

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД
«ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА»

Навчально-науковий інститут фізики,
математики та інформаційних технологій

Кафедра фізико-технічних систем та інформатики

Козуб Галина Олександрівна

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПОЛІВ В
ТВЕРДИХ ТІЛАХ

кваліфікаційна робота
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня
освітньої програми
«Комп'ютерні науки та інформаційні технології»
за спеціальністю 122 «Комп'ютерні науки»

Особистий підпис _____

Науковий керівник _____ **Ольга СМАГІНА,**
кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри фізико-технічних
систем та інформатики

Завідувач кафедри _____ **Юрій КОЗУБ,**
доктор технічних наук, доцент
кафедри фізико-технічних систем
та інформатики

Полтава – 2023

АНОТАЦІЯ

Козуб Г.О.

Тема: Чисельне моделювання фізико-механічних полів в твердих тілах

Спеціальність: 122 «Комп'ютерні науки».

Установа: ДЗ ЛНУ імені Тараса Шевченка, 2023 р.

Кваліфікаційна робота містить: 90 стор., 4 табл., 15 рис., 43 джерело, 2 додатки.

Об'єкт дослідження – процеси термопружного деформування елементів конструкцій з твердих тіл.

Предмет дослідження – величини параметрів напружено-деформованого стану конструкцій в умовах термосилового навантаження.

Мета роботи – розв'язання проблеми визначення термомеханічних полів, напружень та деформацій в просторових конструкціях із анізотропних матеріалів.

Методи дослідження: *Теоретичні методи:* аналіз науково-технічних джерел з проблем дослідження. *Емпіричні методи:* аналіз проблеми чисельного моделювання фізико-механічних полів в твердих тілах; дискретизація твердих тіл чисельними методами. *Експериментальні методи:* тестування розробленого додатку на експериментальних задачах.

Результати роботи. Досліджено основні вихідні і розрахункові співвідношення методу скінченних елементів для задач теплопровідності конструкцій, а також алгоритми їх розв'язання. Проведено чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів. Розроблено програмний комплекс для чисельного розв'язання зв'язаних задач термопружності з використанням МСЕ.

Ключові слова: МСЕ, НДС, ТЕРМОПРУЖНІСТЬ, ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ, МІРЕЛА+

ABSTRACT

Kozub H.O.

Theme: Numerical modeling of physical and mechanical fields in solid bodies

Specialty: 122 «Computer Science»

Institution: Luhansk Taras Shevchenko National University, 2023

Qualification work contains: 90 pages, 4 tables, 15 figures, 43 sources, 2 appendices.

Object of research processes of thermospring deformation of structural elements made of solid bodies.

Subject of research - values of the parameters of the stress-strain state of structures under conditions of thermoforce loading

Purpose of the study solving the problem of determining thermomechanical fields, stresses and deformations in spatial structures made of anisotropic materials.

Research methods: *Theoretical methods:* analysis of scientific and technical sources on research problems. *Empirical methods:* analysis of the problem of numerical modeling of physical and mechanical fields in solid bodies; discretization of solid bodies by numerical methods. *Experimental methods:* testing the developed application on experimental tasks.

Results of research. The main initial and calculation ratios of the finite element method for problems of thermal conductivity of structures, as well as algorithms for their solution, were studied. Numerical studies were conducted to substantiate the reliability of the results. A software complex has been developed for the numerical solution of coupled problems of thermoelasticity using FEM.

Keywords: FEM, SDS, THERMOELASTICITY, THERMAL CONDUCTIVITY, MIRELA+

ЗМІСТ

	Стор.
ВСТУП	6
РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ІСНУЮЧИХ РІШЕНЬ	10
1.1. Проблеми та задачі термомеханіки твердих тіл	10
1.2. Сучасні підходи до розв'язання задач термомеханіки у тривимірній постановці	18
1.3. Висновки до розділу 1	26
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ З ТВЕРДИХ ТІЛ.....	28
2.1. Скінченний елемент для розв'язання задач теплопровідності.....	28
2.2. Нестационарні задачі теплопровідності композитів	40
2.3. Дослідження збіжності рішення	46
2.4. Висновки до розділу 2	52
РОЗДІЛ 3. ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ	55
3.1. Структура обчислювального комплексу «МІРЕЛА+»	55
3.2. Підсистеми «ТЕРЛ» розв'язування задач теплопровідності	57
3.3. Формування вихідних даних.....	60
3.4. Програмне забезпечення підсистеми «ТЕРЛ».....	61
3.5. Побудова алгоритму розв'язання задачі термопружності	66
3.6. Програмне забезпечення підсистеми «TERCOM»	70
3.7. Висновки до розділу	72
Список використаних джерел	75
ДОДАТКИ.....	80
Додаток А. Фрагмент коду програми модулю «ТЕРЕЛ»	80
Додаток Б. Сертифікат впровадження	90

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ ПОЗНАЧЕНЬ, СИМВОЛІВ, СКОРОЧЕНЬ

MCE	—	метод скінчених елементів;
MCP	—	метод скінченних різниць;
BPM	—	варіаційно-різницевий метод;
ММК	—	метод Монте-Карло;
МП	—	метод прямих;
MGE	—	метод граничних елементів;
МІРЕЛА	—	міцність і руйнування еластомірних матеріалів;
БД	—	база даних;
НДС	—	напружено-деформований стан;
CE	—	скінчений елемент;
CAD	—	Computer Aided Design;
CAE	—	Computer Aided Engineering;
RAD	—	Rapid Of Appendixes Development;
ПЗ	—	програмне забезпечення;
IDE	—	Integrated Design Environmen.

ВСТУП

Актуальність теми. Сучасні досягнення в галузі машинобудування, при проектуванні будівельних конструкцій, аерокосмічної і військової техніки тісно пов'язані з використанням еластомерів як конструкційних матеріалів. Елементи конструкцій з таких матеріалів, як правило, працюють в умовах інтенсивного термосилового навантаження та супроводжуються ефектами як зворотної (термопружні), так і незворотної дії (розігрів внаслідок внутрішньої дисипації механічної енергії). Високі вимоги до надійності і економічності конструкцій, їх безвідмовної роботи ведуть до необхідності розгляду складних просторових задач термопружного деформування при наявності різноманітних супутніх факторів, що ускладнюють аналіз їх поведінки. Серед таких факторів можна виділити набуті або запроектовані початкові напруження, анізотропію властивостей матеріалів, які значною мірою впливають на експлуатаційні характеристики конструкцій, що розглядаються. Опис поведінки матеріалу з урахуванням теплових ефектів проводиться в рамках термомеханіки.

Розв'язання таких задач можливе лише на основі чисельних методів, серед яких провідне місце займає метод скінченних елементів (МСЕ), що засвідчено його широким використанням в інженерній практиці.

Таким чином, розробка та реалізація об'єктно-орієнтованих ефективних підходів до розв'язання просторових задач термопружного деформування конструкцій в механіки твердих тіл, їх термомеханічної поведінки є **актуальною** науковою проблемою сучасної механіки та представляє практичний інтерес.

Мета роботи є розв'язання проблеми визначення термомеханічних полів, напружень та деформацій в просторових конструкціях із анізотропних матеріалів.

Поставлена мета досягається вирішенням наступних **завдань**:

- створення чисельної методики моделювання термопружного деформування попередньо навантажених конструкцій;
- розробка модифікованих розрахункових співвідношень просторових скінченних елементів для розв'язання задач теплопровідності анізотропних тіл;
- побудова алгоритмів чисельного моделювання термомеханічних полів в твердих тілах на основі розв'язання задачі термопружності;
- створення пакету прикладних програм для визначення напружено-деформованого стану конструкцій із композитів;
- аналіз достовірності, збіжності та ефективності розробленої методики на основі порівняння отриманих розв'язків з відомими аналітичними, чисельними результатами та експериментальними даними;

Об'єкт дослідження – процеси термопружного деформування елементів конструкцій з твердих тіл.

Предмет дослідження – величини параметрів напружено-деформованого стану конструкцій в умовах термосилового навантаження.

Методи досліджень – *теоретичні методи*: аналіз науково-технічних джерел з проблем дослідження. *Емпіричні методи*: аналіз проблеми чисельного моделювання фізико-механічних полів в твердих тілах; дискретизація твердих тіл чисельними методами. *Експериментальні методи*: тестування розробленого додатку на експериментальних задачах.

Наукова новизна результатів роботи полягає у створенні на основі методу скінченних елементів нового ефективного підходу до чисельного моделювання задачі термопружності конструкцій під дією силових та температурних навантажень.

Практичне значення отриманих результатів полягає в розробці чисельної методики і програмних засобів для визначення напружено-деформованого стану (НДС) композитних просторових конструкцій в умовах

термосилових навантажень з урахуванням анізотропії властивостей матеріалу.

