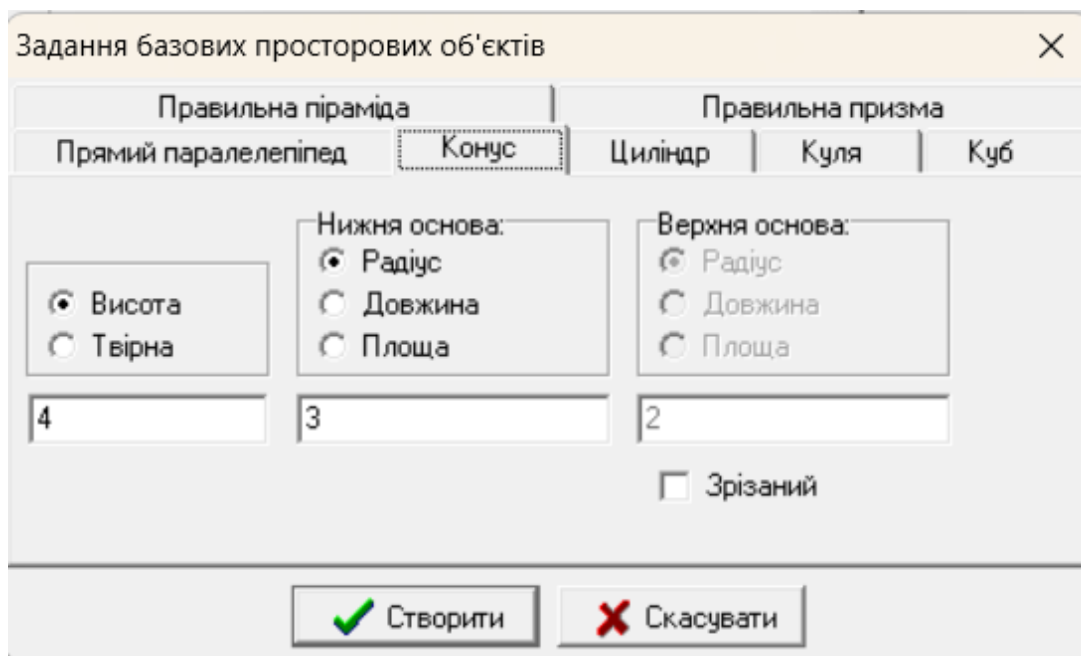


Рис. 2.2. Меню для створення фігур

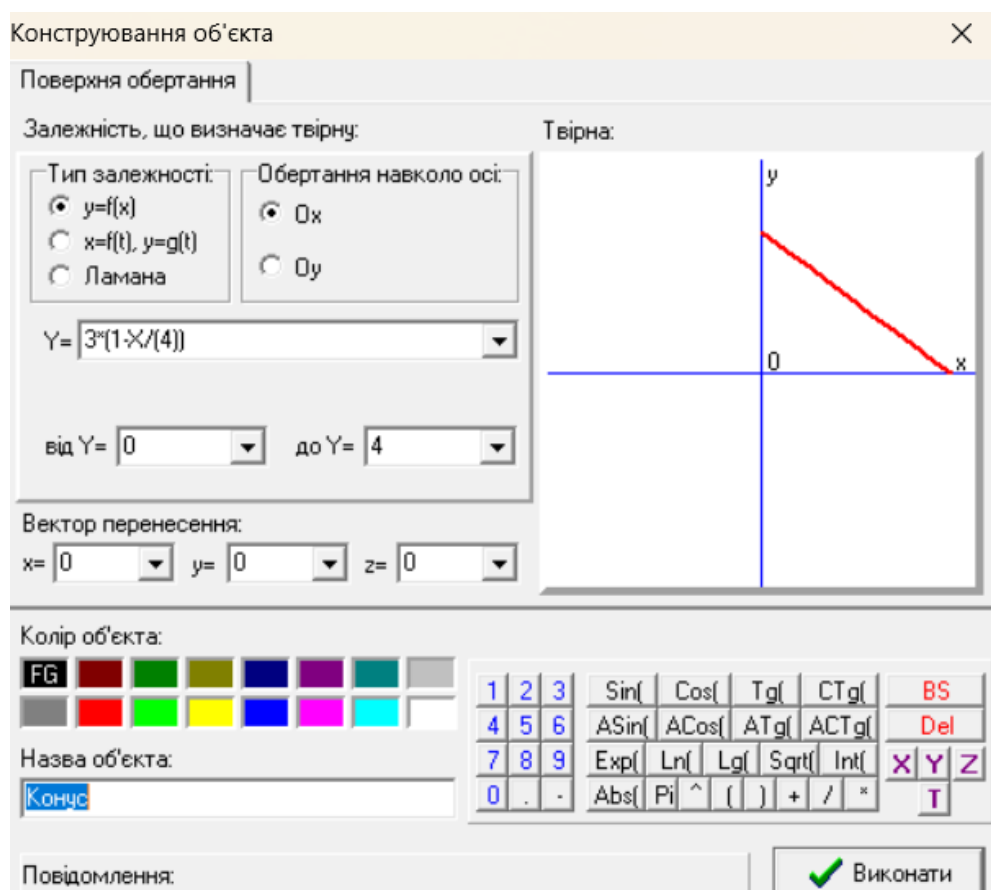


Рис. 2.3. Меню для конструювання об'єкту

У програмі GRAN-3D одразу обчислюються всі базові характеристики фігури (рис. 2.4).

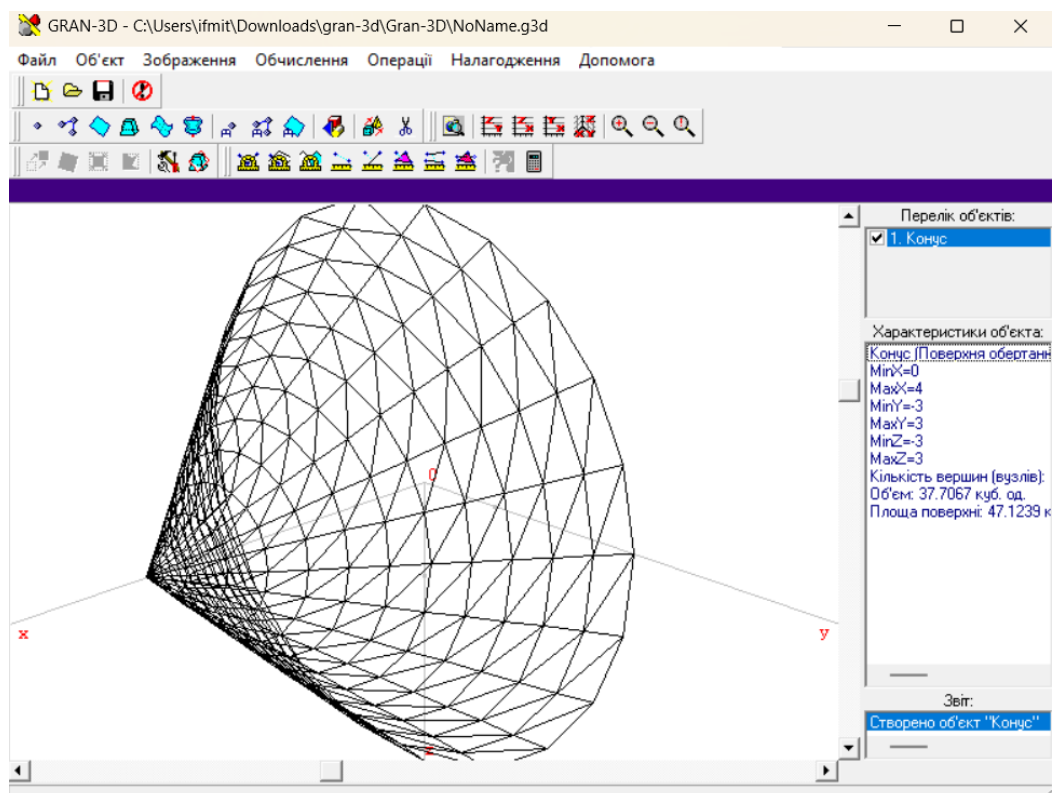


Рис. 2.4. Приклад побудови конуса

На даний момент перед авторами цих пакетів стоять спільні проблеми [14, 17]:

- 3D – проблема: створити потужний і зручний 3D – варіант динамічної геометрії;
- G – програмування: створити мову програмування, яка орієнтована на програмування побудов геометричних об'єктів і маніпулювання ними;
- CAS – інтеграція: інтегрувати пакети динамічної геометрії з пакетами комп'ютерної алгебри для забезпечення роботи у режимах наближених або точних обчислень за вибором користувача.

Остання проблема є частково вирішеною у мобільній СКМ MathPiper, що інтегрує в собі системи динамічної геометрії та комп'ютерної алгебри.

GeoGebra є вільно доступним програмним забезпеченням, що дозволяє виконувати як геометричні побудови, так і алгебраїчні обчислення. Система динамічної геометрії GeoGebra розробляється М. Хохенвартером мовою програмування Java. Оскільки GeoGebra має зручний та простий у використанні інтерфейс, локалізований користувачем, то й застосування його в процесі навчання не викликає труднощів у школярів. Цей програмний пакет дозволяє створювати інтерактивні математичні моделі та здійснювати різноманітні обчислення. Зокрема, він надає можливості:

1. Проводити точні та наближені обчислення: виконувати арифметичні операції, алгебраїчні перетворення, розв'язувати рівняння та нерівності, обчислювати значення функцій, їх похідні та інтеграли.
2. Візуалізувати математичні об'єкти: будувати графіки функцій, досліджувати геометричні фігури, створювати діаграми та гістограми для представлення даних.
3. Анімувати графічні зображення: створювати динамічні моделі, що дозволяють досліджувати зміни математичних об'єктів залежно від зміни параметрів.
4. Створювати та зберігати документи: оформляти результати

обчислень і графіків у вигляді звітів, презентацій та веб-сторінок.

GeoGebra створена для людей, які не мають глибоких знань в програмуванні, але володіють базовими навичками роботи з комп'ютером. СКМ GeoGebra задовольняє всім технічним, ергономічним та естетичним вимогам, що пред'являються до програмного засобу педагогічного призначення та мають передумови до того, щоб при належній підготовці задовольняти педагогічні вимоги. Розробкою методик використання GeoGebra займається міжнародний інститут GeoGebra, українське представництво якого у 2010 році відкрито в Харківському національному університеті ім. Г. С. Сковороди [12].

Цей додаток доступний як мобільна програма для смартфонів, так і у вигляді веб-версії для комп'ютерів. Для роботи з додатком необхідне підключення до Інтернету. Крім того, існує окрема 3D-версія для персональних комп'ютерів. GeoGebra – це універсальний інструмент, який працює на різних операційних системах і пристроях. Ознайомитися з його інтерфейсом можна за посиланням <https://www.geogebra.org/>.

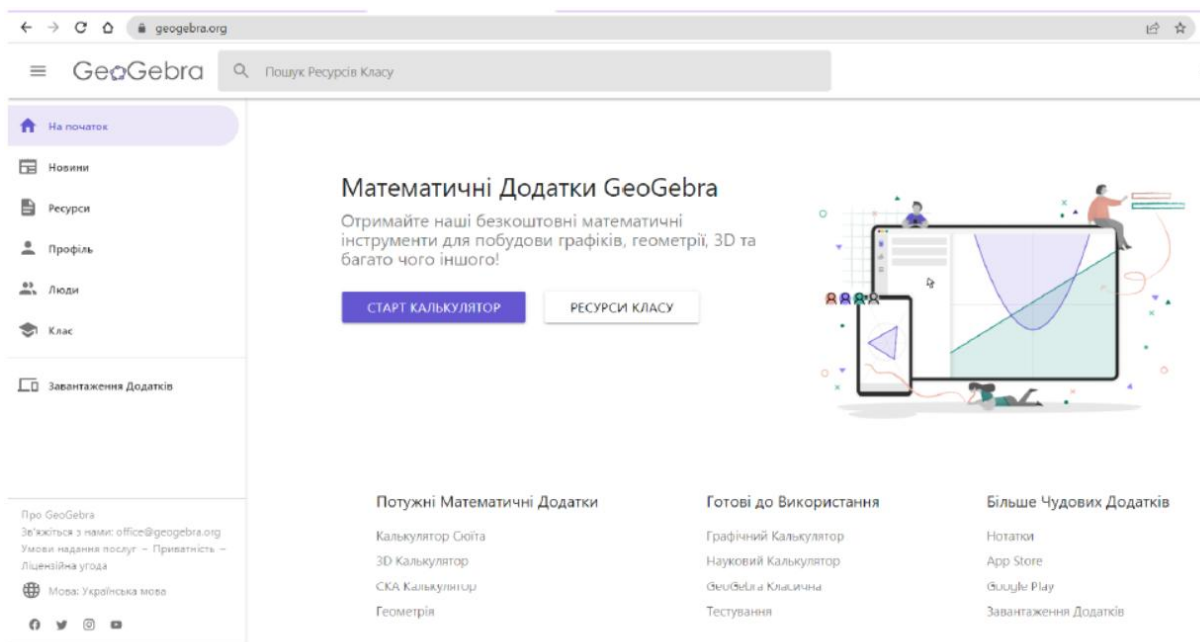


Рис. 2.5. Головна сторінка GeoGebra

Інтерфейс програми надзвичайно простий і зрозумілий, що дозволяє учням швидко освоїти її без зайвих зусиль. Навіть без поглиблених інструкцій, учні зможуть легко розібратися з основними функціями. Наприклад, побудова конуса

в цій програмі є дуже інтуїтивною. Для додаткової допомоги можна скористатися відео-інструкцією.

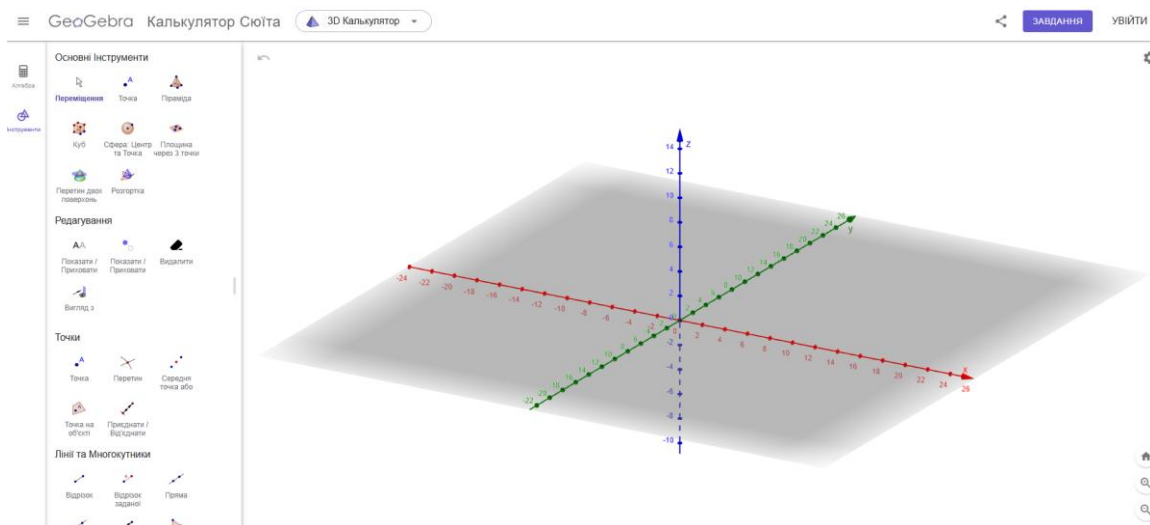


Рис. 2.6. 3D калькулятор та меню

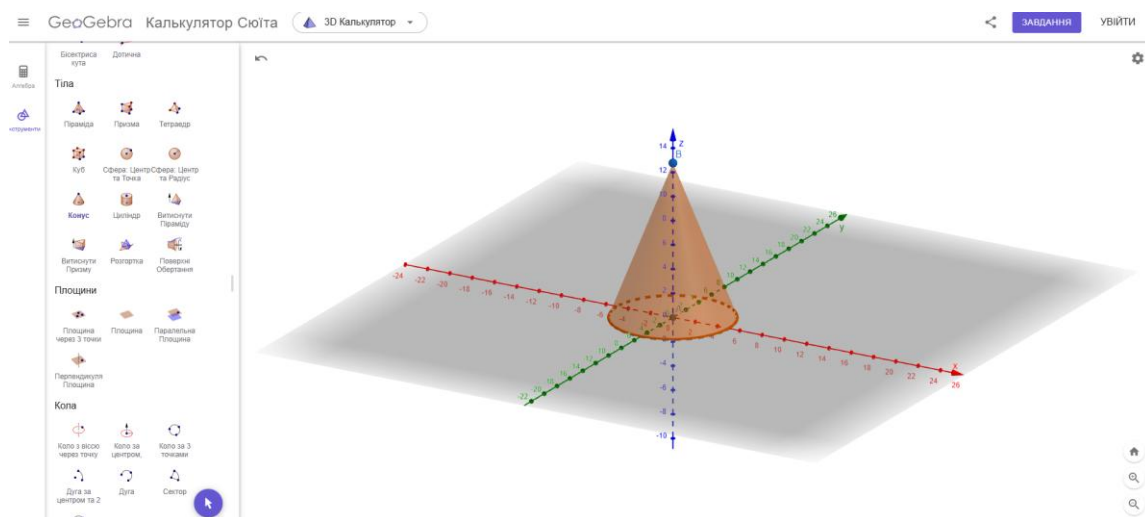


Рис. 2.7. Приклад побудови конуса

GeoGebra дозволяє створювати геометричні фігури як за допомогою інструментів побудови, так і шляхом введення рівнянь. Унікальною особливістю програми є функція доповненої реальності, яка дозволяє проєктувати 3D-моделі геометричних фігур у реальний простір. Завдяки функції доповненої реальності, ви можете створювати дивовижні 3D-моделі та експериментувати з різними комбінаціями геометричних об'єктів. Крім того, GeoGebra надає можливість створювати розгортки фігур та налаштовувати їх зовнішній вигляд (колір, прозорість).