Результати магістерської роботи можуть застосовуватись при проектуванні та вдосконаленні конструкцій з композитів на відповідних промислових підприємствах машинобудівної, будівельної, транспортної, військової та інших галузей.

Особистий внесок здобувача. Основні результати та положення, які становлять зміст магістерського дослідження, отримані автором самостійно. Матеріали роботи повною мірою відображені в публікаціях автора.

В індивідуальній публікації, а також підготовлених у співавторстві, викладені наступні наукові результати, що належать автору: методика та алгоритм розв'язання задач деформування конструкцій з початковими напруженнями скінченного елемента в задачах термопружності [21, 6].

Апробація результатів дисертації. Матеріали дослідження доповідались на Міжнародній науковій конференції Modern ways of solving the latest problems in science. Proceedings of the XXXVII International Scientific and Practical Conference. (м. Varna, Bulgaria. 2022 р.);

Публікації. Основні результати дослідження викладено в 2 наукових працях, з них: 1 монографія [6], 1 стаття у виданні, що входять до закордонних міжнародних науковометричних баз [21].

Структура та обсяг роботи. Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел і додатків. Загальний обсяг роботи становить 90 сторінок, у тому числі 15 рисунків, 4 таблиці, список використаних джерел із 43 найменувань на 5 сторінках, додатки на 10 сторінках.

В першому розділі наведено отримані в результаті проведеного аналізу літературних джерел дані про підходи та методи розв'язання задач в умовах дії термосилових навантажень, визначено вихідні співвідношення та обрано найбільш ефективні чисельні методи їх розв'язання.

У другому розділі містить основні вихідні і розрахункові співвідношення методу скінченних елементів (МСЕ) для задач теплопровідності конструкцій, а також алгоритми їх розв'язання. Проведено чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів.

В третьому розділі наведено особливості використання МСЕ для розв'язання зв'язаних задач термопружності. Представлено структуру розробленого програмного комплексу.

У додатках наведено фрагменти коду та сертифікат участі у міжнародній науково-практичній конференції.

РОЗДІЛ 1

АНАЛІЗ СУЧАСНОГО СТАНУ ІСНУЮЧИХ РІШЕНЬ

1.1. Проблеми та задачі термомеханіки твердих тіл

В процесі експлуатації елементи конструкцій зазнають різного роду механічних і теплових навантажень, а вимоги зниження матеріаломісткості і собівартості конструкції, збільшення строків її роботи призводить до необхідності прогнозування поведінки матеріалу які неможливо описати за допомогою тільки лінійних співвідношень.

В роботах В.А. Баженова [6], Я.М. Григоренка [11], О.І. Гуляра, О.С. Сахарова [13], В.В. Киричевського [19], В.Г. Пискунова [31], В.О. Толока [40], J.R. Barber [1] та ін. висвітлено термодинамічне обґрунтування основних рівнянь механіки взаємозв'язаних полів в матеріалах і елементах конструкцій, в тому числі і у неоднорідних, розвиток яких зумовлено потребам сучасної техніки внаслідок її експлуатації в умовах статичних і динамічних механічних та температурних навантажень.

Як правило, елементарні термомеханічні умови об'єднують з найпростішими тепловими умовами [25]. Умови термомеханічної взаємодії з матрицею можна представити як узагальнення умов пружної взаємодії на випадок впливу температурного поля. При цьому задачі термопружності, зводяться до вирішення систем сингулярних інтегральних рівнянь щодо стрибків напружень або переміщень на лінії, яка моделює включення або тріщину, в разі, коли задані силові навантаження і температурне поле.

При розв'язанні задач теплопровідності для тонкостінних систем значного спрощення можна досягти шляхом введення різних гіпотез про характер розподілу температурного поля по товщині конструкції.

У роботах [34, 29] розглянуто аналіз термопружних напружень композитних матеріалів, викладено теорії і методи визначення термічних напружень. Математичне обґрунтування розрахунку деформації при впливі

нестационарного і неоднорідного по товщині пакету температурного поля багатошарових циліндричних оболонок, а також чисельного методу дискретної ортогональної прогонки запропоновано в працях [20].

Тепловий стан об'єктів, що нагріваються, можна визначати і експериментальними методами [33, 23, 16]. Проте одержана при цьому інформація є недостатньою для розрахунку полів термічного напруження, тому що має дискретний характер і температурне поле не може бути визначено в об'ємі всього тіла. До недоліків експериментальних методів слід віднести і той факт, що при вимірюванні виникає викривлення температурного поля в місцях контакту термопар з поверхнею тіла і, особливо, при спробі визначення температури у внутрішніх точках тіла. Тому у більшості випадків для аналізу теплового стану перевагу надають розрахунковим методам, порівняно з експериментальними.

До класичних методів рішення задач теплопровідності належать такі методи: метод розділення змінних (метод Фур'є), метод функцій Гріна, метод теплових потенціалів і ін.

Стосовно до шаруватих конструкцій при використанні методу Фур'є, спочатку визначається сукупність частинних рішень диференціального рівняння теплопровідності, а потім складається ряд з цих рішень.

Сутність методу функцій джерел полягає в тому, що будь-який процес розповсюдження тепла в тілі можна представити у вигляді суми процесів вирівнювання температур, спричинених дією безлічі елементарних кількостей теплоти (джерел) розподілених в просторі і часі. Рішення для нелінійних задач в шаруватих композитах на основі вирішення у функціях Гріна розглянуто при нестационарних, періодичних і стаціонарних режимах теплопровідності [42].

При використанні варіаційних методів розв'язок визначаємо з умови мінімуму деякого функціоналу [7]. Розв'язок варіаційної задачі зазвичай знаходиться у вигляді, що мінімізує послідовності функцій які належать

області визначення еквівалентного функціоналу. Найбільш поширеними методами є методи Рітца і Канторовича [28]. Суть методу Рітца полягає в знаходженні розв'язку у вигляді ряду по базисних функціях, що мають властивість повноти і задовольняє граничним умовам задачі [28]. Невідомі коефіцієнти розкладання знаходяться шляхом мінімізації функціонала.

Розв'язання задачі теплопровідності методом Канторовича, в порівнянні з методом Рітца, більш просте і більш точне. До переваг даного методу слід віднести також те, що структура наближеного розв'язку визначає апріорі тільки по одній змінній, а по іншим змінним розв'язок повністю відповідає розглянутій задачі.

Застосовуються також методи Трефца, Біо, Лейбензона, Курапка, варіаційний принцип Айнолі та ін. Докладний опис цих методів, а також використання інтегрального перетворення Лапласа і варіаційних задач наведено у працях [28, 36].

Проекційні методи або методи зважених нев'язок, стосовно до задач теплопровідності можна поділити на метод колокацій, метод найменших квадратів, інтегральний метод, метод Гальоркіна. Ці методи стосовно до задач теплопровідності докладно описано у [43, 10, 35].

Варто також зазначити і деякі інші аналітичні методи розв'язання нелінійних задач, в яких введено поняття термічного шару: метод Швеця, метод Веймена і ін. Деякі аналітичні загальні і окремі методи розв'язання нелінійних задач теплопровідності наведено у роботах [27].

Основною перевагою аналітичного методу є те, що розв'язок отримується у загальному вигляді. Це дозволяє визначити температурний режим в будь-який момент часу і для будь-якої точки тіла. Проте для кусково-неоднорідних (шаруватих) тіл виникають певні труднощі, пов'язані з наявністю шарів, що мають різні теплофізичні властивості. Загальний порядок вирішуваної системи диференціальних рівнянь залежить від кількості шарів. Крім того, аналітичні розв'язки можуть бути використані для

чітко обмеженого класу задач. Певною мірою ці задачі можна назвати класичними. У практиці проектування коло задач значно ширше. Для аналізу теплового стану реальних об'єктів, потрібне застосування чисельних методів, які дозволяють провести розрахунок об'єкту при заданих теплових діях початкових і граничних умов.

Широкий розвиток комп'ютерних систем став поштовхом до розвитку ефективних чисельних методів, таких як метод скінченних різниць (МСР), варіаційно-різницевий метод (ВРМ), метод прямих (МП), метод Монте-Карло (ММК), метод скінченних елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ).

В першу чергу з чисельних методів необхідно відзначити МСР, який отримав значне поширення при розв'язанні задач теплопровідності.

В основу МСР покладено ідею про заміну диференціальних операторів деякими різницевиими аналогами. Внаслідок приходять до розв'язання систем алгебраїчних рівнянь.

Питання апроксимації, збіжності, точності і стійкості МСР розглянуто в роботах [12]. Варто відзначити, що до теперішнього часу розроблено низку універсальних програм, зорієнтованих на розв'язання задач теплопровідності для однорідних тіл, в основу яких покладено МСР.