На відміну від попереднього розглянутого додатка, **Cabri 3D** є комерційною програмою, яка вимагає завантаження на персональний комп'ютер. Однак, перед покупкою можна скористатися місячним пробним періодом, щоб оцінити всі її можливості. Варто зазначити, що Cabri 3D не має онлайн-версії.

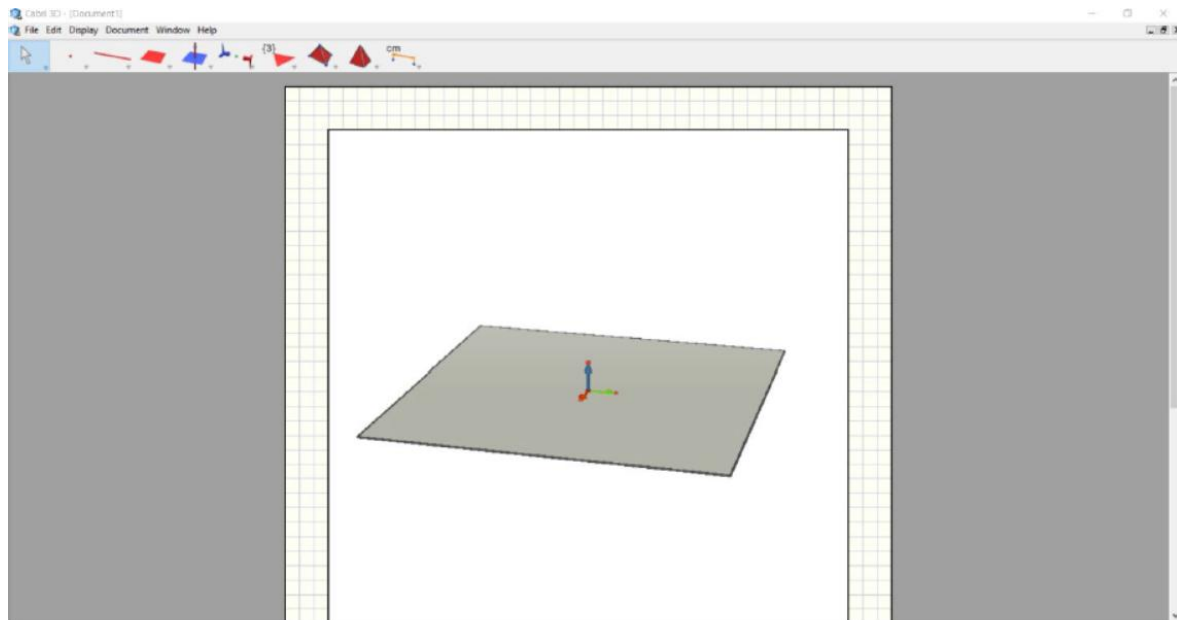


Рис. 2.8. Інтерфейс Cabri 3D

Cabri 3D – це інтерактивне програмне забезпечення, яке дозволяє створювати та досліджувати тривимірні геометричні об'єкти. Завдяки простому та інтуїтивно зрозумілому інтерфейсу (див. рис. 2.8), учні можуть легко освоїти програму. Однак, відсутність української мови може створювати певні труднощі при роботі. Cabri 3D підтримує побудову широкого спектру геометричних фігур, таких як прямі, площини, піраміди, конуси, тетраедри та багато інших. Крім того, програма дозволяє створювати розгортки геометричних тіл та досліджувати їх властивості.

Для створення 3D-моделей, зокрема конусів, можна скористатися безкоштовною онлайн-програмою **Tinkercad**. Її простий та інтуїтивний інтерфейс (див. рис. 2.9) дозволяє швидко освоїти основні функції програми. Однак, Tinkercad спеціалізується на створенні моделей для 3D-друку, тому можливості для побудови плоских фігур та аналізу окремих елементів моделі обмежені.

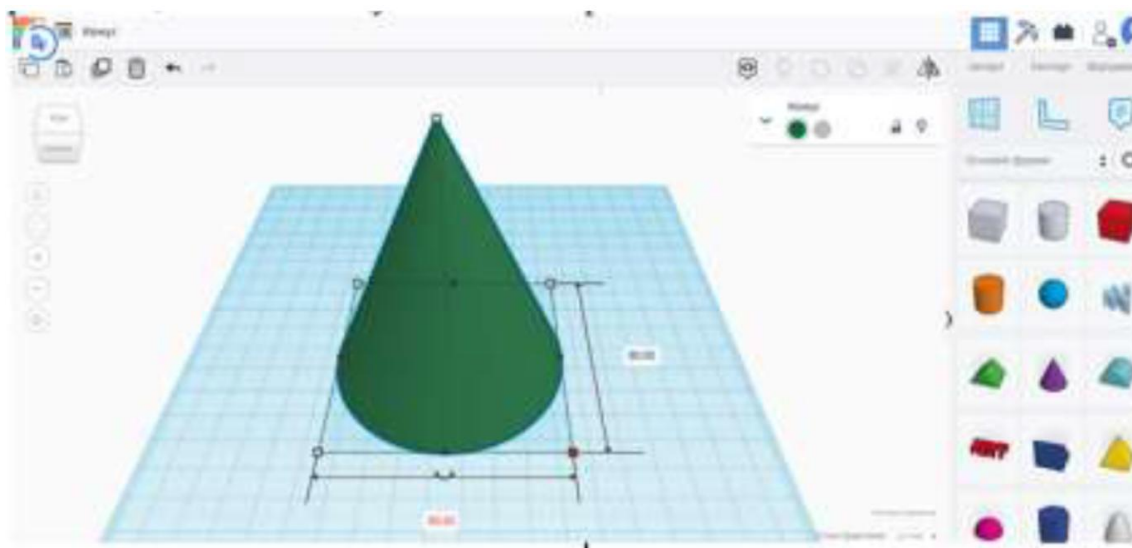


Рис. 2.9. Інтерфейс Tinkercad

Інтерфейси згаданих програм динамічної математики та принципи роботи в них дуже подібні: за допомогою миші та панелі інструментів можна представляти математичні об'єкти, наприклад, функції та графіки, робити обчислення, створювати певні геометричні об'єкти (точки, прямі, відрізки, кола, а також їхні конструкції), здійснювати динамічні зміни, фіксувати певні властивості, обчислювати значення довжин, кутів, площ тощо.

Нами проаналізовано низку комп'ютерних математичних програм з метою виявлення в них комп'ютерних математичних інструментів. Ми маємо глибоке переконання, що ці програми є комп'ютерним математичним інструментарієм, а також виконують функції певного середовища, де знаходиться підмножина різних комп'ютерних інструментів.

У таблиці 2.1 подано перелік комп'ютерних математичних інструментів у різних програмах.

Таблиця 2.1

Комп'ютерні інструменти, закладені у ПДМ

	Інструмент, доступний з панелі або меню	DG	Gran 1	Gran2D	Gran3D	Cabri	Cabri 3D	GeoGebra	GeoGebra 5.0	Живая математика	Математический конструктор
1	Калькулятор	+	+	+	+	—	—	+	+	+	+

	Інструмент, доступний з панелі або меню	DG	Gran 1	Gran2D	Gran3D	Cabri	Cabri 3D	GeoGebra	GeoGebra 5.0	Живая математика	Математический конструктор
2	Побудова точки, прямої, променю, відрізка, кола	+	–	+	–	+	+	+	+	+	+
3	Побудова дуги	+	–	+	–	+	+	+	+	+	+
4	Побудова сектора, сегмента	–	–	–	–	+	–	+	+	–	+
5	Побудова середини відрізка,	+	–	+	–	+	+	+	+	+	+
6	Поділ відрізка або кута на частини	–	–	–	–	+	–	–	–	–	+
7	Побудова перпендикуляра чи паралельної прямої	+	–	+	–	+	+	+	+	+	+
8	Побудова багатокутника	+	–		–	+	+	+	+	+	+
9	Визначення довжини, кута, площі	+	–	+	+	+	+	+	+	+	+
10	Побудова симетричної точки	+	–	+	–	+	+	+	+		–
11	Побудова дотичної до кривої	–	–		–	–	–	+	+	–	+
12	Побудова графіка функції, заданої явно і неявно	–	+	–	+	–	±	+	+	±	+
13	Побудова графіка функції, заданої параметрично	–	+	–	–	–	–	+	+	±	+
14	Перетворення графіків функцій	–	–	–	–	–	–	–	–	–	+
15	Дії над множинами	–	–	–	–	–	–	–	–	–	+
16	Побудова інтерполяційного полінома	–	+	+	–	–	–	+	+	–	+
17	Побудова многогранників	–	–	–	+	–	+	–	+	–	–
18	Керування просторовими об'єктами	–	–	–	±	–	+	–	+	–	–
19	Побудова площини, півплощини, виділення грані многогранника, побудова циліндра, конуса, сфери	–	–	–	±	–	+	–	±	–	–
20	Обчислення визначених інтегралів, розв'язування рівнянь і нерівностей різних типів, їхніх систем	–	+	–	±	–	–	±	±	–	–
21	Статистичне опрацювання	–	+	–	–	–	–	+	+	–	–

Вважаємо, що уміння оперувати представленими інструментами та використовувати їх у процесі вивчення математичних дисциплін характеризує вчителя як професіонала.

Зважаючи на результати порівняльного аналізу різних програмних засобів, для подальшого дослідження було обрано систему динамічної геометрії **GeoGebra**. Вибір на користь GeoGebra зумовлений кількома факторами. По-перше, інтуїтивно зрозумілий інтерфейс програми робить її зручною для використання учнями старшої школи. По-друге, GeoGebra є веб-застосунком, що не вимагає інсталяції на локальний комп'ютер, що забезпечує доступність з будь-

якого пристрою з підключенням до Інтернету та мінімізує вимоги до системних ресурсів. Крім того, наявність українського інтерфейсу значно полегшує процес навчання. І, нарешті, широкий функціонал GeoGebra, що включає різноманітні інструменти для побудови геометричних фігур, робить її незамінним інструментом для вивчення математики.

2.2. Інтеграція 3D-моделювання в процес навчання геометрії під час вивчення теми «Конус»

Стереометричні задачі відіграють важливу роль у шкільному курсі математики, оскільки для їх розв'язання необхідно інтегрувати знання з різних розділів математики, таких як арифметика, алгебра, тригонометрія, планіметрія, стереометрія та основи математичного аналізу. Поєднання арифметичних обчислень, геометричних побудов, досліджень та задач на доведення властивостей геометричних фігур сприяє розвитку просторової уяви та підвищенню рівня математичної культури.

Втім, розв'язання стереометричних задач нерідко викликає труднощі у школярів через недостатньо сформовану просторову уяву. Це пояснюється тим, що двовимірний рисунок на площині не завжди може адекватно передати властивості тривимірних геометричних тіл.

Одним із ключових етапів успішного розв'язання задач є правильна побудова рисунка, адже від його точності та наочності залежить швидкість і правильність отримання результату.

Сучасні технології, зокрема 3D моделювання, відкривають нові можливості у вивченні стереометрії. Використання тривимірних моделей дозволяє оглядати об'єкти з усіх боків, змінювати ракурс, виконувати обертання та коригування, а також демонструвати їх динамічні властивості. Більше того, створені 3D моделі можуть бути багаторазово використані для навчальних цілей або для виготовлення прототипів і макетів, що додає їм практичної цінності.

Перед створенням тривимірної моделі необхідно ретельно проаналізувати геометричну фігуру та її складові, пригадати базові визначення та властивості. На уроках геометрії перехід від двовимірного зображення до тривимірного та

маніпуляції з такими об'єктами дозволяють ефективніше пояснювати складні елементи.

Використання технологій 3D моделювання в освітньому процесі має численні переваги:

- скорочення часу, необхідного для пояснення нового матеріалу;
- відповідність навчання сучасним освітнім стандартам;
- підвищення продуктивності роботи викладача;
- створення якісних тривимірних і складних зображень;
- складання розгорток об'ємних фігур за їх проєкціями та у зворотному порядку;
- зміна структури об'єкта, його просторового положення, а також можливість «розглядати фігуру з різних перспектив»;
- розпізнавання фігур та їхніх елементів за ознаками або властивостями;
- побудова просторових фігур на площині;
- розвиток навичок роботи з проєкційними кресленнями;
- формування точності у візуальній оцінці розмірів та положення геометричних об'єктів у просторі чи на площині.

3D технології можна застосовувати не лише під час уроків, а й у позаурочній та колективно-творчій діяльності, для виконання додаткових завдань чи домашніх робіт.

Науковці наголошують, що у навчальному процесі найчастіше задіюється активна репродуктивна уява, яка дозволяє учню, докладаючи зусиль, «відтворити конкретний образ ситуації на основі доступної інформації або відомостей» [11]. Наприклад, це може бути створення тривимірного образу геометричної фігури за її описом чи двовимірним зображенням.

2.3. Основні типи задач на конуси та їх розв'язування з використанням комп'ютерних 3D моделей

У шкільному курсі геометрії учні стикаються з різноманітними типами задач, серед яких особливе місце займають задачі на побудову, обчислення, доведення та дослідження.

1. Задачі на побудову

Розв'язання задач на побудову передбачає створення геометричної фігури за допомогою певних інструментів. Згідно з [4], процес розв'язання таких задач включає аналіз умови, власне побудову, доведення правильності побудови та дослідження отриманої фігури. Оскільки для розв'язання задач на побудову зазвичай використовують традиційні інструменти (циркуль, лінійка), застосування комп'ютерних програм у цьому випадку є недоцільним. Тому в подальшому ми зосередимося на інших типах задач, для розв'язання яких комп'ютерне моделювання може бути ефективним інструментом.

2. Задачі на обчислення

Задачі на обчислення в геометрії передбачають знаходження конкретних числових значень для елементів геометричних фігур. Як зазначає [4], метою таких задач є визначення невідомих розмірів, площ, об'ємів тощо, використовуючи геометричні властивості фігур та алгебраїчні співвідношення. Загальний алгоритм розв'язання задач на обчислення включає такі етапи:

- 1) побудова схематичного малюнка;
- 2) позначення невідомих величин змінними;
- 3) складання рівнянь на основі відомих геометричних властивостей;
- 4) розв'язання отриманих рівнянь;
- 5) перевірка отриманого результату.

Розглянемо приклад задачі на обчислення площі поверхні тіла обертання. Нехай маємо рівнобедрений трикутник ABC з бічною стороною a та кутом при вершині 120° . Якщо обернути цей трикутник навколо основи BC, то утвориться тіло обертання. Задача полягає в обчисленні площі поверхні цього тіла.

Для розв'язання цієї задачі ефективно використовувати програмне забезпечення GeoGebra. Воно дозволяє візуалізувати тривимірні об'єкти та їхні перерізи, що значно полегшує розуміння задачі.

Алгоритм розв'язання в GeoGebra:

1. **Побудова трикутника.** На площині побудуємо рівнобедрений трикутник ABC з заданими параметрами.
2. **Побудова осі обертання.** Проведемо пряму p , яка проходить через основу BC трикутника.
3. **Отримання тіла обертання.** За допомогою інструменту обертання побудуємо тіло, утворене обертанням трикутника ABC навколо прямої p .
4. **Обчислення площі поверхні.** Використовуючи вбудовані функції GeoGebra, обчислимо площу поверхні отриманого тіла.

Розв'язування. Встановимо додаткове полотно Вид/Полотно 3D, на якому побудуємо необхідну фігуру. В Полотні на осі Ox побудуємо точки B і C та відрізок BC. За допомогою інструмента Кут заданої величини побудуємо $\angle ABC = 120^\circ$ (повертаємо точку B навколо точки C на 120°).

Обираємо інструмент Паралельні прямі та будуємо пряму p , яка проходить через точку $P(2, 0)$ паралельно Ox та пряму s , яка проходить через точку A паралельно осі Oy . Використовуючи інструмент Відрізок будуємо $\triangle ABC$ та відрізок AO. За допомогою інструмента Повзунок, створюємо повзунок на полотні. У вікні яке з'явилося задаємо ім'я (α), значення повзунка (кут) та його інтервал. На Полотно 3D вибираємо інструмент Обертати об'єкт навколо прямої та обертаємо прямі BA і AC навколо прямої p .

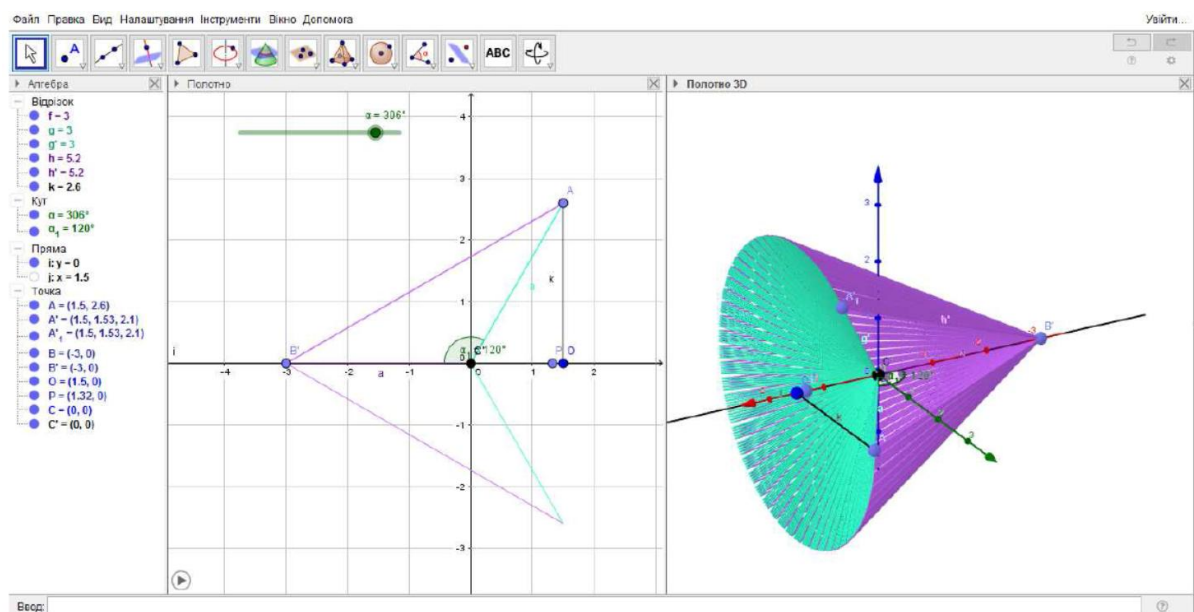


Рис. 2.10. Інтерактивне поєднання 2D і 3D зображень під час розв'язання задач

Аналізуючи рисунок 2.10, ми бачимо, що в результаті обертання отримано геометричне тіло, яке можна уявити як конус з радіусом основи OA і висотою BO , з якого вирізано інший конус з тим самим радіусом основи OA , але меншою висотою CO . Тоді площа утвореної фігури дорівнює сумі площ бічних поверхонь цих конусів, тобто $S = S_{BO} + S_{CO}$, де $S_{BO} = \pi \cdot AO \cdot AB$ і $S_{CO} = \pi \cdot AO \cdot AC$.

3. Задачі на доведення

Задачі на доведення в геометрії вимагають від нас довести істинність певного твердження про геометричні фігури. Для розв'язання таких задач ми використовуємо логічні міркування, спираючись на аксіоми геометрії та раніше доведені теореми. Залежно від умови задачі, ми можемо або вважати існування описаних геометричних фігур доведеним, або доводити це існування самостійно. Загальний алгоритм розв'язання задачі на доведення включає: побудову схематичного малюнка, формулювання умови та висновку, а також логічні міркування, які ведуть до доведення висновку.

4. Задачі на дослідження

Задачі на дослідження в геометрії передбачають проведення певних досліджень, таких як порівняння, аналіз, пошук умов існування тощо. Типові запитання в таких задачах звучать так: "Чи можна...", "Як зміниться...", "Чи правильно...". Ці задачі часто можна звести до задач на обчислення або доведення, використовуючи вже відомі алгоритми. Тому, з точки зору використання 3D-моделювання, немає необхідності виділяти їх в окрему категорію. Хоча моделі часто використовуються вчителями для пояснення нового матеріалу, учні зазвичай лише спостерігають за демонстрацією, не маючи можливості самостійно працювати з ними (див. рис. 2.11).

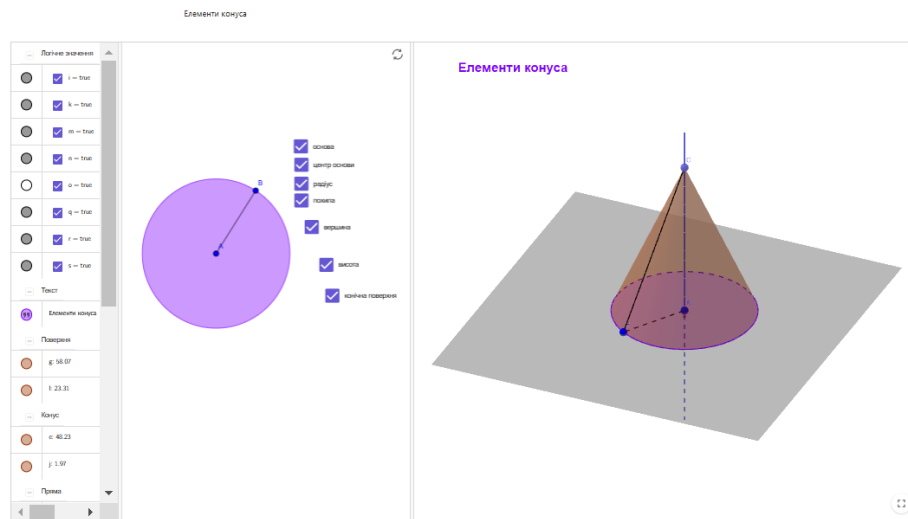


Рис. 2.11. Частина уроку, де учням демонструються моделі для пояснення нового матеріалу

Проаналізувавши різні типи геометричних задач та можливості 3D-моделювання, ми дійшли висновку, що найбільш ефективним використанням таких програм на уроках геометрії є розв'язання задач на обчислення та доведення. Крім того, 3D-моделі можуть бути корисними для візуалізації нових понять та ідей. Однак, сучасна практика використання 3D-моделювання в освітньому процесі має значний недолік: учні найчастіше є лише пасивними спостерігачами, не маючи можливості активно взаємодіяти з моделями.

2.4. Методичні рекомендації щодо використання GeoGebra для вивчення конуса

Для забезпечення ефективного використання GeoGebra на уроках стереометрії необхідно врахувати кілька важливих аспектів. По-перше, учні повинні бути ознайомлені з основними інструментами програми. По-друге, важливо поступово ускладнювати завдання, починаючи з простих двовимірних побудов і поступово переходячи до більш складних тривимірних моделей. Крім того, слід дотримуватися регламенту використання електронних пристроїв на уроці [26]. Інтеграція з курсом інформатики, де вивчаються 3D-моделі, дозволить глибше зануритися в тему і розвинути в учнів просторове мислення. Для полегшення роботи з GeoGebra, варто розробити детальні покрокові інструкції, які будуть доступні для учнів різного рівня підготовки.

Інструкція щодо роботи в програмі GeoGebra: початок

Щоб розпочати роботу з **GeoGebra**, виконайте такі дії:

1. *Авторизація*. Відвідайте сайт <https://www.geogebra.org/> та увійдіть у свій аккаунт або створіть новий.
2. *Запуск калькулятора*. Натисніть кнопку "Старт Калькулятор" (див. рис. 2.12).

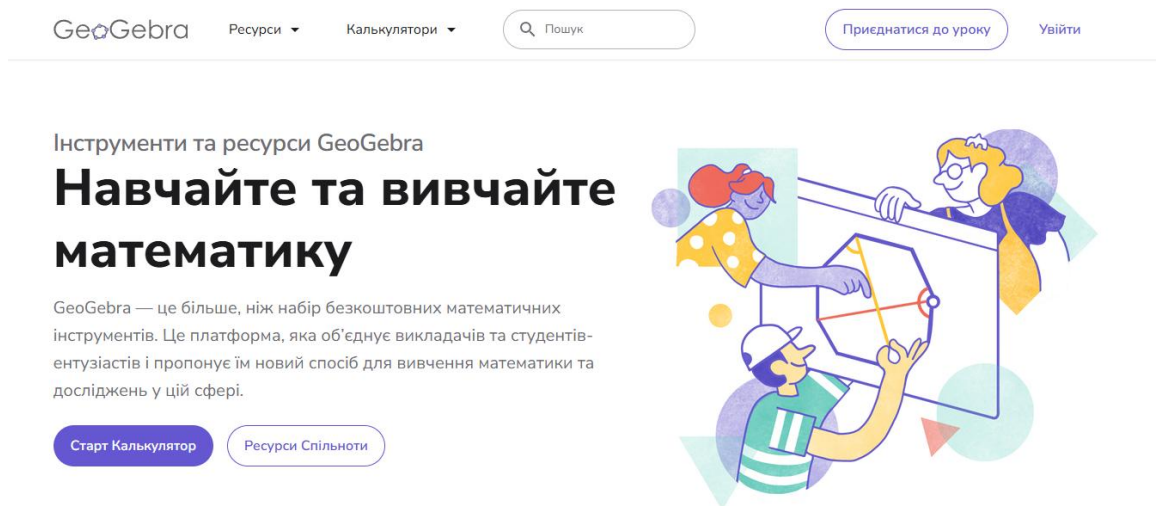


Рис. 2.12. Початок роботи в програмі GeoGebra

3. *Вибір режиму*. У верхньому меню виберіть потрібний режим роботи (див. рис. 2.13). Це дозволить налаштувати програму під конкретне завдання.

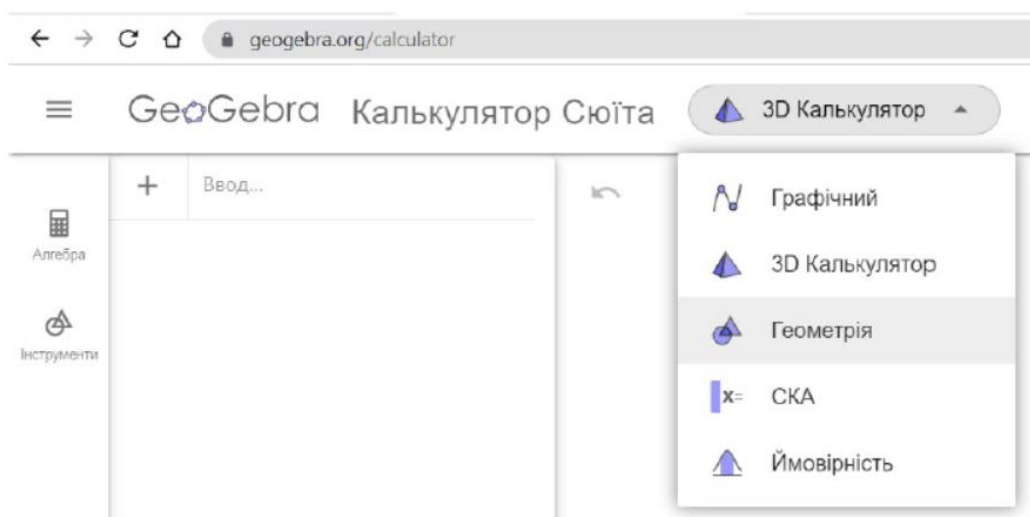


Рис. 2.13. Меню вибору режимів роботи





Інструкція щодо роботи в програмі GeoGebra: побудова Конуса

GeoGebra пропонує кілька способів побудови конуса, в залежності від того, яка інформація про конус вам відома:

- Якщо відома основа у формі кола та висота, знадобиться Пункт 4.
- Якщо відомий центр основи, вершина та радіус, знадобиться Пункт 4 або Пункт 5.
- Якщо дано точку на основі, відомий вектор та кут, знадобиться Пункт 5.

Інструкція GeoGebra 1

Побудова конуса за основою у формі кола та висотою

1. Відкрийте вікна "Алгебра" та "Полотно"  у меню "Вид" .
2. Використати інструмент Circle with Center through Point  чи Коло: Центр та Радіус , щоб побудувати коло на площині Полотно.
3. У вікні "Алгебра" введіть команду Конус(Коло, Висота).
4. Замість "Коло" підставте назву намальованого кола, а замість "Висота" введіть бажану висоту конуса (наприклад, 2).


: Конус з'явиться у тривимірному вигляді у вікні "Полотно 3D". Його об'єм буде автоматично обчислений і відображений у вікні "Алгебра".

Приклад 1. Щоб побудувати конус з радіусом основи 3 і висотою 2, намалюйте коло радіусом 3 і введіть команду Конус(коло1, 2), якщо коло назвали "коло1".

Щоб виконати це завдання, скористаємося четвертим пунктом інструкції. Спочатку побудуємо коло з радіусом 3 одиниці на площині "Полотно". Потім, у вікні "Алгебра", введемо команду "Конус(ім'я_кола, Висота)". Замість "ім'я_кола" підставимо назву того кола, яке ми щойно побудували, а замість "Висота" введемо число 2. Після цього, у тривимірному вигляді на площині "Полотно 3D" з'явиться конус з заданими параметрами.

Інструкція GeoGebra 2

Побудова конуса за допомогою інструмента Конус

1. Відкрийте вікна "Алгебра" та "Полотно 3D" у меню "Вид".
2. На панелі інструментів натисніть на кнопку "Конус" .

3. У вікні "Полотно 3D" створіть дві точки. Перша точка буде центром основи конуса, а друга – його вершиною.

4. Введіть радіус конуса.

Після виконання цих дій конус з'явиться у вікні "Полотно 3D", а його об'єм буде відображений у вікні "Алгебра".

Інструкція GeoGebra 3

Побудова конуса за центром основи, вершиною та радіусом



1. Відкрийте вікна "Алгебра" та "Полотно 3D" у меню "Вид".
2. У вікні "Алгебра" введіть команду Конус(Точка, Точка, Радіус).
3. Замість першого "Точка" введіть координати центра основи конуса (наприклад, $(0, 0, 0)$).
4. Замість другого "Точка" введіть координати вершини конуса (наприклад, $(0, 0, 6)$).
5. Замість "Радіус" введіть бажаний радіус основи (наприклад, 4).

Конус з'явиться у тривимірному вигляді у вікні "Полотно 3D". Його об'єм буде автоматично обчислений і відображений у вікні "Алгебра".

Приклад 2. Щоб побудувати конус з центром основи в точці $(0, 0, 0)$, вершиною в точці $(0, 0, 6)$ і радіусом 4, знадобиться пункт 4. Вводимо команду Конус (Точка, Точка, Радіус) у виді Алгебра. Потім вводимо значення у відповідні поля Конус($(0, 0, 0)$, $(0, 0, 6)$, 4), й конус з'явиться у виді Полотно 3D.