Метод прямих є поєднанням МСР за однією координатою і аналітичних розв'язків за рештою. Даний метод є ефективним у окремих практичних задачах для областей простої геометричної форми.

В основі методу Монте-Карло лежить моделювання статистичного експерименту на комп'ютері і реєстрація числових характеристик, отриманих з експерименту.

Серед варіаційних чисельних методів першим почали застосовувати варіаційно-різницевий метод. Головна ідея цього методу - заміна похідних під знаком інтегралу, який відповідає варіаційної постановці задачі. Цей

метод з успіхом застосовувався для розв'язання складних задач теплопровідності, термопружності у роботах С. Г. Міхліна [28].

Одним з найефективніших чисельних методів, що мають варіаційну основу, є МСЕ. Виникнення і розвиток МСЕ обумовлений у першу чергу роботам в галузі будівельної механіки. Застосування МСЕ дає можливість здійснювати розрахунки з урахуванням більш досконалих фізичних і математичних моделей.

Для задач термопружності цей метод почав розвиватися порівняно нещодавно, на початку 60-х років минулого століття за кордоном і в 70-х роках на Україні. Великий вклад у його розвиток внесли вітчизняні та іноземні вчені В.А. Баженов [6], В.Г. Карнаухов[18], В.В. Киричевський[19], В.Г. Пискунов[32], О.С. Сахаров[19, 26], В.О. Толок[40], Л. Сегерлінд[37], та ін.

Спочатку для оцінки теплового стану двовимірних тіл, почав застосовуватися трикутний скінченний елемент (СЕ) з полілінійним розподілом температури по області елемента. Надалі обґрунтованість застосування даного СЕ підтверджено в роботі [37], в тому числі для конструкцій з різко змінними геометричними і фізичними параметрами, а також в нелінійних задачах.

Можливе також застосування ізопараметричних СЕ для оцінки теплового стану конструкцій [26]. Варіаційно-різницеве трактування МСЕ [36] поставило його в один ряд з іншими чисельними методами рішення рівнянь механіки та математичної фізики і дозволило довести, що рішення з використанням МСЕ збігається з порядком, визначеним порядком апроксимації інтегралу енергії.

В даний час існує декілька підходів до розв'язання нестационарних задач теплопровідності на основі МСЕ. У разі якщо часовий аргумент є параметром варіаційних рівнянь, застосовують МСР, або метод Гальоркіна за часовою координатою [26]. Для варіаційних принципів зі згорткою проводять

чисельне інтегрування по часовому аргументу. У практичних застосуваннях найчастіше використовується сімейство двошарових або тришарових часових різницевих схем [15].

Для досягнення необхідної точності розв'язку задач МСЕ здійснюється послідовне згущення сітки і порівняння результатів, отриманих при відповідному збільшенні числа невідомих. При дослідженні нестационарних задач використовуються крокові алгоритми за параметром часу, відповідно для збільшення точності проводиться послідовне зменшенням кроків за часом.

Задача теплопровідності для тіл однорідної структури на основі МСЕ розглянуто у великій кількості робіт. Нелінійні задачі розглянуто у роботі [19], а питання збіжності та стійкості розв'язків – у роботах [43]. Питання автоматизації обчислювальних процесів при розв'язанні задач МСЕ отримали висвітлення в роботах[5].

Динамічна поведінка і температура дисипативного розігріву в'язкопружного тіла обертання при осесиметричному навантаженні в нелінійній постановці розглянута в роботі [18]. Тут враховано залежність фізико-механічних властивостей матеріалу від температури, зокрема, комплексного модулю зсуву. Рішення на кожній ітерації систем лінійних рівнянь в'язкопружності і теплопровідності проводилася методом скінченних елементів. Для вирішення за МСЕ було обрано чотирикутний СЕ з квадратичною апроксимацією, що дозволило підвищити точність обчислень в області резонансу.

Скінченно-елементний метод розв'язання двовимірних задач термов'язкопружності при визначенні дії температурного поля на шаруваті оболонки обертання з урахуванням нелінійних ефектів, обумовлених залежністю напружень від температури, дано в статтях [9]. На кожному ітераційному кроці вирішувалася лінеаризована задача пружності і теплопровідності.

Інший підхід засновано на зведенні тривимірної задачі теплопровідності до двовимірної за допомогою, будь-яких гіпотез про розподіл температури по товщині пакету шарів з подальшою реалізацією двовимірної моделі методом скінченних елементів. Таку методику було використано авторами робіт [39] при вирішенні задач теплопровідності для ортотропних та анізотропних шаруватих оболонок та пластин. Проте застосування такого підходу обмежується елементами конструкцій простої форми [31]. Існують також підходи, засновані на синтезі МСЕ і методу інтегральних перетворень [41]. Використання чисельних методів відкриває великі можливості для реалізації прикладних моделей розрахунку неоднорідних оболонок і пластин на теплові впливи.

Стосовно до розрахунку шаруватих конструкцій методом скінченних елементів доцільна розробка чисельних методів з доведенням їх до програмного забезпечення, орієнтованого на широке використання в практиці проектування, хоча наявність шаруватої структури, відмінність теплофізичних характеристик вносить значні труднощі при розв'язанні задач теплопровідності.

У роботі Хорошуна Л. П. [41] сформульовано модель нелінійного деформування волокнистих композитних матеріалів при фізично нелінійному деформуванні компонентів. Побудовано алгоритми для визначення ефективних деформівних властивостей волокнистих композитних матеріалів. Досліджено вплив нелінійності деформування компонентів на ефективні деформівні властивості волокнистих композитів.

У роботі [1] розв'язано задачу термопружності для тонких ортотропних оболонок невід'ємної кривини при дії зосередженого джерела тепла, що рухається по поверхні оболонки. Задано лінійний розподіл температури по товщині оболонки та конвективний теплообмін за законом Ньютона з її бокових поверхонь. За допомогою інтегральних перетворень Фур'є і Лапласа отримано розв'язок в аналітичному вигляді. Досліджено вплив

термомеханічних властивостей матеріалу, а також параметрів теплообміну за навколишнім середовищем на напружено-деформований стан оболонки.

У роботі [24] розроблено модифікований метод Максвела визначення ефективних сталих сформульовано в термінах дипольних моментів фрагмента реального композиту і еквівалентного включення. За умови врахування взаємодії між включеннями метод є строгим у сенсі, що одержана шляхом розв'язання модельної задачі оцінка ефективної сталої збігається до точного значення зі збільшенням розміру кластера. На прикладі задачі визначення теплопровідності волокнистого композиту показано, що метод забезпечує обчислення з високою точністю ефективних сталих композитів як періодичної, так і неупорядкованої мікроструктури.

Задачу про визначення релаксаційних властивостей двокомпонентного матеріалу залежно від часу, концентрації армуючого компонента, типу армування, а також їх взаємодії розв'язано у роботі А.О. Камінського[17]. Тип армування визначається параметром еліпсоїда обертання, яким моделюється включення. Ефективні модулі композитного матеріалу визначено на основі релаксаційних властивостей матеріалів компонентів. Досліджено випадок, коли ізотропні матеріали обох компонентів мають в'язкопружні властивості, які можуть бути описані за допомогою двох дробово-експоненційних функцій Работнова різних порядків дробовості для характеристик об'ємного розширення й зсуву. Розв'язок в області оригіналів пропонується отримати за допомогою його дробового раціонального представлення в області перетворення. Оптимізація параметрів цього представлення й використання наведеної в роботі процедури перерахунку параметрів розв'язку в області оригіналів дозволила отримати розв'язки в компактній формі в термінах ядер релаксації.

Широкий спектр методів із застосуванням імовірнісних та статистичних підходів, які дозволяють описувати механічну поведінку композитів представлено у монографії Y. W. Kwon, D. H. Allen, R. Talreja [2].

Розглядаються різні підходи до визначення пружних сталих при наявності пошкоджень, тріщин, дифузії, температурних факторів, реологічних процесів і та ін. У тому числі наведено термопружні сталі для волокнистого композита, армованого системою n волокон.

1.2. Сучасні підходи до розв'язання задач термомеханіки у тривимірній постановці

При проектуванні конструкцій, що працюють в умовах високого теплового і механічного навантаження з високими техніко-економічними показниками, виникає необхідність прогнозування фізико-механічних характеристик і показників якості композиційних матеріалів у тривимірному аспекті.

Перші дослідження в області термопружності було опубліковано Пуассоном в 1828 р в роботі «Про рівновагу та рух пружних тіл» [4]. Трохи пізніше Дюгамель отримав рівняння термопружних коливань порожньої кулі і визначив температурні напруження всередині двошарової кулі, що знаходиться під дією змінного центрально-симетричного поля. Дослідження Дюамеля були продовжені Нейманом (1841р.) та Кельвіном (1878 г.), на основі чого було представлено рівняння лінійної термопружності, в яких рівняння стану подано лінійними залежностями між напруженнями, деформаціями і температурою. У роботах Бархардта (1873), Релея (1901), Тимошенка (1916) і ін. науковців було розроблено загальні методи розв'язання задач термопружності для двовимірного і тривимірного розподілення температур. До середини 50-их років минулого століття були вирішені деякі окремі задачі.

При вирішенні просторових і плоских задач широко використовується загальні подання рівнянь теорії пружності через гармонічні, бігармонічні, квазігармонічні і інші функції.

У роботах Я. М. Григоренка, А. Т. Василенка, Н. Д. Панкратової [11, 12] досліджено НДС тонкостінних неоднорідних оболонок при температурних впливах, при цьому автори вводять додаткові припущення про розгляд заповнювача як тривимірного тіла, а до відносно тонких і жорстких навантажених шарів застосовуються гіпотези Кірхгофа або вони працюють як мембрани.

Одним з універсальних і ефективних сучасних методів, як зазначалося раніше, при розв'язанні задач термопружності для анізотропних тіл зі складною геометрією є метод скінченних елементів. Для розв'язання просторових задач побудовано скінченні елементи різної форми - паралелепіпеди, тетраедри, трикутні призми та ін. Питанням комплексного розв'язання задач термопружності для однорідних та шаруватих тіл присвячено ряд праць.

Загальні питання термопружності в механіці твердих тіл, у тому числі механіці композиційних матеріалів, знаходяться в центрі уваги дослідників.

Про оптимальний опис в'язкопружних властивостей композитів, що складаються з компонентів з в'язкопружними властивостями розглянуто задачу на основі методу перетворення Лапласа – Карсона та раціональної апроксимації побудовано алгоритм зведення функцій, що описують в'язкопружні властивості матриці та наповнювача, до функцій одного класу. Отримана методика може бути використана для спрощення розв'язання задач лінійної теорії в'язкопружності. Як приклад розглянуто задачу про зведення функцій в'язкопружності до одного класу в односпрямовано армованому композиті [31].

В рамках МСЕ розв'язання задач термопружності шаруватих конструкцій можливо шляхом застосування тривимірних скінченних елементів і дискретизації всієї системи, як в плані, так і по товщині. Такий підхід застосовано у роботі [39], де розглянуто деякі задачі про термонапружений стан багатошарових пластин.

Розв'язання просторової задачі термопружності на основі методу Бубнова-Гальоркіна приведено в роботах [8, 13]. При цьому, досліджено термонапружений стан товстих і тришарових пластин. Надалі В. Г. Пискуновим було узагальнено метод рішення на випадок шаруватих тіл [31].

Розв'язання змішаних тривимірних задач для двошарових термопружних анізотропних плит приведено у [7]. Система рівнянь термопружності, яку записано в безмірних координатах, є сингулярно збуреною. Розв'язання здійснюється асимптотичним методом. Показано неправомірність прийняття класичної теорії пластин до розглянутого класу задач.

У роботі [33] В.Н. Потураєвим проведено теоретичні та експериментальні дослідження по визначенню температурних полів і теплоутворенню у гумометалевих виробах при деформаціях стиснення, зсуву й удару в режимі циклічного навантаження. Також представлено розв'язок задачі тривимірної теплопровідності для пластини і циліндру при сталому температурному режимі, отримано вирази для інтенсивності внутрішніх джерел тепла в них при різних видах навантаження. Встановлено нелінійну залежність температури нагрівання гумових елементів від амплітуди деформації.

У роботі Карнаухова В.Г. [18] розглянуто зв'язану тривимірну задачу про вимушені гармонічні коливання й дисипативний розігрів тришарової товстостінної в'язкопружної циліндричної панелі з шарнірним опиранням торців при дії на неї зовнішнього рівномірного поверхневого гармонічного тиску. Враховано взаємодію механічних і теплових полів за припущення про незалежність властивостей матеріалу від температури. Розроблено скінченно-елементний метод розв'язання динамічної задачі теплопровідності з відомим джерелом тепла. Розраховано амплітудно- й температурно-частотні характеристики, а також залежності власної частоти, коефіцієнта

демпфірування, максимальних амплітуди й температури розігріву від товщини демпфуючого середнього шару панелі при її коливаннях на першій моді.

У роботі О.Я.Григоренка [12] на базі тривимірної теорії пружності розглянуто задачу про вільні коливання суцільного циліндру при різних граничних умовах на його торцях. Запропоновано чисельно-аналітичний підхід для розв'язання даної задачі. Рівняння теорії пружності в частинних похідних за допомогою методів сплайн-апроксимації та колокації зведено до систем звичайних диференціальних рівнянь високого порядку по радіальній координаті, які розв'язуються стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації в поєднанні з методом покрокового пошуку. Наведено результати розрахунку для випадку трансверсально-ізотропного та неоднорідного матеріалів циліндра та деяких видів крайових умов на його торцях. У роботі [12] проведено дослідження напружено-деформованого стану пологої прямокутної в плані ортотропної оболонки зі змінною товщиною в двох координатних напрямках при різних граничних умовах на краях в уточненій постановці. Для розв'язання двовимірних крайових задач використано чисельно-аналітичний підхід, який базується на застосуванні сплайн-апроксимації та методу дискретної ортогоналізації.

На теперішній час для ефективного пошуку розв'язку нестационарних задач потрібно володіти всім набором засобів аналізу, чітко представляти правила і границі їх застосування. До того ж, високі вимоги до розрахункових моделей, що закладені до сучасної нормативної бази припускають розгляд нестационарних навантажень різного рівня інтенсивності, які можуть діяти на конструкцію в один і той же момент часу, що в свою чергу потребує ретельного дослідження меж достовірного використання того чи іншого алгоритму. Важливим етапом в реалізації обчислювальних систем для розв'язання просторових задач динаміки є вибір оптимальних, з точки зору швидкості і складності процесів деформування,

алгоритмів інтегрування рівнянь руху у часі, особливістю яких в даній роботі є їх розвиток в рамках МСЕ. Відомо, що вибір того чи іншого алгоритму пов'язано із швидкістю протікання процесу деформування та характеру навантажень. При аналізі перехідних процесів найбільше розповсюдження отримав метод узагальнених координат, який припускає розклад розшукуваного рішення в ряд по формах власних коливань. В цілому, для розв'язання систем рівнянь динаміки рекомендовані прямі методи безпосереднього інтегрування по часовій координаті, залишаючи модальні методи для проблем, що пов'язані з використанням нижньої частини частотного спектру. Широке розповсюдження отримали неявні схеми інтегрування за часом (метод Ньюмарка, метод θ -Вільсона), які допускають у порівнянні з явними значно більший крок по параметру. Специфіка функцій у просторі оператора пружності для тіл із змінними вздовж направляючої параметрами жорсткості і мас. Явно виділена клітинна структура як матриці жорсткості, так і матриці мас, є підставою для використання алгоритмів, що комбінують прямі та ітераційні методи розв'язання. Поєднання ітераційних циклів, що з однієї сторони пов'язані з порушенням однорідності об'єкту вздовж направляючої, а з іншої є природними для самих алгоритмів (метод ітерацій у підпросторі) дозволяє значно зменшити обчислювальні задачі [6].

В роботі М. Mukhopadhyay [3] здійснено спробу викласти комплексний та єдиний підхід до аналізу ряду аспектів механіки композитів. Викладено різні теорії деформування конструкцій зі склопластиків, зокрема балок, пластин тощо. Розглянуто особливості розв'язання задач статички, динаміки, термопружності та теплопровідності, механіки руйнування. Представлено основи методу скінченних елементів для розв'язання цих задач та чисельні результати розрахунків.

Проведений аналіз методів розв'язання задач теплопровідності і пружності показав, що для композитних конструкцій існують результати розв'язання в тривимірній постановці. Проте методика розрахунку

еластомерних композитних конструкцій потребує подальшого розвитку шляхом розробки моделей, що дозволяють описувати просторовий характер розподілу температурних полів. Найбільш перспективним є використання методу скінченних елементів, як одного з ефективних чисельних методів розв'язання задач термопружності.

Зрозуміло, що практичне застосування тривимірних рівнянь теорії пружності для розрахунку реальних шаруватих конструкцій, за умов термосилових експлуатаційних навантажень з наперед заданими крайовими умовами, побудованих на основі застосування тривимірної схеми методу скінченних елементів, дозволяє ефективно моделювати поведінку шаруватих конструкцій складної форми. При цьому вдається уникнути спрощуючих гіпотез для моделювання композитних конструкцій.