Інструкція GeoGebra 4

Побудова конуса за центром основи, вектором і кутом

1. Відкрийте вікна "Алгебра" та "Полотно 3D" під вкладкою  у меню "Вид" .
2. У вікні "Алгебра" введіть команду Конус(Точка, Вектор, Кут).
3. Замініть "Точка" на координати центру основи конуса (наприклад, $(3, 4, 0)$).
4. Замініть "Вектор" на координати вектора, який визначає напрямок висоти конуса (наприклад, $(1, 2, 0)$). Цей вектор вкаже, куди буде "дивитися" вершина конуса.

5. Замініть "Кут" на значення кута в радіанах. Наприклад, для кута 45 градусів потрібно ввести $\pi/4$.

Після виконання цих кроків конус буде побудований у вікні "Полотно 3D", а його об'єм з'явиться в вікні "Алгебра".

Приклад 3. Щоб побудувати конус з центром в точці (3, 4, 0), вектором напрямку (1, 2, 0) і кутом 45 градусів. Для розв'язання цього завдання використаємо пункт 5. Введемо Конус((3, 4, 0), (1, 2, 0), $\pi/4$). Конус з'явиться у виді Полотно 3D.

2.5. Розв'язування типових завдань ЗНО за допомогою 3D-моделей

Сертифікаційний тест з математики покликаний визначити, наскільки добре випускник школи підготовлений до подальшого навчання або професійної діяльності, яка вимагає застосування математичних знань. Тест охоплює широкий спектр математичних тем і оцінює як базові навички, так і здатність до аналітичного мислення. Хоча тест перевіряє різні математичні компетенції, згідно з даними (таблиця 2.1), спостерігається тенденція до зменшення кількості завдань з геометрії.

Таблиця 2.2

Кількісний розподіл завдань сертифікаційних робіт за розділом «Геометрія» [1-5]

Рік	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		З вибором 1 правильної відповіді	На встановлення відповідності	Відкрита форма з короткою відповіддю	Відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
2014	Планіметрія	3	1	2	-	6
	Стереометрія	4	-	1	-	5
2015	Планіметрія	3	1	1	1(підв. рів)	5(баз. рів),6(підв. рів)
	Стереометрія	3	1	1+1(підв. рів)	-	5(баз. рів), 6(підв. рів)
2016	Планіметрія	3	1	2	-	6
	Стереометрія	3	1	-	1	5
2017	Планіметрія	3	1	2	-	6

Рік	Змістові лінії	Форма завдання				Усього
		З вибором 1 правильної відповіді	На встановлення відповідності	Відкрита форма з короткою відповіддю	Відкрита форма з розгорнутою відповіддю	
	Стереометрія	3	1	-	1	5
2018	Планіметрія	3	1	2	-	6
	Стереометрія	3	1	-	1	5
2019	Планіметрія	3	1	2	-	6
	Стереометрія	3	1	-	1	5
2020	Планіметрія	3	1	2	-	6
	Стереометрія	3	1	1	1	6
2021	Планіметрія	3	1	1	-	5
	Стереометрія	2	1	1	1	5
2022 НМТ	Планіметрія	3	1	-	-	4
	Стереометрія	1	1	1	-	3
2023 НМТ	Планіметрія	3	1	-	-	4
	Стереометрія	2	-	1	-	3
2024 НМТ	Планіметрія	3	1	-	-	4
	Стереометрія	2	-	1	-	3

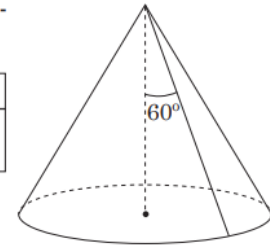
Хоча завдання на конус зустрічаються в тестах все рідше, відсоток учнів, які успішно справляються з такими завданнями, поступово зростає. Це свідчить про те, що загальний рівень просторового мислення та вміння працювати з тривимірними фігурами покращується. Однак, для подальшого підвищення ефективності навчання геометрії важливо надавати учням більше можливостей для практичної роботи з тривимірними моделями. Активне використання 3D-модельовання на уроках геометрії могло б ще більше посилити позитивну динаміку і дозволити учням більш впевнено розв'язувати завдання на конус та інші об'ємні фігури.

Проаналізувавши завдання за 2014-2024 роки, завдання на конуси зустрічалися в таких тестах:

ЗНО 2020 рік

11. Радіус основи конуса дорівнює r , твірна – l . Твірна утворює з висотою конуса кут 60° (див. рисунок). Визначте $\frac{r}{l}$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{r}{l} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{r}{l} = \frac{1}{2}$	$\frac{r}{l} = \frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{r}{l} = 2$	$\frac{r}{l} = \sqrt{3}$



Ключ	Відповіді учасників (%)					Не виконали завдання (%)	Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	А	Б	В	Г	Д				
А	55,5	21,6	10,2	4,2	8,2	0,3	55,5	56,8	0,4

Рис. 2.14. Психометричні характеристики завдань сертифікаційної роботи 2020 р [1]

Учасники тестування часто не могли правильно проаналізувати й зрозуміти інформацію, наведену в графічній формі (рисунок), зіставити її з текстовою частиною умови завдання, побудувати відповідну математичну модель. Лише 55,5 % вірно виконали завдання.

ЗНО 2018 рік

23. Циліндр і конус мають рівні об'єми та рівні радіуси основ. Площа основи циліндра дорівнює $25\pi \text{ см}^2$, а його об'єм – $100\pi \text{ см}^3$. До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

Закінчення речення

- | | | | |
|---|---------------------------------|---|--------|
| 1 | Висота циліндра дорівнює | А | 4 см. |
| 2 | Висота конуса дорівнює | Б | 5 см. |
| 3 | Радіус основи циліндра дорівнює | В | 8 см. |
| 4 | Твірна конуса дорівнює | Г | 12 см. |
| | | Д | 13 см. |

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1	2	3	4			
АГБД	20,1	21,6	14,5	7,4	36,3	54,5	79,6	0,8

Рис. 2.15 Психометричні характеристики завдань сертифікаційної роботи 2018 р [2]

Аналіз результатів виконання завдань сертифікаційної роботи показав, що понад 60 % учасників ЗНО особливі труднощі відчують при розв'язанні задач на застосування тригонометричних тотожностей. Порівняно з попередніми роками, частка учнів, які успішно виконали такі завдання, знизилася на 15%. Це свідчить про необхідність перегляду методики викладання тригонометрії в

школі.

ЗНО 2017 рік

24. Радіус основи конуса дорівнює r , а твірна – l . До кожного початку речення (1–4) доберіть його закінчення (А–Д) так, щоб утворилося правильне твердження.

Початок речення

- 1 Якщо площа бічної поверхні конуса втричі більша за площу його основи, то
- 2 Якщо висота конуса дорівнює радіусу його основи, то
- 3 Якщо проекція твірної на площину основи конуса удвічі менша за твірну, то
- 4 Якщо площа повної поверхні конуса дорівнює $5\pi r^2$, то

Закінчення речення

- А $l = 2r$.
- Б $l = \sqrt{2}r$.
- В $l = 3r$.
- Г $l = 4r$.
- Д $l = r$.

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1	2	3	4			
ВБАГ	11,2	26,5	28,6	10,7	23,0	52,0	61,0	0,7

Рис. 2.16 Психометричні характеристики завдань сертифікаційної роботи 2017 р [3]

Лише 23% змогли отримати максимальний бал за виконання даного завдання.

ЗНО 2016 рік

24. Установіть відповідність між геометричним тілом (1–4) та площею його повної поверхні (А–Д).

Геометричне тіло

Площа повної поверхні

- | | |
|--|-----------|
| 1 конус з радіусом основи 3 та твірною 5 | А 18π |
| 2 циліндр з радіусом основи 3 та висотою 4 | Б 24π |
| 3 куля радіуса $2\sqrt{3}$ | В 36π |
| 4 куб з ребром $\sqrt{3}\pi$ | Г 42π |
| | Д 48π |

Ключ	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів					Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rit)
	0	1	2	3	4			
БГДА	27,89	29,71	15,43	10,64	16,33	39,45	63,07	0,68

Рис. 2.17. Психометричні характеристики завдань сертифікаційної роботи 2016 р [4]

Результати зовнішнього незалежного оцінювання з математики виявили значні прогалини в знаннях учнів. Зокрема, лише 16% учасників змогли

правильно виконати завдання 24, що свідчить про поверхневе розуміння основних тригонометричних співвідношень. Крім того, багато учасників не впевнено застосовують теореми планіметрії та стереометрії, мають труднощі з обчисленням площ і об'ємів геометричних фігур, а також не можуть адекватно інтерпретувати графічну інформацію.

2015

30. Навколо конуса описано трикутну піраміду, площа основи якої дорівнює $50\sqrt{3}$, а периметр основи – 50. Визначте об'єм V цього конуса, якщо довжина його твірної дорівнює 4. У відповіді запишіть значення $\frac{V}{\pi}$.

Відповідь	Розподіл учасників (%) за кількістю набраних балів		Складність (P-value)	Дискримінація (D-index)	Кореляція (Rir)
	0	2			
8	93,94	6,06	6,06	21,03	0,47

Рис. 2.18 Психометричні характеристики завдань сертифікаційної роботи 2015 р (базовий рівень) [5]

Приклад 1. (ЗНО, 2009 р.). Радіус основи конуса R , твірна нахилена до площини основи під кутом α . Через вершину конуса проведено площину під кутом φ до його висоти. Ця площина перетинає основу конуса по хорді. Знайдіть площу утвореного перерізу.

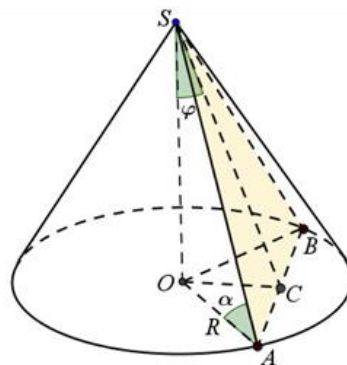


Рис. 2.19. Конус з твірною під кутом α

Розв'язання. Виконаємо рисунок. SO – висота, AB – хорда, SAB – переріз, AOB – рівнобедрений трикутник ($AO=OB=R$), OC – медіана, бісектриса, висота трикутника AOB . Оскільки SO – перпендикуляр до основи, то пряма SO перпендикулярна до будь-якої прямої площини основи: $SO \perp AB$. Оскільки і $OC \perp AB$, то уся площина $SOC \perp AB$. А тому проекцією прямої SO на площину SAB буде пряма SC , тобто $\angle OSC = \varphi$. Проекцією твірної SA на площину основи OAB

буде пряма OA , тобто $\angle SAO = \alpha$.

З $\triangle SOA$: $\angle SOA = 90^\circ$, $\angle SAO = \alpha$, $AO = R$, з тригонометричних співвідношень отримаємо $SA = R/\cos \alpha$, $SO = R \operatorname{tg} \alpha$.

З $\triangle SOC$: $\angle SOC = 90^\circ$, $\angle OSC = \varphi$, $SO = R \operatorname{tg} \alpha$, отримаємо $SC = SO/\cos \varphi$, $SC = R \operatorname{tg} \alpha / \cos \varphi$.

З $\triangle SCA$: $\angle SCA = 90^\circ$, $SA = R/\cos \alpha$, $SC = R \operatorname{tg} \alpha / \cos \varphi$, за теоремою Піфагора отримаємо

$$AC = \sqrt{SA^2 - SC^2} = \sqrt{\left(\frac{R}{\cos \alpha}\right)^2 - \left(\frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi}\right)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{\cos^2 \alpha} - \frac{R^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}}$$

або

$$AC = \sqrt{\frac{R^2}{\cos^2 \alpha} \left(1 - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}\right)} = \frac{R}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}{\cos^2 \varphi}} = \frac{R}{\cos \alpha \cos \varphi} \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}$$

Площа перерізу $S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SC = AC \cdot SC$ після підстановки значень матиме вигляд

$$S = \frac{R}{\cos \alpha \cos \varphi} \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha} \cdot \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} = \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha \cos^2 \varphi} \sqrt{\cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha}$$

Зауваження: $\cos \varphi = \sin SCO$, а кут $\angle SCO > \angle SAO$; за умовою $\angle SAO = \alpha$, тому маємо, що $\sin SCO > \sin \alpha$, тобто $\cos \varphi > \sin \alpha$, тобто вираз під коренем є додатним.

Можливе альтернативне розв'язання, наприклад:

З $\triangle SOA$: $\angle SOA = 90^\circ$, $\angle SAO = \alpha$, $AO = R$, маємо $SO = R \operatorname{tg} \alpha$

З $\triangle SOC$: $\angle SOC = 90^\circ$, $\angle OSC = \varphi$, отримаємо $SC = SO/\cos \varphi$, $SC = R \operatorname{tg} \alpha / \cos \varphi$; $OC = SO \operatorname{tg} \varphi$, а тому $OC = R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi$.

З $\triangle OCA$: за теоремою Піфагора отримаємо: $AC = \sqrt{OA^2 - OC^2}$,

$$AC = \sqrt{R^2 - (R \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi)^2} = \sqrt{\frac{R^2}{1} - \frac{R^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi}{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}} = \sqrt{\frac{R^2 (\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi - \sin^2 \alpha \sin^2 \varphi)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi}}$$

або

$$AC = \frac{R}{\cos \alpha \cos \varphi} \sqrt{(\cos \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \sin \varphi)(\cos \alpha \cos \varphi + \sin \alpha \sin \varphi)}$$

звідки отримаємо

$$AC = \frac{R}{\cos \alpha \cos \varphi} \sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cos(\alpha - \varphi)}$$

Маємо вирази для основи і висоти перерізу, щоб обчислювати його площу $S = AC \cdot SC$:

$$S = \frac{R}{\cos \alpha \cos \varphi} \sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cdot \cos(\alpha - \varphi)} \cdot \frac{R \operatorname{tg} \alpha}{\cos \varphi} = \frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha \cos^2 \varphi} \sqrt{\cos(\alpha + \varphi) \cdot \cos(\alpha - \varphi)}$$

З останнього співвідношення чітко випливає, що сума кутів $\angle \alpha + \angle \varphi < 90^\circ$, це випливає також із зауваження, розглянутого вище.

На перший погляд відповідь є іншою (зовні), але вона може бути перетворена до вище отриманої шляхом нескладних перетворень. Зауважимо, що від учнів не вимагалось перетворювати відповідь до єдиної правильної, наприклад, правильною також є відповідь $\frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha \cos^2 \varphi} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}$, у цьому не важко переконатися, використавши основну тригонометричну тотожність.

Відповідь: площа перерізу $\frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha}{\cos \alpha \cos^2 \varphi} \sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \varphi}$.

Приклад 2. У кулю вписаний конус таким чином, що лінійний кут між твірною конуса і радіусом кулі дорівнює 30° . Відстань від центра основи конуса до точки дотику твірної і кулі становить 3 см. Визначити площу поверхні кулі у см^2 .

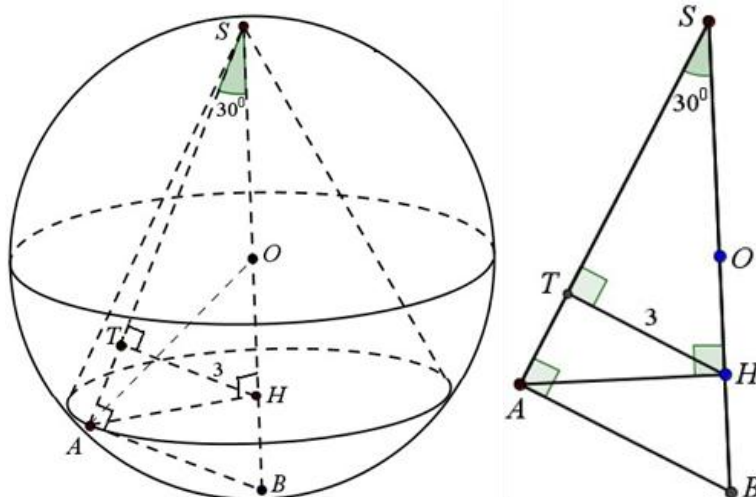


Рис. 2.20. Конус вписаний у кулю

Розв'язання. Виконаємо рисунок. Нехай є куля з центром у точці O . На її поверхні відзначимо діаметрально протилежні точки S і B . Побудуємо конус таким чином, що його вершина збігається з точкою S , а основа лежить на сфері. Нехай SH - висота конуса, SA - його твірна, а AH - радіус основи. Проведемо перпендикуляр TH з точки T (центр основи конуса) до твірної SA . За умовою задачі, $TH = 3$ см. Оскільки точки S і B діаметрально протилежні, то відрізок SB є діаметром кулі, а отже, $\triangle SAB$ прямокутний з прямим кутом при вершині A .