Враховуючи різні способи розповсюдження тепла у конструкціях, розроблено різні методи й математичні моделі розв'язання задач. Розповсюдження тепла може проходити за рахунок теплопровідності, конвекції та випромінювання. При першому способі розповсюдження тепла (теплопровідності), коли тепло передається через саму речовину, процес відбувається через нерівномірний розподіл температур у різних частинах тіла і супроводжується виникненням напрямку потоку тепла і густини потоку тепла (віднесеного до одиниці площі кількості, що проходить через площадку тепла в одиницю часу). Поширення тепла внаслідок відносного руху часток нагрітого тіла завжди супроводжується виникненням в тілі температурних напружень і деформацій. Наявна залежність теплофізичних сталих матеріалу від температури і часу, залежність температури від часу, різних факторів зв'язку між полями напружень і деформацій, зв'язку теплових й електромагнітних полів і т.д. привели до розробки сучасних математичних моделей вирішення зв'язаних і незв'язаних задач термопружності.

При вирішенні задач термопружності для конструкцій зі анізотропних матеріалів застосовано різні теорії й підходи, які базуються на співвідношеннях зв'язаної задачі термовязкопружності, отриманих В.Г. Карнауховим [18], І.К. Сенченковим, Я.О. Жуком [14] та ін. Одним з найважливіших критеріїв дослідження пружних тіл з нерівномірним температурним полем є врахування залежності від температури фізичних і теплофізичних характеристик матеріалу: модулю пружності або модулю зсуву, коефіцієнту температурного розширення й коефіцієнту теплопровідності. В цьому випадку вирішується зв'язана задача термопружності.

При використанні лінійної моделі температурний й термопружний стан визначаються рішенням системи, яка складається з рівняння теплопровідності, класичних рівнянь руху, рівнянь закону Гука і класичних рівнянь сумісності [19, 5] та ін.

Очевидно, що всі термомеханічні процеси залежать від часу і для їх дослідження виникають задачі, що носять назву нестационарних (динамічних). Проте можна виділити ряд процесів, термомеханічний стан, в ході яких, хоча і змінюється в часі, але, починаючи з певного моменту часу, система приходить в стаціонарний (статичний) стан, який не залежить від часу. Моделі, що описують такі процеси, називають квазістатичними. У квазістатичних задачах термопружності інерційний член у рівняннях руху і похідні деформацій за часом в рівнянні теплопровідності не враховуються.

Формулювання задачі для квазістаціонарної постановки можна представити у вигляді рівняння Біо і рівняння теплопровідності [30]:

$$\iiint_V \delta F dv - \iiint_V P \delta u - \iint_S Q du = 0, \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}
& \iiint_V c_\varepsilon (T - T_0) \delta T dv + \iiint_V \beta^{ij} (T - T_0) \delta \varepsilon_{ij} dv = \\
& = \iiint_V \lambda^{ij} T_{,i} \delta T_{,j} dv + \iiint_V w_0 \delta T dv + \iint_S [q + h(T - \theta)] \delta T ds
\end{aligned} \tag{1.2}$$

де F – вільна енергія;

P, Q – вектори об'ємних і поверхневих навантажень;

u – вектор переміщень;

c_ε – теплоємність при постійній деформації;

β^{ij} – компоненти тензору ізотермічних пружних постійних, які визначають взаємний вплив температурного поля і поля деформацій;

ε_{ij} – компоненти тензору деформацій;

λ^{ij} – компоненти тензору теплопровідності;

w_0 – густина внутрішніх джерел теплоутворення;

q – тепловий потік;

h – коефіцієнт теплообміну;

θ – температура навколишнього середовища.

Розв'язання задач для багат шарових конструкцій складної форми пов'язано з математичними труднощами, які пов'язані з описом геометричних параметрів, умов теплообміну з зовнішнім середовищем, умов з'єднання, урахуванням внутрішніх джерел тепла, рішенням систем інтегральних рівнянь [6]. Для практичної реалізації є найбільш прийнятними уточнені теорії, що ґрунтуються на безперервно-структурних моделях, в яких кількість і порядок дозвільних рівнянь не залежить від числа шарів.

Серед чисельно-аналітичних методів, широке застосування для розв'язання задач знаходять метод Бубнова-Гальоркіна, метод прямих, метод Релея-Рітца і інші. Аналітичні методи, засновані на безпосередньому інтегруванні диференціальних рівнянь, є прийнятними у випадках, коли ці рівняння і граничні умови досить прості.

У реальних процесах деформування дія навантаження може відбуватися тільки за якийсь проміжок часу. Миттєве прикладання навантаження - це ідеальний процес, якого в природі не існує. Якщо розглянути деформування в часі, то напруження в момент часу t_i залежать від того, які напруження були в момент t_{i-1} . У деяких конструкціях цей фактор проявляється не суттєво. Проте існує великий клас конструкцій, в яких напруження попереднього навантаження істотно змінюють її жорсткісні властивості. Незважаючи на наявність великого досвіду розробки і експлуатації силових конструкцій, в даний час методи ідентифікації фізико-механічних параметрів розроблені недостатньо.

Розглянуті вище аналітичні і чисельні результати розв'язків задач термопружності, показують, що останнім часом йде інтенсивна чисельна реалізація на основі МСЕ розроблюваних прикладних теорій. Однак кожна з методик має свою область застосування і не є універсальною. Найбільш ефективним є використання скінченно-елементної методики, побудованої на основі просторової постановки, оскільки в цьому випадку можна уникнути різних спрощуючих гіпотез і дозволити врахувати геометрію конструкції і просторовий характер термосилового навантаження.

1.3. Висновки до розділу

На підставі аналізу та літературних джерел за темою магістерського дослідження можна зазначити, що незважаючи на велику кількість робіт, присвячених вивченню поведінки конструкцій з анізотропних матеріалів, залишаються ряд невирішених питань. Серед них можна виділити наступні:

- у більшості випадків задачі вирішувалися за двовимірною постановкою;
- в більшості робіт не враховувалася залежність фізичних і механічних властивостей матеріалу від навантаження;

Зроблені висновки дозволяють сформулювати основні завдання дослідження:

1. Розробка математичної моделі для чисельного моделювання конструкцій з еластомерів в задачах визначення напружено-деформованого стану та температурних полів;
2. Створення чисельної методики моделювання термопружного деформування конструкцій;
3. Побудова алгоритмів чисельного моделювання термомеханічних полів в твердих тілах на основі розв'язання задачі термопружності;
4. Створення пакету прикладних програм для визначення напружено-деформованого стану.

РОЗДІЛ 2

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ КОНСТРУКЦІЙ З ТВЕРДИХ ТІЛ

2.1. Скінченний елемент для розв'язання задач теплопровідності

Основною метою результатів досліджень, викладених у цьому розділі, є побудова уточненої скінченно-елементної моделі розподілу температурного поля по товщині шаруватого анізотропного композитного тіла.

Розглянемо застосування тривимірних скінченних елементів в задачах теплопровідності для шаруватих анізотропних конструкцій.

Для скінченно-елементного формулювання задачі теплопровідності для просторових конструкцій з анізотропних матеріалів, що мають складну геометричну форму, використовується базисна $z^i(z^1, z^2, z^3)$ і місцева $\xi^i(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ ортогональні системи координат, зв'язані зі скінченним елементом. Між базисними і місцевими координатами СЕ прийнято відображення, де прирости деформацій пов'язані співвідношеннями:

$$\varepsilon_{ij}^* = \frac{\partial X_m}{\partial z_i} \frac{\partial X_n}{\partial z_j} \varepsilon_{mn}, \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial z_m}{\partial X_i} \frac{\partial z_n}{\partial X_j} \varepsilon_{mn}^*$$

Для побудови матриці теплопровідності вихідне співвідношення опишемо у вигляді варіаційного рівняння Лагранжа при розгляді стаціонарної задачі теплопровідності:

$$\delta W = \int_V \left(w_o \delta T + \lambda_{ij} \frac{\partial T}{\partial \xi^i} \frac{\partial \delta T}{\partial \xi^j} \right) dv + \int_{S_1} q \delta T ds - \int_{S_2} h(T - \theta) \delta T ds = 0, \quad (2.1)$$

де w_0 - потужність джерела теплоутворення;

θ - температура навколишнього середовища;

λ_{ij} - тензор теплопровідності;

q - тепловий потік;

h - коефіцієнт тепловіддачі.

Варіаційне рівняння (2.1) за допомогою дискретизації розрахункової схеми МСЕ зведемо до системи алгебраїчних рівнянь.

Розглянемо лінійний скінченний елемент, властивості якого визначаються теплофізичними характеристиками. Розподіл температури за об'ємом СЕ задамо у вигляді лінійного закону апроксимації

$$T = \sum_{l=1}^8 \varphi_{(l)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) T_{(l)}, \quad (2.2)$$

де $T_{(l)}$ – температура у вузлових точках СЕ;

$\varphi_{(l)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{1}{4} (1 + \xi^1_{(l)} \xi^1) (1 + \xi^2_{(l)} \xi^2) (1 + \xi^3_{(l)} \xi^3)$ - базисні функції для

апроксимації температури в межах елемента.

Вважаємо, що між шарами матеріалу виконуються умови ідеального теплового контакту. Отже, на кордоні k -го і $(k + 1)$ -го шару виконується умова:

$$\begin{aligned} T^{(k)+} &= T^{(k+1)-}, \\ \lambda_{33}^{(k)} T_{,3}^{(k)+} &= \lambda_{33}^{(k+1)} T_{,3}^{(k+1)-}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для скінченних елементів, що моделюють процес поширення тепла в двошаровому матеріалі, поле температур апроксимується за допомогою відповідних базисних лінійних функцій, а в напрямку, перпендикулярному

границі шарів - кусково-лінійною, що забезпечує тотожність теплових потоків в напрямку спільної границі шарів:

$$\begin{aligned}\phi_3^i &= 2 - i + (-1)^i \frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}, \\ \phi_3^k &= 2 - k + (-1)^k \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}, \quad i, k=1,2.\end{aligned}$$

Для 1-го шару

$$\begin{aligned}\varphi_{(1)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 - \xi^2) \left[1 - \left(\frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1} \right], \\ \varphi_{(2)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 - \xi^2) \left[1 - \left(\frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1} \right], \\ \varphi_{(3)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 + \xi^2) \left[1 - \left(\frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1} \right], \\ \varphi_{(4)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 + \xi^2) \left[1 - \left(\frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1} \right], \\ \varphi_{(5)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 - \xi^2) \left(\frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}, \\ \varphi_{(6)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 - \xi^2) \left(\frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}, \\ \varphi_{(7)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 + \xi^2) \left(\frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}, \\ \varphi_{(8)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 + \xi^2) \left(\frac{\xi^3 + 1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Для 2-го шару

$$\begin{aligned}
 \Phi_{(1)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1} \right], \\
 \Phi_{(2)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1} \right], \\
 \Phi_{(3)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1} \right], \\
 \Phi_{(4)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1} \right], \\
 \Phi_{(5)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}, \\
 \Phi_{(6)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}, \\
 \Phi_{(7)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}, \\
 \Phi_{(8)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} \right)^{-1}. \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Для скінченних елементів, що моделюють процес поширення тепла в тришаровому матеріалі, поле температур апроксимується за допомогою базисних функцій вигляду:

Для 1-го шару:

$$\begin{aligned}
 \Phi_{(1)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2) \left[1 - \left(\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
 \Phi_{(2)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2) \left[1 - \left(\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
 \Phi_{(3)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \left[1 - \left(\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
 \Phi_{(4)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2) \left[1 - \left(\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
 \Phi_{(5)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2) \left(\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
 \Phi_{(6)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2) \left(\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
 \Phi_{(7)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \left(\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
 \Phi_{(8)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2) \left(\frac{\xi^3+1}{\lambda_{33}^1} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}. \tag{2.6}
 \end{aligned}$$

Для 2-го шару:

$$\Phi_{(1)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) = \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right],$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{(2)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
\varphi_{(3)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
\varphi_{(4)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
\varphi_{(5)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
\varphi_{(6)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
\varphi_{(7)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
\varphi_{(8)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{\xi^3 - h_1 + 1}{\lambda_{33}^2} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}. \quad (2.7)
\end{aligned}$$

Для 3-го шару:

$$\begin{aligned}
\varphi_{(1)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{\xi^3 - 1 + h_3}{\lambda_{33}^3} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
\varphi_{(2)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{\xi^3 - 1 + h_3}{\lambda_{33}^3} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
\varphi_{(3)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{\xi^3 - 1 + h_3}{\lambda_{33}^3} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right],
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{(4)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2) \left[1 - \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{\xi^3 - 1 + h_3}{\lambda_{33}^3} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1} \right], \\
\varphi_{(5)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1-\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{\xi^3 - 1 + h_3}{\lambda_{33}^3} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
\varphi_{(6)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1-\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{\xi^3 - 1 + h_3}{\lambda_{33}^3} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
\varphi_{(7)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1-\xi^1)(1+\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{\xi^3 - 1 + h_3}{\lambda_{33}^3} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}, \\
\varphi_{(8)}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) &= \frac{1}{4}(1+\xi^1)(1+\xi^2) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{\xi^3 - 1 + h_3}{\lambda_{33}^3} \right) \left(\frac{h_1}{\lambda_{33}^1} + \frac{h_2}{\lambda_{33}^2} + \frac{h_3}{\lambda_{33}^3} \right)^{-1}. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Вираз (2.2) запишемо в матричному вигляді:

$$T = \{T\}^T \{\Phi\}. \quad (2.9)$$

Апроксимуємо функцію температури у вигляді розкладання по степеневим функціям:

$$\begin{aligned}
T &= \chi^{(000)} + \chi^{(100)}\psi^{(100)} + \chi^{(010)}\psi^{(010)} + \chi^{(001)}\psi^{(001)} + \chi^{(110)}\psi^{(110)} \\
&+ \chi^{(101)}\psi^{(101)} + \chi^{(011)}\psi^{(011)} + \chi^{(111)}\psi^{(111)}; \quad (2.10)
\end{aligned}$$

або

$$T = \sum_{pqr}^{111} X^{(pqr)} \psi^{(pqr)} \quad (2.11)$$

Функції форми можна представити через степеневі функції:

$$\{\phi\} = [B]\{\psi\}, \quad (2.12)$$

де $[B]$ - матриця перетворення.

Похідні температури за координатами обчислюються за формулами:

$$\begin{aligned} \frac{\delta T}{\partial \xi^1} &= \chi^{(100)} + \chi^{(110)}\psi^{(010)} + \chi^{(101)}\psi^{(001)} + \chi^{(111)}\psi^{(011)}; \\ \frac{\delta T}{\partial \xi^2} &= \chi^{(010)} + \chi^{(110)}\psi^{(100)} + \chi^{(011)}\psi^{(001)} + \chi^{(111)}\psi^{(101)}; \\ \frac{\delta T}{\partial \xi^3} &= \chi^{(001)} + \chi^{(101)}\psi^{(100)} + \chi^{(011)}\psi^{(010)} + \chi^{(111)}\psi^{(110)}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Представимо вирази (2.12) і (2.13) в матричному вигляді і запишемо їх варіації:

$$\begin{aligned} \delta T &= \{\delta\chi\}^T \{\psi\}; \\ \delta T_{,i} &= \{\delta\chi\}^T \{\psi_{,i}\}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Згідно (2.12) маємо:

$$\begin{aligned} T &= \{T\}^T [B]\{\psi\}; T_{,i} = \{T\}^T [B]\{\psi_{,i}\}; \\ \delta T &= \{\psi\}^T [B]^T \delta\{T\}; T_{,i} = \{\psi_{,i}\}^T [B]^T \delta\{T\}; \end{aligned} \quad (2.15)$$

Припустимо розподіл температури на поверхні скінченного елемента, що знаходиться на кордоні області, функцією:

$$T^{(st)} = \sum_{p_s=0}^1 \sum_{q_t=0}^1 T^{(p_s q_t)} \phi(p_s q_t). \quad (2.16)$$

З урахуванням $\{\chi\}^T = \{T\}^T [B]$ температура в матричній формі на поверхні буде дорівнювати:

$$T^{(st)} = \{\psi^{(st)}\}^T [B^{(st)}]^T \{T^{(st)}\}, \quad (2.17)$$

$$\delta T^{(st)} = \{\psi^{(st)}\}^T [B^{(st)}]^T \delta \{T^{(st)}\}. \quad (2.18)$$

Підставимо вираз (2.17), (2.18) у рівняння (2.1):

$$\begin{aligned} \delta W^T = & \int_{-1}^1 \int \int \delta \{T\}^T [B] \{\psi_{,i}\} \lambda_{ij} \{\psi_{,j}\}^T [B]^T \{T\} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 + \\ & + \int_{-1}^1 \int \int w_0 \delta \{T\}^T [B] \{\psi\} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 + \\ & + \int_{-1}^1 \int q \delta \{T\}^T [B_{s_1 t_1}] \{\psi_{s_1 t_1}\} \sqrt{g^{nn}} \epsilon_{ns_1 t_1} d\xi^{s_1} d\xi^{t_1} + \\ & + \int_{-1}^1 \int h \delta \{T\}^T [B_{s_2 t_2}] \{\psi_{s_2 t_2}\} \{\psi_{s_2 t_2}\}^T [B_{s_2 t_2}]^T \{T\} \sqrt{g^{nn}} \epsilon_{ns_2 t_2} d\xi^{s_2} d\xi^{t_2} - \\ & - \int_{-1}^1 \int h \theta \delta \{T\}^T [B_{s_2 t_2}] \{\psi_{s_2 t_2}\} \sqrt{g^{nn}} \epsilon_{ns_2 t_2} d\xi^{s_2} d\xi^{t_2} = 0, \\ & \delta \{T\} [H] \{T\} + \delta \{T\} [H^{(s_2 t_2)}] \{T\} + \delta \{T\} \{P\} + \delta \{T\} \{P\} = 0, \end{aligned} \quad (2.19)$$

де g – метричний тензор;

ϵ_{nts} – символ Веблена.