З прямокутного трикутника $\triangle STH$:

$$SH = \frac{TH}{\sin TSH} = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ см}, \quad ST = TH \cdot \operatorname{ctg} TSH = 3\sqrt{3} \text{ см}$$

З подібності

$$\triangle STH \cong \triangle SHA: \frac{ST}{SH} = \frac{SH}{SA} \quad SA = \frac{SH^2}{ST} = \frac{6^2}{3\sqrt{3}} = 4\sqrt{3} \text{ см}$$

З подібності

$$\triangle STH \cong \triangle SAB: \frac{ST}{SA} = \frac{SH}{SB} \quad SB = \frac{SA \cdot SH}{ST} = \frac{4\sqrt{3} \cdot 6}{3\sqrt{3}} = 8 \text{ см}$$

Діаметр кулі 8 см, а тоді $R = SO = 4$ см.

А тоді площа поверхні кулі $S = 4\pi R^2 = 4\pi 4^2 = 64\pi \text{ см}^2$

Розв'язуючи задачу, у якій є подібні прямокутні трикутники, доцільно повторити співвідношення у прямокутному трикутнику: між катетом, його проекцією та гіпотенузою; між проекціями катетів на гіпотенузу та висотою, проведеною до гіпотенузи. Це розширює можливості учня при розв'язуванні інших задач, у яких фігурують схожі об'єкти.

Розглянемо інші способи відшукування радіуса кулі у цій задачі.

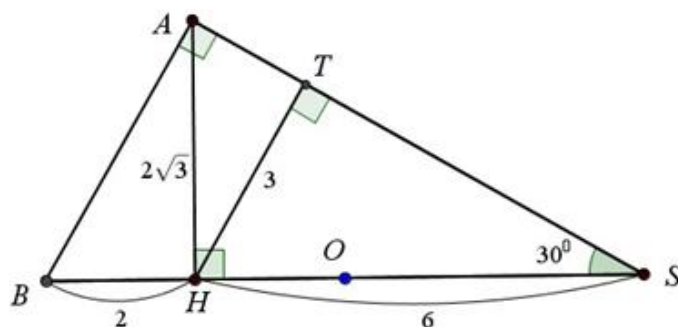


Рис. 2.21. Трикутник STH

У прямокутному трикутнику STH сторона TH є катетом, що лежить навпроти кута в 30^0 , а тому дорівнює половині гіпотенузи, звідки $SH=6$ см.

У прямокутному трикутнику SHA сторони AH і SH є катетами (гострий кут 30^0), а тому $AH = SH \cdot \operatorname{tg} TSH = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$.

У прямокутному трикутнику BAS відрізки AH і SH є висотою, проведеною до гіпотенузи, і проекцією катета на гіпотенузу, відповідно $AH^2 = SH \cdot BH$, звідки $6 BH = (2\sqrt{3})^2 \rightarrow BH=2$ см. А тоді діаметр $SB=8$ см, $R=4$ см.

Можна було використати виключно тригонометрію: позначимо даний в умові кут $\angle ASH$ через α . Тоді кут $\angle AHT$ теж дорівнює α і $\angle BAN = \alpha$. Виразимо з прямокутного $\triangle ATH$ гіпотенузу $AH = TH / \cos \alpha$, з прямокутного $\triangle ANB$:

$$NB = AH \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{TH}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$NB = \left(3 : \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 2 \text{ см}$$

Тоді $SB=8$ см, $R=4$ см.

У цій задачі можна було міркувати і інакше: $\angle ASB$ вписаний, градусна міра 30^0 , кут $\angle AOB$ центральний, вдвічі більший, тобто 60^0 , $AO=OB$ (як радіуси), а тому $\triangle AOB$ рівносторонній. Відрізок AH – висота рівностороннього трикутника, а отже і медіана, тобто, якщо $NB = x$, то $HO = x$, $SO = OB = R = 2x$, $SH = 3x$, а тоді $3x = 6$, звідки $x = 2$, $R = 2x = 4$ см.

Відповідь: 64 см^2 .

Приклад 3. В кулю радіусом 3 сантиметри вписано конус. Якої довжини повинна бути висота цього конуса, щоб його об'єм був максимальним? Обчисліть цей максимальний об'єм.

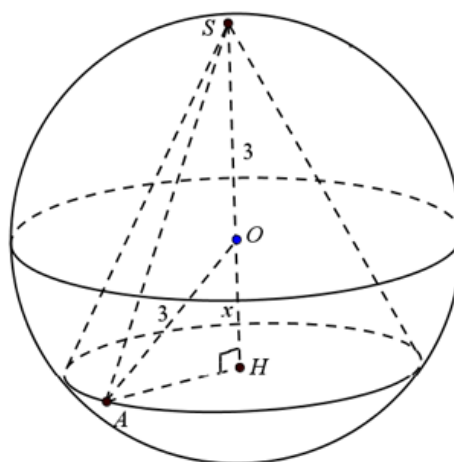


Рис. 2.22. Вписаний конус

Розв'язання. Зобразимо геометричну фігуру. Нехай O - центр кулі, а точки S і A лежать на її поверхні. Відрізки SO і OA є радіусами кулі і дорівнюють 3 см. Побудуємо конус із вершиною в точці S , а основою - колом на поверхні кулі. Позначимо висоту конуса як SH , а радіус основи - AH . Нехай відрізок OH , який є перпендикуляром до площини основи конуса, має довжину x . Зверніть увагу, що значення x може бути як додатним, так і від'ємним. Це означає, що висота конуса SH може бути більшою або меншою за радіус кулі. Проте, при від'ємному значенні x точка H знаходитиметься між S і O , і якщо розглянути точку H' , яка буде симетричною до H відносно точки O , то площі основ будуть однаковими (бо площини перерізу знаходяться на однакових відстанях від центра кулі), а висоти будуть різними, причому у першому випадку (від'ємному x) висота буде меншою, а отже і об'єм буде менший. Тому нас будуть цікавити тільки $x \geq 0$. Насправді, можна не робити такого дослідження, обчислення мають показати нашу правоту.

Виразимо радіус основи конуса $AH = \sqrt{OA^2 - OH^2}$, або $AH = \sqrt{9 - x^2}$.

Об'єм запишеться: $V = \frac{1}{3}\pi * AH^2 * SH$, або $V = \frac{1}{3}\pi * (9 - x^2) * (3 + x)$

Після розкриття дужок отримаємо: $V = \frac{1}{3}\pi * (-x^3 - 3x^2 + 9x + 27)$

Для того, щоб функція мала екстремум (максимум або мінімум), її похідна в даній точці повинна дорівнювати нулю. Отже, прирівняємо похідну до нуля і розв'яжемо це рівняння.

$$V' = \frac{1}{3}\pi * (-3x^2 - 6x + 9) = -\pi * (x^2 + 2x - 3)$$

Похідна дорівнює нулю при $x = -3$, $x = 1$.

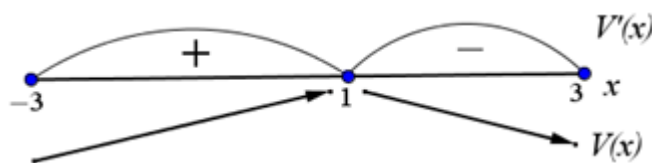


Рис. 2.23. Знаходження похідної

Оскільки при переході через точку $x = 1$ похідна змінює знак з плюса на мінус, то при $x = 1$ функція досягає максимуму.

А тому висота конуса $SH = 3 + 1 = 4$ см (відповідь на перше питання задачі). Обчислимо радіус основи $AH = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$, та об'єм: $V = \frac{1}{3}\pi * 8 * 4 = \frac{32}{3}\pi$ см³.

Відповідь: 4 см; $\frac{32}{3}\pi$ см³.

2.6. Розробка плану-конспекту уроку з теми «Конус» в курсі геометрії 11 класу

Тема уроку: **Перерізи конуса площинами. Зрізаний конус.**

Мета уроку:

навчальна: опанувати поняття перерізу конуса, зокрема зрізаного конуса. Вивчити властивості цих геометричних фігур.

розвиваюча: розвивати просторове мислення, уміння аналізувати та узагальнювати геометричні факти.

виховна: формувати інтерес до геометрії, показати її застосування в реальному житті.

Тип уроку: комбінований (вивчення нового матеріалу та формування вмінь).

Навчально-методичне забезпечення уроку: підручник, наочні посібники (моделі конусів, зрізаних конусів, виготовлені деталі), технічні засоби навчання (мультимедійна система, програмне забезпечення GeoGebra, платформа Zoom), дидактичний матеріал (таблиці, презентації), інструменти для практичної роботи (інструменти креслення).

Хід уроку

I. Організаційний момент. Перевірка підготовки до уроку

Перевірка готовності учнів до уроку, налаштування на роботу. Для участі в уроці просимо підготувати будь-який мобільний пристрій з доступом до Інтернету та портативний комп'ютер (на ваш вибір: ноутбук, планшет, ПК).

II. Перевірка домашнього завдання

Питання до учнів:

1. Яке геометричне тіло ми «зустрічали» на минулому уроці? Назвіть хоча б три предмети з навколишнього світу, які мають схожу форму.
2. Які елементи має конус?
3. Як можна отримати конус?
4. Де ще, крім наземних предметів, можна зустріти форму конуса?

Слово "конус" походить від грецького "konos", що означає "соснова шишка". Ця геометрична фігура вивчалася ще в давнину такими видатними вченими, як Архімед, Демокріт, Платон та Сократ. Особливий внесок у розуміння конусів зробив Аполлоній Перзький, який написав фундаментальну працю про конічні перетини. Його вчитель, Евклід, створив "Начала" – підручник з геометрії, який використовується донині.

Тестування учнів. Учням пропонується пройти тест. Посилання на тест <https://learningapps.org/16535226>

III. Формування мети й завдань уроку

На попередньому уроці розглянули один із перерізів конуса, а саме осьовий переріз конуса.

Запитання до учнів (слайд 1): «Якою геометричною фігурою є переріз конуса площиною:

- а) яка проходить через вершину та хорду конуса;
- б) паралельною його основі?
- в) на які частини ділить конус площина, паралельна його основі?».

Сьогодні ми зосередимося на двох важливих аспектах геометрії конуса: доведемо, що переріз конуса площиною, паралельною основі, є колом, та детально вивчимо поняття зрізаного конуса.

IV. Засвоєння знань.

Тема: **Перерізи конуса площинами. Зрізаний конус.** (слайд 2)

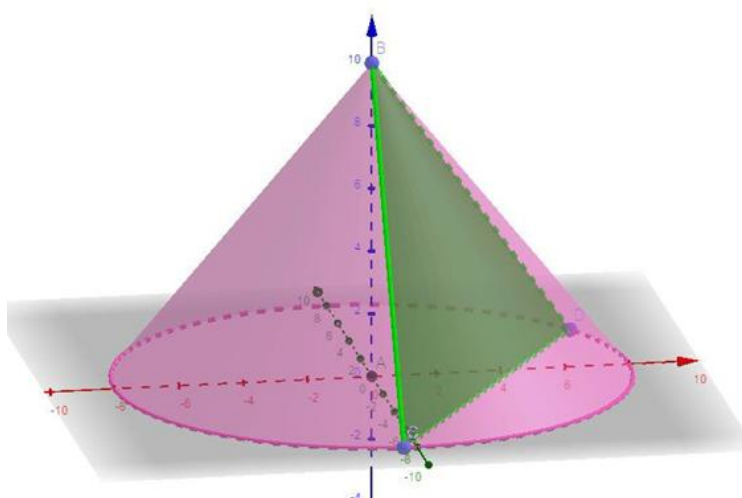
План уроку:

1. Перерізи конуса через вершину і хорду основи.
2. Перерізи, паралельні площині основи.
3. Зрізаний конус: визначення та основні елементи.
4. Зрізаний конус як тіло, отримане обертанням.
5. Осьовий переріз зрізаного конуса.
6. Основні властивості зрізаного конуса.
7. Конічні поверхні та криві другого порядку.

Основні поняття (слайд 3):

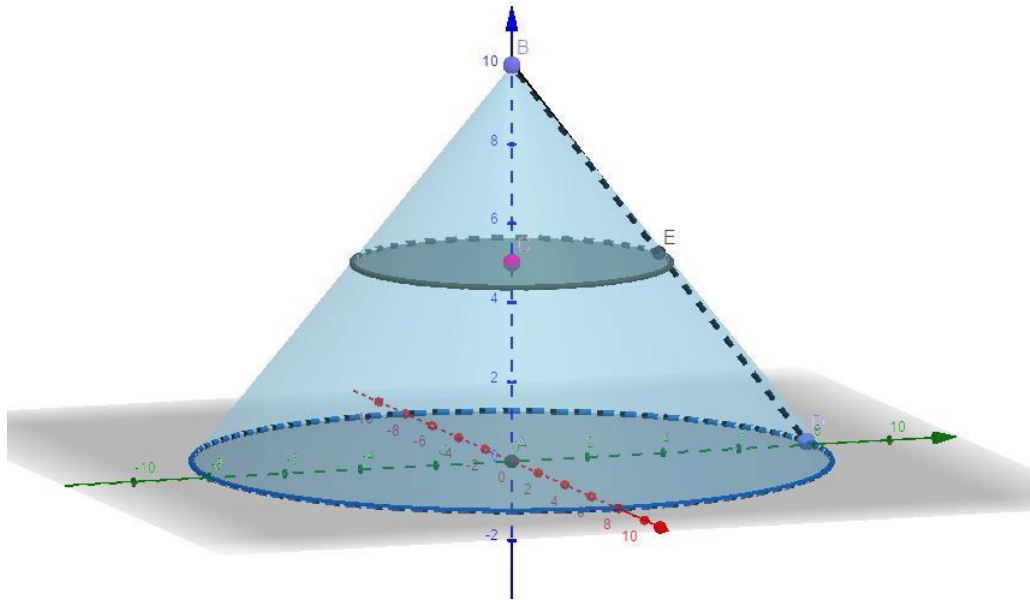
1. Переріз через вершину і хорду основи:

Переріз конуса площиною, що проходить через його вершину і довільну хорду основи, є рівнобедреним трикутником. Його бічні сторони є твірними конуса. Такий переріз відіграє важливу роль при вивченні геометричних властивостей конуса. Наприклад, трикутник $\triangle BED$ є перерізом, утвореним площиною, що проходить через вершину B і хорду ED .



2. Теорема про переріз паралельний основі (слайд 4):

Переріз конуса площиною, паралельною його основі, є колом. Центр цього кола належить осі конуса. Крім того, відношення довжин відрізків, на які ділиться твірна конуса точкою перетину з площиною перерізу, дорівнює відношенню довжин відповідних відрізків висоти конуса.



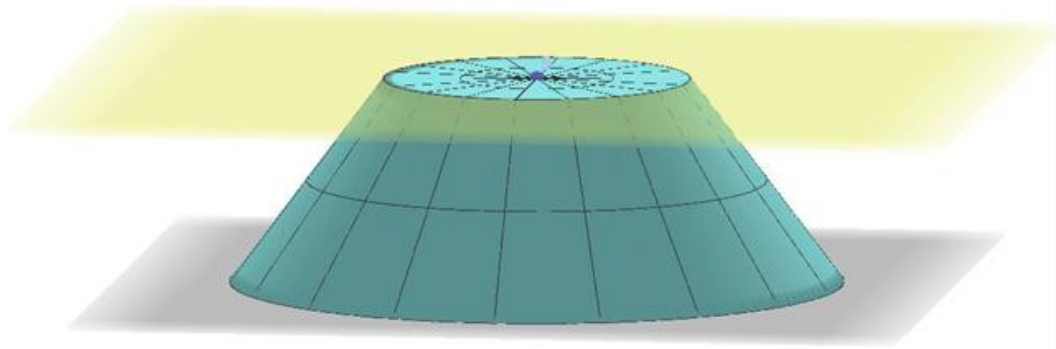
З теореми випливає, що $BC:BE=CA:ED$.

Наслідок. Площа перерізу конуса, паралельного площині основи, відноситься до площі основи, як квадрати відстаней від вершини конуса до площин перерізу й основи, тобто:

$$\frac{S_{\text{перерізу}}}{S_{\text{основи}}} = \frac{BC^2}{BA^2}$$

3. Визначення зрізаного конуса (слайд 5)

Зрізаним конусом називають ту частину конуса, яка розташована між його основою і площиною, паралельною основі. Учні виконують необхідні записи та малюнки у зошити, орієнтуючись на слайди 5–6.

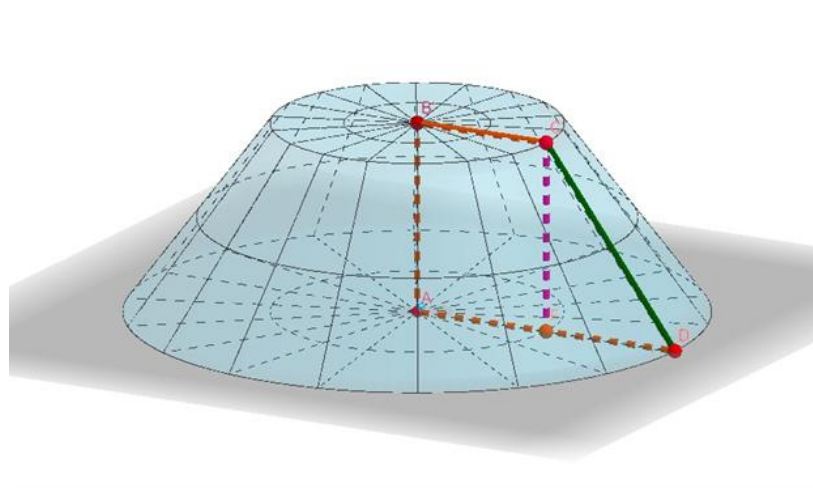


4. Основні елементи зрізаного конуса (слайд 6)

Основи зрізаного конуса це велика основа вихідного конуса і круг, утворений у перерізі площиною, паралельною основі.

Висота зрізаного конуса це перпендикуляр, проведений із точки однієї основи до площини іншої основи.

Твірні зрізаного конуса це відрізки твірних початкового конуса, які обмежуються площинами обох основ зрізаного конуса.



$B'C'$ - радіус меншої основи зрізаного конуса;

AD – радіус більшої основи зрізаного конуса;

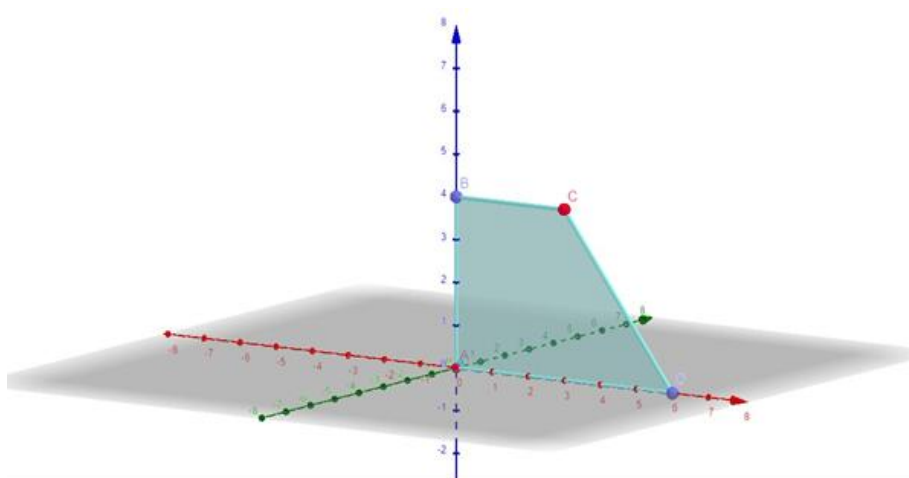
$C'D$ – твірна зрізаного конуса;

$C'F$ – висота зрізаного конуса.

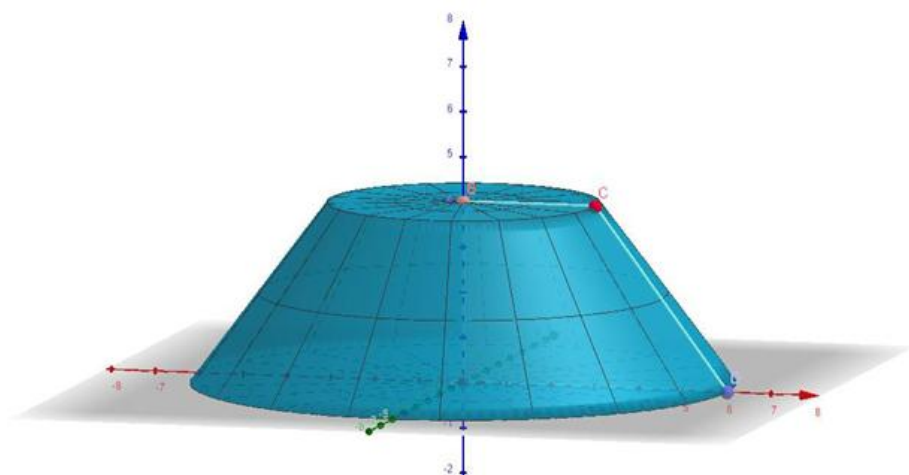
5. Зрізаний конус: визначення та властивості (слайд 7)

Зрізаний конус – це геометричне тіло, яке утворюється в результаті обертання прямокутної трапеції $ABCD$ навколо її меншої бічної сторони AB .

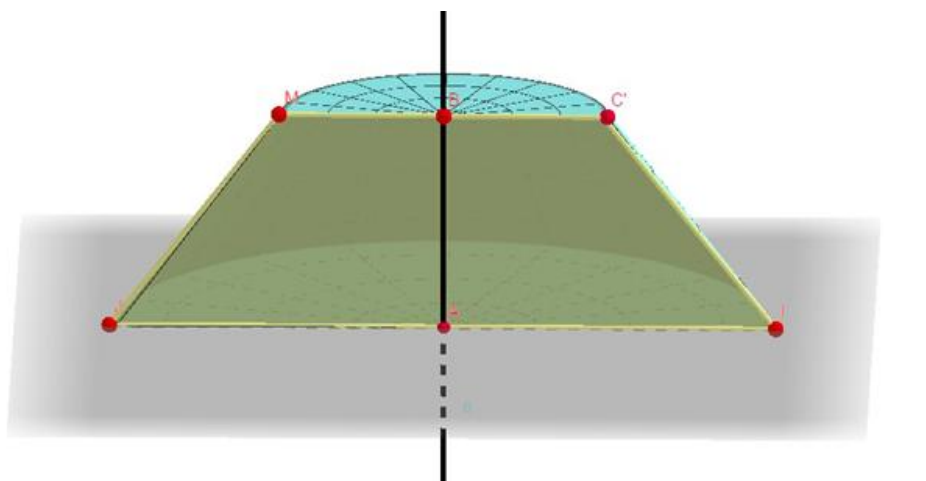
Більша бічна сторона CD при цьому перетворюється на твірну конуса. Лінія, що з'єднує центри основ, називається віссю обертання і є перпендикулярною до площин основ.



В результаті обертання отримали зрізаний конус (слайд 8):



6. Переріз зрізаного конуса площиною, що проходить через його вісь, називають осьовим перерізом. (слайд 9)

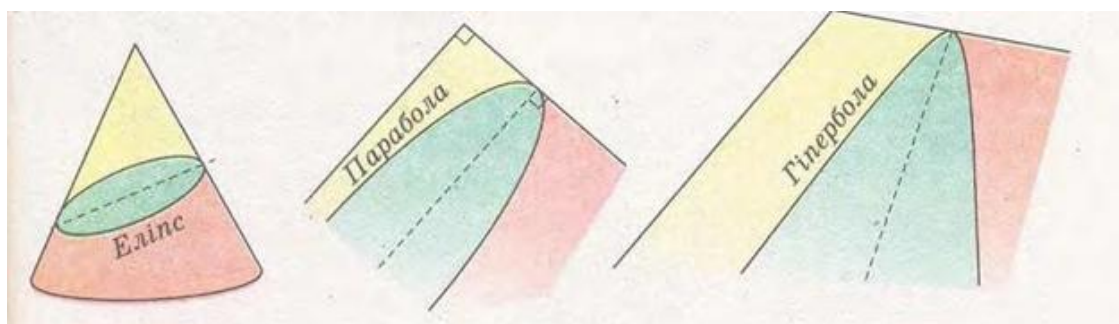


7. Властивості зрізаного конуса (слайд 10):

Уявіть, що зрізаний конус – це відро. Якщо ми розріжемо це відро навпіл вздовж його осі, то побачимо, що в перерізі ми отримаємо рівнобедрену трапецію. Ця трапеція має одну цікаву властивість: всі відрізки, що з'єднують край відра з дном, мають однакову довжину. Саме тому ми можемо сказати, що твірні зрізаного конуса рівні.

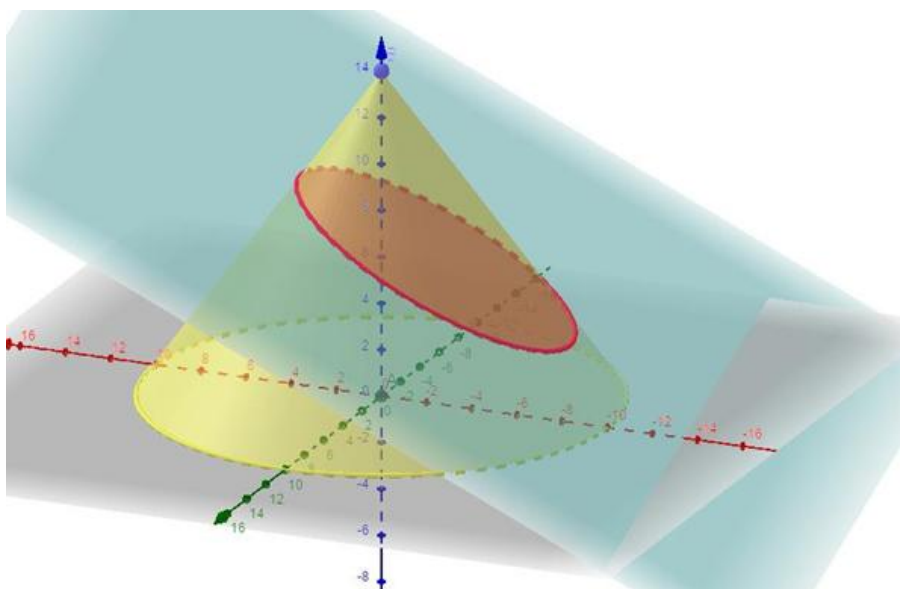
8. Конічні поверхні як джерело кривих другого порядку.

Крім кіл та еліпсів, які ми отримуємо при певних перерізах конуса, існують й інші цікаві криві. Давньогрецькі математики, такі як Менехм та Аполлоній Перзький, виявили, що змінюючи положення січної площини, можна отримати еліпси, параболи та гіперболи. Ці криві, які називають конічними перерізами, мають безліч цікавих властивостей та знаходять широке застосування в різних галузях науки і техніки.

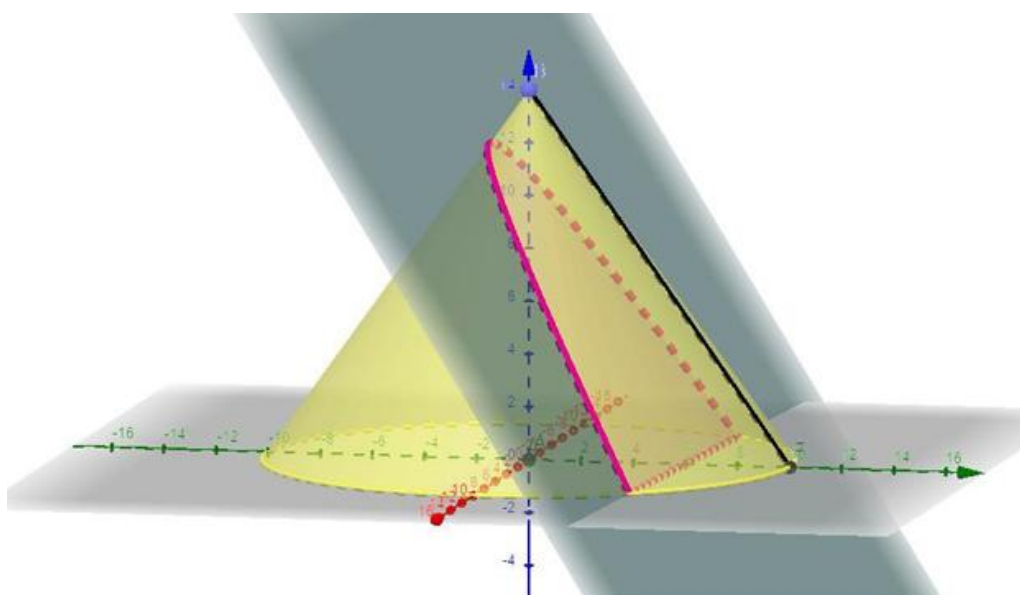


Самі назви "еліпс", "парабола" та "гіпербола" з'явилися вже після часів Менехма. (слайд 11)

Якщо січна площина перетинає всі твірні конуса під кутом, відмінним від прямого, то лінія перетину є еліпсом. (слайд 12)



При перетині конуса площиною, паралельною одній твірній, лінія перетину набуває форми параболи.



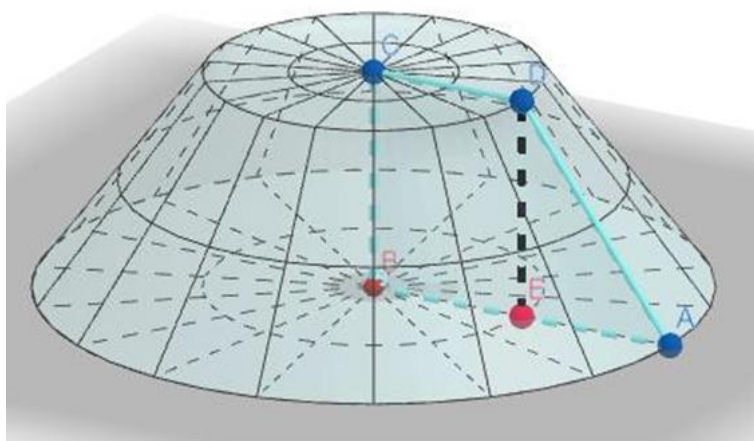
При перетині конуса площиною, паралельною двом твірним, лінія перетину набуває форми гіперболи. (слайд 14)

$$\frac{S_{\text{пер}}}{S_{\text{осн}}} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2 = \left(\frac{h_1}{2h_1}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$S_{\text{пер}} = \frac{1}{4} S_{\text{осн}} = 0,25 S_{\text{осн}}$$

Відповідь: $S_{\text{пер}} = 0,25 S_{\text{осн}}$.

Задача 2. Обчисліть довжину твірної зрізаного конуса, якщо відомо, що радіуси його основ дорівнюють 3 м і 6 м, а висота – 4 м. (слайд 16).



Розв'язання

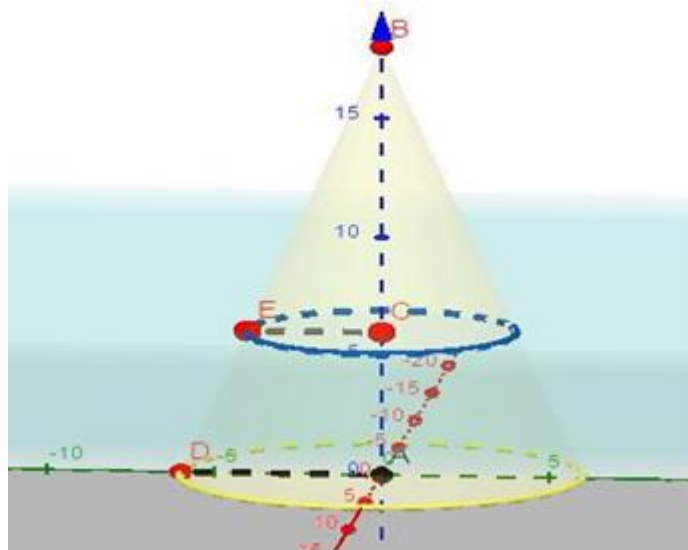
Розглянемо трапецію ABCD. DE – висота. Тоді $DE = BC = 4$ см. $EA = AB - BE = 6 - 4 = 3$ см. з $\triangle DEA$: за теоремою Піфагора $AD^2 = DE^2 + EA^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$. $AD = 5$ (см).