Матриця теплопровідності $[H]$ має вигляд:

$$[H] = \int_{-1}^1 \int \int [B] \{\psi_{,i}\} \lambda_{ij} \{\psi_{,i}\}^T [B]^T \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 \quad (2.20)$$

Матриця $[H^{s_2 t_2}]$ є доповненням до матриці $[H]$, обумовленої граничними умовами 3 роду на поверхні СЕ.

Вектор еквівалентного навантаження $\{P\}$, обумовлений внутрішнім джерелом теплоутворення, надається виразом:

$$\{P\} = \int_{-1}^1 \int \int w_0 [B] \{\psi\} \sqrt{g} d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3. \quad (2.21)$$

Вектор еквівалентного навантаження $\{S\}$, обумовлений тепловими потоками і температурою на поверхні СЕ, запишемо у матричному вигляді:

$$\begin{aligned} \{S\} = & \int_{-1}^1 \int q [B_{s_1 t_1}] \{\psi_{s_1 t_1}\} \sqrt{g^{nn}} \epsilon_{ns_1 t_1} d\xi^{s_1} d\xi^{t_1} - \\ & - \int_{-1}^1 \int h \theta [B_{s_2 t_2}] \{\psi_{s_2 t_2}\} \sqrt{g^{nn}} \epsilon_{ns_2 t_2} d\xi^{s_2} d\xi^{t_2}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Якщо вважати, що варіація функції поля (2.19) дорівнює нулю, то і коефіцієнти при варіаціях температур також дорівнюватимуть нулю:

$$[H] \{T\} + [H^{(s_2 t_2)}] \{T\} + \{P\} + \{S\} = 0. \quad (2.23)$$

Тоді система розв'язувальних рівнянь стаціонарної задачі теплопровідності має вигляд:

$$[H]\{T\} = -\{R\}, \quad (2.24)$$

де $\{R\} = \{P\} + \{S\}$ - вектор еквівалентного навантаження;

$\{T\}$ - поле температур.

При обчисленні матриці теплопровідності необхідно виконати перетворення тензора теплопровідності, заданого в системі координат армування анізотропного шару, в місцеву систему координат x_i за формулою [36]:

$$\lambda_{ij} = \lambda_{mn}^* a_i^m a_j^n, \quad (2.25)$$

де a_m^i - тензор повороту системи координат, який пов'язаний з тензором перетворення координат $d_m^i = \frac{dx_i}{d\xi_m}$ наступним співвідношенням: $a_m^i = \frac{d_m^i}{\sqrt{g_{mn}}}$,

(g_{mn} - компоненти метричного тензора).

При обчисленні матриці теплопровідності для скінченних елементів з кусково-лінійним законом апроксимації переміщень по об'єму елемента для забезпечення достатньої точності необхідно процедуру інтегрування проводити для кожного шару окремо.

У такому випадку процедура формування системи розв'язувальних рівнянь для пакету шарів конструкції в цілому може бути зведена до суперелементного підходу, що є виправданим при розрахунку багатошарових конструкцій.

При побудові системи рівнянь для суперелементної схеми необхідно перейти до глобальної нумерації вузлів кожного шару. Після компонування отримуємо систему, що складається з $12(n+1)$ рівнянь (n – кількість шарів).

Для визначення переміщень пакету необхідно спочатку визначити переміщення на зовнішній поверхні, а саме вузлів 1, 2, 3, 4, $(4n+1)$, $(4n+2)$, $(4n+3)$, $(4n+4)$.

Поле вузлових температур можна виразити у вигляді одновимірного масиву:

$$\begin{aligned}\{T\}^T &= \{\mathbf{Q}_1 \quad \mathbf{Q}_2 \quad \mathbf{Q}_3\}^T, \\ \{Q_1\}^T &= \{T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4\}^T, \\ \{Q_2\}^T &= \{T_5 \quad T_6 \quad \dots \quad T_{4n-1} \quad T_{4n}\}^T, \\ \{Q_3\}^T &= \{T_{4n+1} \quad T_{4n+2} \quad T_{4n+3} \quad T_{4n+4}\}^T.\end{aligned}$$

Вектор еквівалентного навантаження також можна представити у вигляді сукупності векторів:

$$\begin{aligned}\{R\}^T &= \{\mathbf{P}_1 \quad \mathbf{P}_2 \quad \mathbf{P}_3\}^T, \\ \{P_1\}^T &= \{R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4\}^T, \\ \{P_2\}^T &= \{R_5 \quad R_6 \quad \dots \quad R_{4n-1} \quad R_{4n}\}^T, \\ \{P_3\}^T &= \{R_{4n+1} \quad R_{4n+2} \quad R_{4n+3} \quad R_{4n+4}\}^T.\end{aligned}\tag{2.26}$$

Тоді головна система рівнянь записується наступним чином:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{32} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \\ \mathbf{Q}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{Bmatrix}.\tag{2.27}$$

Поле температур “внутрішніх” вузлів обчислюється через температуру “зовнішніх”:

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{H}_{22}^{-1} \mathbf{P}_2 - \mathbf{H}_{22}^{-1} [\mathbf{H}_{21} \quad \mathbf{H}_{23}] \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_3 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{11}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_{12}\mathbf{H}_{22}^{-1}\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{H}_{22}^{-1}[\mathbf{H}_{21} \quad \mathbf{H}_{23}]\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_3 \end{Bmatrix}\right) + \mathbf{H}_{13}\mathbf{Q}_3 &= \mathbf{P}_1; \\ \mathbf{H}_{31}\mathbf{Q}_1 + \mathbf{H}_{32}\mathbf{H}_{22}^{-1}\left(\mathbf{P}_2 - \mathbf{H}_{22}^{-1}[\mathbf{H}_{21} \quad \mathbf{H}_{23}]\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_3 \end{Bmatrix}\right) + \mathbf{H}_{33}\mathbf{Q}_3 &= \mathbf{P}_3; \end{aligned} \quad (2.28)$$

Таким чином отримуємо систему рівнянь для скінченного суперелемента:

$$[\tilde{H}]\{Q\} = \{F\}, \quad (2.29)$$

де $[\tilde{H}] = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{13} \\ \mathbf{H}_{31} & \mathbf{H}_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{12}\mathbf{G} \\ \mathbf{H}_{32}\mathbf{G} \end{bmatrix} \right)$ - матриця теплопровідності суперелемента;

$$\mathbf{G} = \mathbf{H}_{22}^{-1}[\mathbf{H}_{21} \quad \mathbf{H}_{23}];$$

$\{Q\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_3 \end{Bmatrix}_{16}$ - вектор вузлових температур на зовнішніх гранях

суперелемента;

$\{F\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_3 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{K}_{12}\mathbf{S} \\ \mathbf{K}_{32}\mathbf{S} \end{Bmatrix}$ - вектор еквівалентного навантаження на зовнішніх

гранях суперелемента. $\mathbf{S} = \mathbf{H}_{22}^{-1}\mathbf{P}_2$.

Процедуру обернення матриці, враховуючи її симетричність, можна виконати за методом Халецького.

2.2. Нестационарні задачі теплопровідності

Зв'язана задача термопружності в загальному випадку формулюється для динамічного навантаження. В цьому випадку процес поширення тепла в залежності від часу, тобто слід вирішувати задачу нестационарної теплопровідності. Застосування аналітичних методів для таких завдань пов'язано з певними труднощами, зумовлені різними причинами, наприклад,

досить складною геометричною формою конструктивного елементу або складним характером теплового навантаження.

Розглянемо алгоритм чисельного розв'язання нестационарної задачі теплопровідності. Розподіл температур по товщині пакета анізотропних шарів в цьому випадку можна вважати лінійним на кожному шарі. В цьому випадку описаний вище СЕ для розв'язання стаціонарного рівняння теплопровідності можна використовувати і для нестационарної теплопровідності.