Відповідь: 5 см.

Виконання письмових вправ.

Запрошуємо вас розв'язати цю цікаву задачу про конус і поділитися своїм розв'язком з усіма за допомогою програми Zoom.

Задача 3. Висота конуса 18 см, радіус основи 6 см, радіус кола перерізу 4 см. Знайдіть відстань від площини перерізу до основи конуса.



Розв'язання

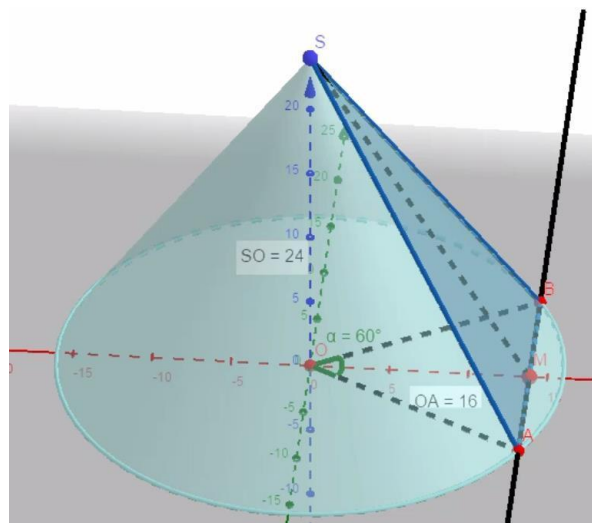
$$\triangle DBA \sim \triangle EBC, \frac{EC}{DA} = \frac{BC}{BA};$$

$$BC = \frac{EC \cdot BA}{DA} = \frac{4 \cdot 18}{6} = 12(\text{см});$$

$$AC = BA - BC = 18 - 12 = 6(\text{см}).$$

Відповідь: $AC = 6$ см.

Задача 4. Висота конуса дорівнює 24 см, радіус основи – 16 см. Через вершину конуса проведено переріз, який перетинає основу по хорді, що утворює центральний кут 60 градусів. Визначте кут між площиною перерізу та площиною основи конуса. (слайд 18).



Дано: $OA = 16$ см; $\angle AOB = 60^\circ$; $SO = 24$ см;

Знайти: $\angle SMO$.

Розв'язання

1) $\triangle AOB$ -рівнобедрений; $OM \perp AB$; $\angle AOM = \angle BOM = 30^\circ$;

$$\frac{OM}{OA} = \cos 30;$$

$$OM = OA \cos 30 = 16 * \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3} \text{ (см)}.$$

2) $\triangle SOM$ -прямокутний;

$$\frac{SO}{OM} = \operatorname{tg} SMO;$$

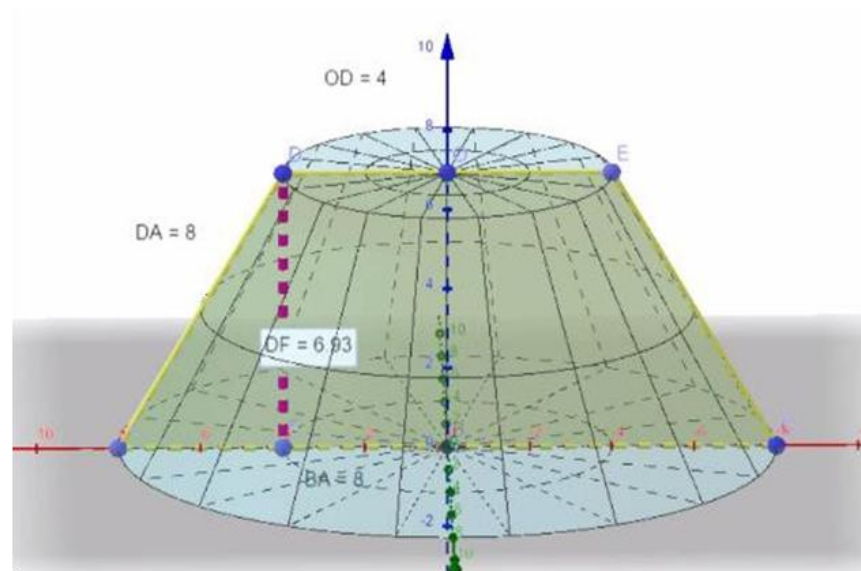
$$\frac{24}{8\sqrt{3}} = \operatorname{tg} SMO;$$

$$\operatorname{tg} SMO = \sqrt{3};$$

$$\angle SMO = 60^\circ$$

Відповідь: 60° .

Задача 5. Обчисліть висоту зрізаного конуса, якщо відомо, що радіуси його основ дорівнюють 8 см і 4 см, а кут між твірною і площиною більшої основи становить 60° . (слайд 19).



Дано: $AO = 8$ см; $O_1A_1 = 4$ см; $\angle A_1AO = 60^\circ$.

Знайти: $H = OO_1$

Розв'язання

1) $A_1B \parallel O_1O$; $A_1B \perp AO$;

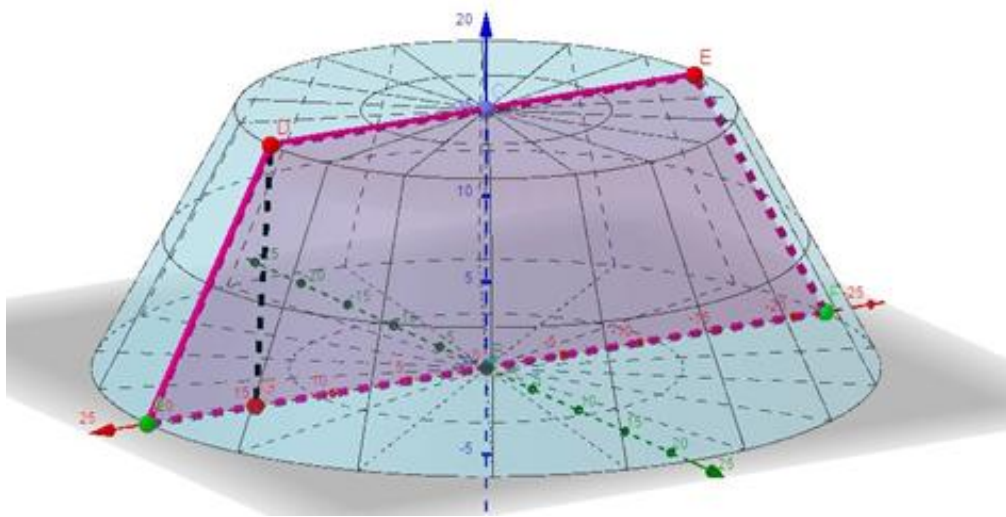
$$AB = 8 - 4 = 4 \text{ (см)};$$

2) $\triangle AA_1B$ - прямокутний;

$$B_1B = AB \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3} \text{ (см)}$$

Відповідь: $4\sqrt{3}$.

Задача 6. У зрізаного конуса радіуси основ становлять 14 см і 22 см, а довжина твірної дорівнює 17 см. Обчисліть площу осьового перерізу цього конуса (слайд 20).



Дано: $AB=22$ см; $DC=14$ см; $AD=17$ см;

Знайти: S_{ABCD}

Розв'язання

1) $DG \perp AF$; $AG=22-14=8$;

2) $\triangle ADG$ -прямокутний, тоді за теоремою Піфагора: $AD^2 = AG^2 + DG^2$

$$DG = \sqrt{289 - 64} = \sqrt{225} = 15 \text{ (см)}$$

3) $ADEF$ – трапеція, AF і DE – основи, DG – висота:

$$AF = 2 AB$$

$$DE = 2 DC$$

$$DG = 15 \text{ (см)}$$

$$S = \frac{22 \cdot 2 + 14 \cdot 2}{2} \cdot 15 = 36 \cdot 15 = 540 \text{ (см}^2\text{)}$$

Відповідь: 540 см^2

VI. Підведення підсумків

1. Хто перший? Яке ключове слово в кросворді?(учні повинні знайти ключове слово в кросворді (слайд 21))

РОЗВ'ЯЖІТЬ КРОСВОРД

1. Фігура, утворена від обертання прямокутного трикутника навколо катета.

2. Перпендикуляр, опущений з вершини конуса на площину основи.

3. Відрізок, що сполучає вершину конуса з точкою кола.

4. Переріз, що проходить через вісь.

5. Вона сполучає вершину з центром прямого конуса.

6. Найвища точка конуса.

7. Нижня частина конуса

к о н у с
в и с о т а
т в і р н а
о с ь о в и й
в і с ь
в е р ш и н а



2. Дати відповідь на питання: «Чому пожежні відра мають форму конуса?»
(слайд 22)

VII. Домашнє завдання:

- Опрацювати §20 стор. 128;
- №№ 20.5 (2), 20.10;

Висновки до розділу

В другому розділі проведено аналіз наявних електронних додатків та їх можливостей для створення 3D моделей конуса. Проаналізувавши роботу додатків, для проведення уроків було обрано систему GeoGebra. Розглянуто застосування елементів 3D моделювання на уроках геометрії під час вивчення теми «Конус». Розроблено методичні рекомендації для роботи з програмою GeoGebra під час уроків з теми «Конус».

У даному розділі було розроблено конспект уроку та 3D моделі конуса до відповідних задач. Також підібрано задачі на конус, які було подано в зовнішньому незалежному оцінюванні та НМТ, створено просторові моделі до них.

ВИСНОВКИ

В ході роботи над кваліфікаційною роботою «Методика вивчення теми «Конус» з використанням комп'ютерних 3D моделей» було виконано низку етапів: від теоретичного обґрунтування використання GeoGebra до практичної реалізації дидактичних матеріалів.

Для досягнення мети дослідження було виконано комплекс взаємопов'язаних завдань:

1. Проведено глибокий аналіз наукової та методичної літератури з питань використання ІКТ у навчанні геометрії. Було встановлено, що незважаючи на перспективність застосування програм типу GeoGebra, існує дефіцит якісних дидактичних матеріалів, особливо стосовно теми "Конус".
2. Здійснено детальний логіко-математичний аналіз змісту теми "Конус", визначено ключові поняття, факти та вміння, необхідні для успішного її засвоєння.
3. Проведено порівняльний аналіз підручників провідних авторів (Мерзляк, Номіровський, Полонський, Якір; Нелін, Долгова; Істер, Єрґіна), виявлено їх сильні та слабкі сторони щодо використання візуальних засобів навчання.
4. Здійснено порівняльний аналіз популярних програм для 3D-моделювання (GeoGebra, GRAN, Cabri 3D) та обґрунтовано вибір GeoGebra як найбільш підходящої для розробки дидактичних матеріалів з теми "Конус".
5. Визначено типи задач на конуси, що можуть бути ефективно візуалізовані та розв'язані за допомогою GeoGebra.
6. Розроблено детальний конспект уроку, що включає теоретичний матеріал, практичні завдання та інтерактивні елементи, створені в GeoGebra.
7. Сформульовано методичні рекомендації для вчителів щодо використання розроблених матеріалів.

У майбутньому матеріали можуть бути вдосконалені за рахунок розширення тематики розробок.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Адамар Ж. Елементарна геометрія, ч. II, Стереометрія. Київ: Рад. шк., 1955. 735 с.
2. Антоненко М.І. Розв'язування геометричних задач: книжка для вчителя. Київ: Рад. шк., 1991. 128 с.
3. Апостолова Г. В. Стереометрія в опорних схемах. Київ : Факт, 2000. 68 с.
4. Бевз Г. П. Математика: проб. підруч. для 11 кл. серед. шк. Київ: Освіта, 1995. 191 с.
5. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.
6. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Вивчення елементів стереометрії в основній школі. // Математика. 2002. № 13.
7. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Владіміров В. М., Владімірова Н. Г. Підручник для учнів 10–11 класів з поглибленим вивченням математики в середніх загальноосвітніх закладах. Київ: Освіта, 2000. 239 с.
8. Березняк О.С. Розв'язання екзаменаційних завдань з математики. Частина 2. Геометрія. Тернопіль: Підручники і посібники, 2000. 104 с.
9. Богатинська Н. В., Голубєва С. Ф. Узагальнення й систематизація – джерело знань учнів. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики: зб. наук. праць. Вип. 6. Т. 1, 2006. С. 103–107.
10. Бондар С. П. Методи активізації навчально-пізнавальної діяльності учнів як важливий компонент особистісно-орієнтованого навчання. Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Київ, 2011. № 26. С. 184–189.
11. Бродський Я. С., Гречук В. Ю., Павлов О. Л., Сліпенко А. К. Стереометрія у старшій школі: посібник для вчителя. Тернопіль: Навчальна книга. Богдан, 2005. 404 с.
12. Бурда М. І., Дубинчук О. С., Мальований Ю. І. Математика 10–11 : проб. навч. посібник для шк., ліцеїв та гімназій гуманітар. профілю.

- Київ : Освіта, 1997. 224 с.
13. Вітюк О. В. Розвиток образного мислення учнів при вивченні стереометрії з використанням комп'ютера: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Київ, 2001. 25 с.
 14. Волошина С. В. Методична розробка на тему: «Методика розв'язування задач з геометрії». URL: <https://naurok.com.ua/metodichna-rozrobka-na-temu-metodika-rozv-yazuvannya-zadach-z-geometri-123264.html>
 15. Волощук І. А., Шпонька Р. Ю. Використання ІКТ на уроках математики як засіб розвитку просторової уяви учнів. Педагогічне Криворіжжя : педагогічний альманах: зб. наук.-метод. праць. Вип. 3, 2017. С. 46–48.
 16. Глазова В., Горзова С. Geogebra – інноваційний засіб для вивчення стереометрії. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ. Слов'янськ, 2017. С. 123–128.
 17. Гулівата І. О. Методика навчання учнів старшої школи побудови стереометричних фігур з використанням інформаційно-комунікаційних технологій. Інформаційні технології і засоби навчання. 2013. Том 34. № 2. С. 47–55.
 18. Збірник наукових праць фізико-математичного факультету ДДПУ / гол. ред. В. О. Надточій. Слов'янськ: Вид-во Б. І. Маторін. Вип. № 11, 2021. 228 с.
 19. «ЗНО-ОНЛАЙН». Створений та підтримується інтернет-ресурсом «Освіта.уа». URL : <https://zno.osvita.ua/mathematics> (дата звернення: 03.12.2024).
 20. Істер О. С., Єргіна О. С. Геометрія: (профіл. рівень): підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Київ: Генеза, 2019. 288с.:іл.
 21. Казанчук І. Ю. Комп'ютерно орієнтовані засоби навчання для предметів фізико-математичного циклу. Вид-во: Таврійський вісник освіти, 2013. С. 21–30.
 22. Кнопський В. М., Скопец З. А., Ягодовський М. І. Геометрія :

- навчальний посібник для 10 класу середньої шк. Київ: Рад. шк., 1978. 160 с. 22.
23. Комишан А. І., Щокіна Н. Б. Метод проектів як засіб активізації навчально-пізнавальної діяльності студентів. Наукові записи кафедри педагогіки. Випуск 41, 2017. С. 81–93.
 24. Крамаренко Т. Г., Корольський В. В., Семеріков С. О., Шокалюк С. В. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики: навч. посіб. Вид. 2, перероб. і доп. / наук. ред. М. І. Жалдак. Кривий Ріг: Криворізький держ. пед. ун-т, 2019. с. 444. URL: <http://elibrary.kdpu.edu.ua/jspui/handle/0564>
 25. Кушнір І. А. Трикутник і тетраедр у задачах: для ст. шк. віку. Київ: Рад. шк., 1991. 208 с.
 26. Лов'янова І.В. Методика сучасного уроку математики. Документація вчителя математики: поради студенту-практиканту. Навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. 2-ге видання, доп. і пер. Кривий Ріг : КДПУ, 2015. 24 с.
 27. Марченко О. М. Систематизація знань учнів у процесі навчання математики із застосуванням методу проектів на основі комп'ютерної підтримки. Дидактика математики: проблеми та дослідження. Вип. 26, 2006. С. 150–154.
 28. Межейнікова Л.С. Про визначення поняття активізація пізнавальної діяльності учнів в процесі навчання. Дидактика математики: проблеми дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. 2005. Вип. 23. 112 с.
 29. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б та ін. Геометрія: початок вивч. на поглиб. рівні з 8 кл., проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: Гімназія, 2019. 240 с.
 30. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б, Якір М. С. Геометрія: проф. рівень: підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої

- освіти. Харків: Гімназія, 2018. 240 с.
31. Методика стереометрії. За ред. Астряба О. М., Білоусової В. П. 2-е видання. Київ: Рад. шк., 1949. 192 с.
32. Методика навчання математики в старшій школі. Модуль 1: Стереометрія: навчально-методичний посібник. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2020. 61 с.
33. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-svita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 03.12.2024).
34. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Профільний рівень. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-svita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasiv> (дата звернення: 03.12.2024).
35. Навчальна програма з математики (алгебра і початки аналізу та геометрія) для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Поглиблений. URL: <https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-svita/navchalniprogrami/navchalni-programi-dlya-10-11-klasi> (дата звернення: 03.12.2024).
36. Нелін Є. П., Долгова О. Є. Геометрія (профільний рівень): підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків: Вид-во «Ранок», 2019. 208 с.
37. Орач Б. Побудова перерізів многогранників. Математика. 2004. № 27–28.
38. Півторак А. А. Використання ІКТ при вивченні математики. Педагогічний дизайн. Вінниця : ММК, 2015. 74 с.
39. Погорелов О. В. Геометрія: Стереометрія: Підручник для 10–11 кл. серед. шк. 6-те вид. Київ : Освіта, 2001. 128 с.
40. Польшун К. В. Організація інклюзивного навчання фізико-

- математичних дисциплін студентів з обмеженими фізичними можливостями у вищих технічних навчальних закладах: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.09. Тернопіль, 2017. 20 с.
41. Програма ЗНО з математики. Український центр оцінювання якості освіти. URL : <https://testportal.gov.ua/progmath> (дата звернення: 04.12.2024).
 42. Прокопенко Н. С., Щекань Н. П. (відповідальні за випуск). Програми для загальноосвітніх навчальних закладів. Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків.
 43. Результати з математики зно-2021. URL: <https://testportal.gov.ua/rezultaty-z-matematyky-zno-2021-vazhlyvo-znaty-shhob-rozumity/> (дата звернення: 04.12.2024).
 44. Саніна Є. І. Розвиток просторового мислення в процесі навчання стереометрії / Є. І. Саніна, О. А. Гришина. Вісник РУДН, серія Психологія та педагогіка. 2013. № 4. С. 99–102.
 45. Сверчевська І. А. Психолого-педагогічні умови підвищення продуктивності вивчення геометричних тіл / І. А. Сверчевська. Вісник ЖДУ імені Івана Франка. 2004. Вип. 19. С. 213–217.
 46. Сенчілов В. В. Застосування інтерактивних технологій при вивченні курсу геометрії в школі. URL : <http://ekoncept.ru/2013/13197.htm>
 47. Система динамічної математики «GeoGebra». URL: <http://www.geogebra.com>
 48. Слепкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч. закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
 49. Слінчук В. І. Формування життєвих компетентностей учнів засобами навчального проекту на уроках математики. URL: <http://eprints.zu.edu.ua/1610/1/20.pdf>
 50. Третьякова А. І. Прикладна спрямованість математики / А. І. Третьякова. Харків: Основа, 2006. 40 с.
 51. Чайка В. М. Основи дидактики: навч. посіб. (Серія «Альма-матер»).

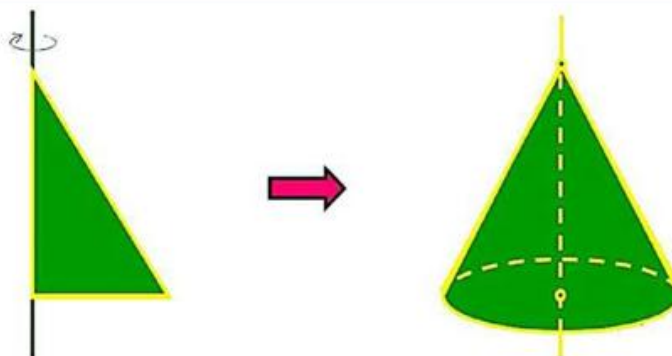
- Київ: Академвидав, 2011. 240 с.
52. Швець В. О., Прус А. В. Теорія та практика прикладної спрямованості шкільного курсу стереометрії : навчальний посібник. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. 156 с.
53. Шишкіна М. П. Методологічний підхід до оцінювання якості програмних засобів навчання / М. П.Шишкіна. Нові технології навчання: наук.- метод. зб. / МОН України, Ін-т інновац. технологій і змісту освіти. Київ, 2010. Вип. 61. С. 22–28.
54. GRAN-3D. URL: <https://ktoi.fi.npu.edu.ua/gran-3d> (дата звернення: 23.11.2024).

ДОДАТОК А

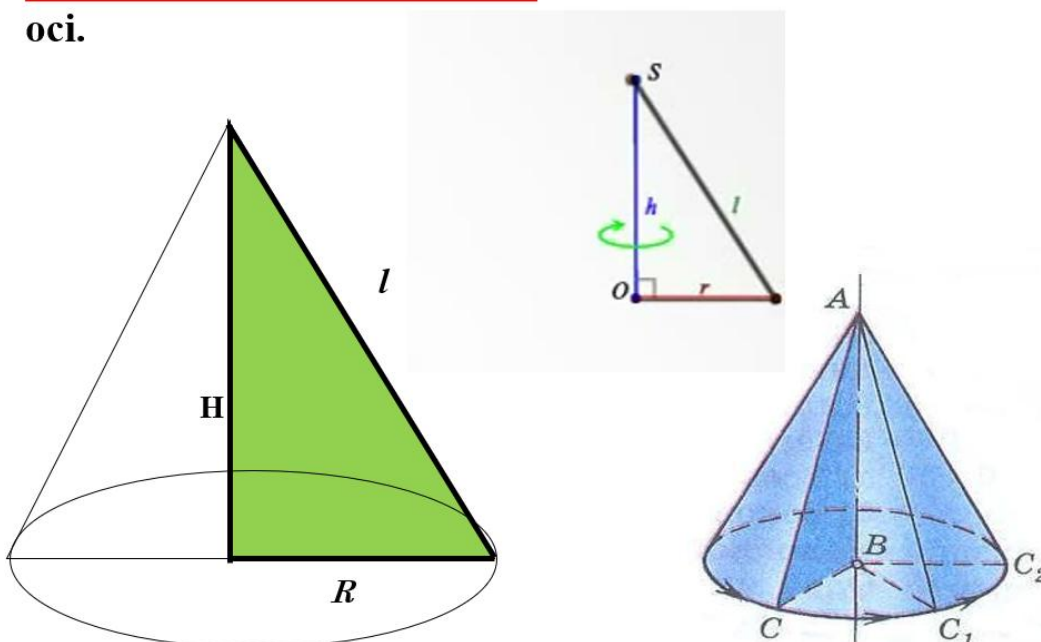
КОНУС

Означення

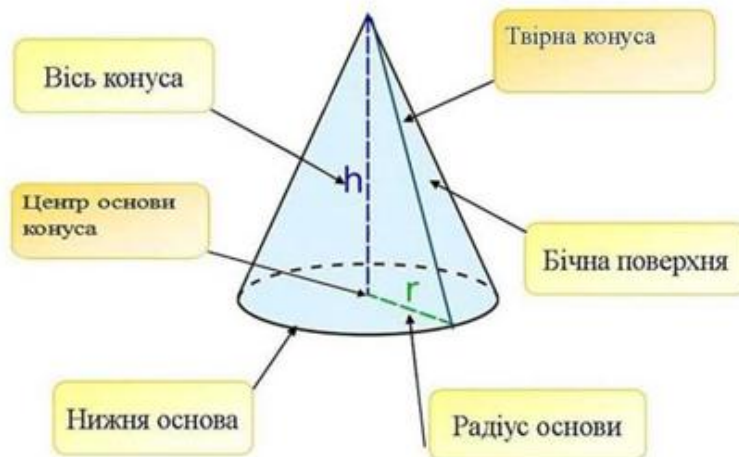
Конусом називається тіло, утворене обертанням прямокутного трикутника навколо однієї зі сторін, що прилягає до прямого кута.



Конус може бути утворений в результаті обертання **прямокутного трикутника** навколо одного з катетів як осі.



ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ КОНУСА



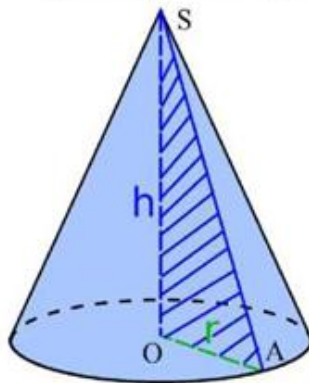
ВЛАСТИВОСТІ КОНУСА

- 1) Твірні конуса рівні.
- 2) Висота конуса

$$h = OS$$

- 3) При обертанні прямокутного трикутника навколо його катета як осі утворюється конус.

SOA – прямокутний трикутник ; SO – вісь утвореного конуса, SA – твірна.



Радіус основи конуса	Висота конуса
$R = OA$	$H = OS$

- 4) Площа основи конуса: $S_{\text{осн}} = \pi R^2$.

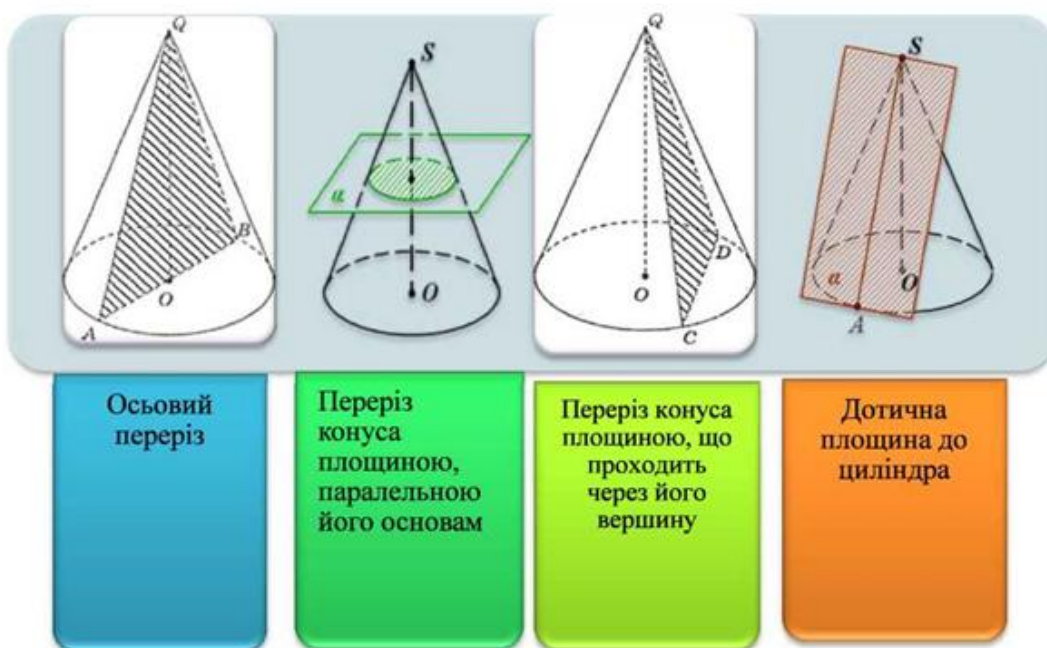
Площа бічної поверхні конуса: $S_{\text{біч}} = \pi Rl$.

Площа повної поверхні конуса:

$$S_{\text{пов}} = S_{\text{осн}} + S_{\text{біч}} = \pi R^2 + \pi Rl = \pi R(l + R); \quad S_{\text{пов}} = \pi R(l + R).$$

- 5) Об'єм конуса: $V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$.

ПЕРЕРІЗИ КОНУСА ПЛОЩИНАМИ

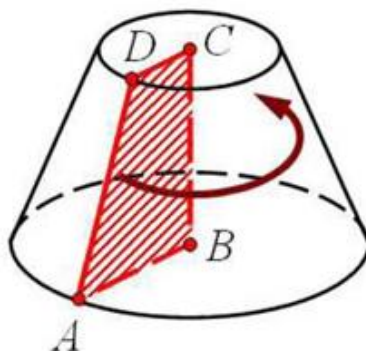


ЗРІЗАНИЙ КОНУС

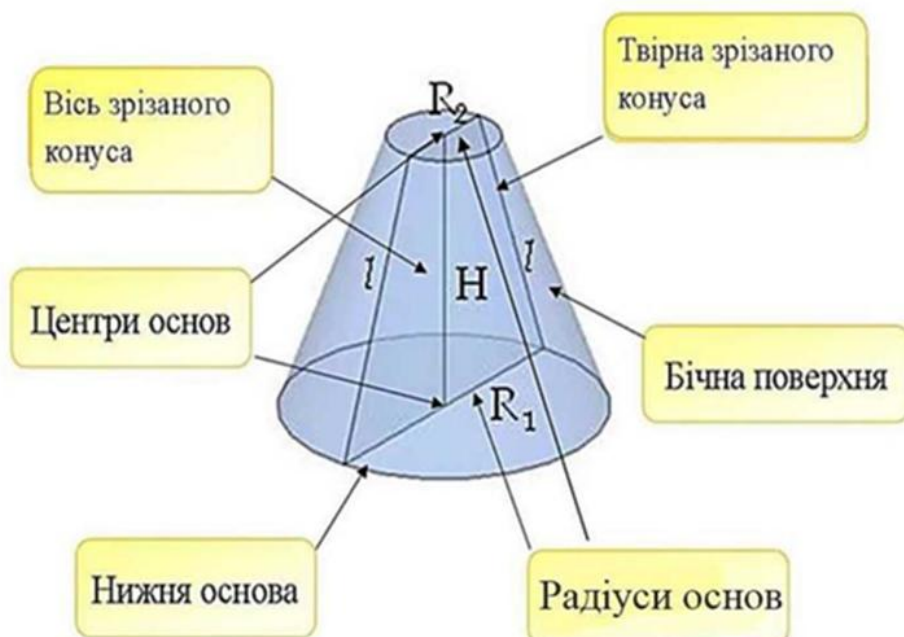
Означення

Якщо задано конус і проведено площину, яка паралельна його основі й перетинає конус, то ця площина відтинає від нього менший конус.

Частина заданого конуса, що залишилася, називається зрізаним конусом.



ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТИ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

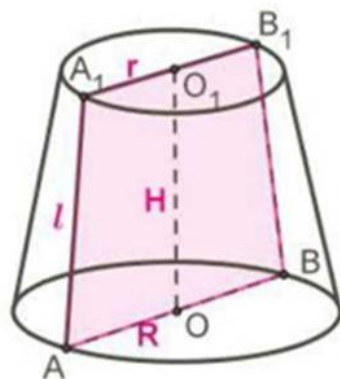


ВЛАСТИВОСТІ ЗРІЗАНОГО КОНУСА

- 1) Твірні конуса рівні.
- 2) Висота зрізаного конуса

$$h = OO_1$$

- 3) При обертанні прямокутної трапеції навколо її осі: $0AA_1O_1$ – прямокутна трапеція; OO_1 – вісь утвореного зрізаного конуса.



Радіус основи конуса	Висота циліндра
$R = OA$	$H = OO_1$

- 4) Площа основи зрізаного конуса:

$$S_{н.осн} = \pi R^2; S_{в.осн} = \pi r^2.$$

- 5) Площа бічної поверхні зрізаного конуса:

$$S_{біч} = \pi(R + r)l.$$

Площа повної поверхні зрізаного конуса:

$$S_{\text{пов}} = S_{\text{н.очн}} + S_{\text{в.очн}} + S_{\text{біч}} = \pi R^2 + \pi r^2 + \pi(R + r)l = \pi(R^2 + r^2) + \pi(R + r)l = \pi R(l + R) + \pi r(l + r).$$

$$S_{\text{пов}} = \pi R(l + R) + \pi r(l + r).$$

б) Об'єм зрізаного конуса: $V = \frac{1}{3} S_{\text{очн}} \cdot H = \frac{1}{3} \pi H(R^2 + Rr + r^2).$