Рівняння нестационарної теплопровідності для анізотропного тіла можна представити у вигляді [34]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \rho c T_t T dv dt = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \lambda^{ij} T_{,i} T_{,j} dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V w_0 T dv dt + \int_{t_1}^{t_2} \iint_S [q - h(T - \theta)] ds dt, \quad (2.30)$$

де ρ - питома вага матеріалу;

c - теплоємність;

λ^{ij} - тензор теплопровідності;

w_0 - потужність внутрішніх джерел тепла;

q - інтенсивність теплових потоків;

h - коефіцієнт теплопередачі;

θ - температура навколишнього середовища.

До цього рівняння необхідно додати початкові та граничні умови. Розв'язання рішення задачі нестационарної теплопровідності вимагає завдання температури у всьому тілі на початковий момент часу $t = 0$

$$T = T_0(t, z^i),$$

а також граничних умов.

Крайові умови для задачі теплопровідності можуть бути:

першого роду (задано розподіл температури по поверхні S тіла у довільний момент часу):

$$T_S = \varphi(t, z^i)$$

другого роду (задана густина теплового потоку в кожній точці поверхні тіла)

$$\vec{q}(t, z^k) = -\lambda_q(T) \frac{\partial T(t, z^k)}{\partial n};$$

третього роду (задано конвективний теплообмін між поверхнею тіла і навколишнім середовищем):

$$h(t) [T(t, z^k) - \theta_T(t, z^k)] = -\lambda_q(T) \frac{\partial T(t, z^k)}{\partial n}.$$

де θ_T – температура зовнішнього середовища; $h(t)$ – коефіцієнт теплообміну.

Застосовуючи скінченно-елементну дискретизацію за координатами і часу рівняння (2.30) можна привести до системи алгебраїчних рівнянь. Функцію температури можна представити у вигляді:

$$T(x, t) = f(x)g(t) \quad (2.31)$$

Для скінченного елемента, що моделює поведінку шаруватого елемента конструкції, функція координат може бути представлена у вигляді (2.2)

Апроксимацію температури всередині СЕ в залежності від часу приймаємо:

за лінійним законом:

$$g_1(t) = \gamma_1 + \gamma_2 t;$$

за квадратичним:

$$g_2(t) = \gamma_1 + \gamma_2 t + \gamma_3 t^2;$$

за кубічним законом:

$$g_3(t) = \gamma_1 + \gamma_2 t + \gamma_3 t^2 + \gamma_4 t^3.$$

Тут α_i – коефіцієнти розкладання, що визначаються через задані часові інтервали.

Прийнята апроксимація дозволяє при обчисленні коефіцієнтів матриці теплопровідності інтеграли, що залежать від часу, обчислювати окремо:

$$A_i = \int_{t_1}^{t_2} g_i(t) dt$$

$$A_1 = \gamma_1 (t_2 - t_1) + \frac{\gamma_2}{2} (t_2^2 - t_1^2);$$

$$A_2 = \gamma_1 (t_2 - t_1) + \frac{\gamma_2}{2} (t_2^2 - t_1^2) + \frac{\gamma_3}{3} (t_2^3 - t_1^3);$$

$$A_3 = \gamma_1 (t_2 - t_1) + \frac{\gamma_2}{2} (t_2^2 - t_1^2) + \frac{\gamma_3}{3} (t_2^3 - t_1^3) + \frac{\gamma_4}{4} (t_2^4 - t_1^4).$$

Коефіцієнти $B_{(i)}$ можна обчислити з доданка, що входить в формулу:

$$B_{(i)} = \int_{t_1}^{t_2} T_{,t}^{(a)} T^{(b)} dt,$$

де $T_{,t}^{(a)}$; $T^{(b)}$ - похідна від температури за часом в стані a і значення температури в стані b .

Для лінійної апроксимації за часом маємо

$$B_1 = \gamma_2 \beta_1 (t_2 - t_1) + \frac{\gamma_2 \beta_2}{2} (t_2^2 - t_1^2)$$

Для квадратичної або кубічної функції g_i коефіцієнти B_i обчислюються аналогічно

$$\begin{aligned}
 B_2 &= \gamma_2 \beta_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} (2\gamma_3 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2) (t_2^2 - t_1^2) + \frac{1}{3} (\gamma_2 \beta_3 + 2\gamma_3 \beta_2) (t_2^3 - t_1^3) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \gamma_3 \beta_3 (t_2^4 - t_1^4); \\
 B_3 &= \gamma_2 \beta_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} (2\gamma_3 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2) (t_2^2 - t_1^2) + \frac{1}{3} (\gamma_2 \beta_3 + 2\gamma_3 \beta_2 + 3\gamma_4 \beta_4) (t_2^3 - t_1^3) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} (\gamma_2 \beta_4 + 3\gamma_4 \beta_2 + 2\gamma_3 \beta_3) (t_2^4 - t_1^4) + \frac{1}{5} (2\gamma_3 \beta_4 + 3\gamma_4 \beta_3) (t_2^5 - t_1^5) + \\
 &\quad + \frac{1}{6} \gamma_4 \beta_4 (t_2^6 - t_1^6). \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

тут β_i - коефіцієнти розкладання, що визначаються через прийняті проміжки часу, аналогічно γ_i .

Коефіцієнти $D_{(i)}$ знаходимо з виразу

$$\begin{aligned}
 D_{(i)} &= \int_{t_1}^{t_2} T^{(a)} T^{(e)} dt; \\
 D_1 &= \gamma_1 \beta_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} (\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) (t_2^2 - t_1^2) + \frac{1}{3} \gamma_2 \beta_2 (t_2^3 - t_1^3); \\
 D_2 &= \gamma_1 \beta_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} (\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) (t_2^2 - t_1^2) + \frac{1}{3} (\gamma_1 \beta_3 + \gamma_3 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2) (t_2^3 - t_1^3) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} (\gamma_2 \beta_3 + \gamma_3 \beta_2) (t_2^4 - t_1^4) + \frac{1}{5} \gamma_3 \beta_3 (t_2^5 - t_1^5); \\
 D_3 &= \gamma_1 \beta_1 (t_2 - t_1) + \frac{1}{2} (\gamma_1 \beta_2 + \gamma_2 \beta_1) (t_2^2 - t_1^2) + \frac{1}{3} (\gamma_1 \beta_3 + \gamma_3 \beta_1 + \gamma_2 \beta_2) (t_2^3 - t_1^3) + \\
 &\quad + \frac{1}{4} (\gamma_1 \beta_4 + \gamma_4 \beta_1 + \gamma_2 \beta_3 + \gamma_3 \beta_2) (t_2^4 - t_1^4) + \\
 &\quad + \frac{1}{5} (\gamma_2 \beta_4 + \gamma_4 \beta_2 + \gamma_3 \beta_3) (t_2^5 - t_1^5) + \frac{1}{6} (\gamma_3 \beta_4 + \gamma_4 \beta_3) (t_2^6 - t_1^6) + \\
 &\quad + \frac{1}{7} \gamma_4 \beta_4 (t_2^7 - t_1^7). \tag{2.33}
 \end{aligned}$$

Матрицю теплопровідності отримуємо з формули (2.30) з урахуванням (2.32) для відповідного закону апроксимації:

$$H_{(ab)}^{(i)} = D_{(i)} \int_{-1}^1 \int \lambda^{kl} g^{kl} T_{,k}^{(a)} T_{,l}^{(b)} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3,$$

де $T_{,k}^{(a)}$, $T_{,l}^{(b)}$ - похідні від температури по місцевим координатам СЕ в станах a та b .

Аналогічно знаходимо матриці теплоємності

$$G_{(ab)}^{(i)} = B_{(i)} \int_{-1}^1 \int \rho c T_{,t}^{(a)} T^{(b)} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3,$$

граничних умов

$$S_{(ab)}^{(i)} = D_{(i)} \int_{-1}^1 \int h T^{(a)} T^{(b)} \sqrt{g_s} dx_s^1 dx_s^2,$$

а також відповідний вектор правої частини системи рівнянь:

$$A_{(aa)}^{(i)} = A_{(i)} \left(\int_{-1}^1 \int \omega_0 T_{(a)} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 + \int_{-1}^1 \int (q - h\theta) T_{(a)} \sqrt{g_s} dx_s^1 dx_s^2 \right).$$

тут g_s - метричний тензор поверхні; q - інтенсивність теплових потоків, нормальних до поверхні тіла.

Розв'язувальна система рівняння нестационарної теплопровідності буде мати вигляд:

$$H_{(ab)}^{(i)} + G_{(ab)}^{(i)} + S_{(ab)}^{(i)} + A_{(aa)}^{(i)} = 0. \quad (2.34)$$

Нехтуємо в ній залежністю фізико-механічних властивостей еластомеру від часу і температури. Розмір загальної матриці

теплопровідності залежить від законів апроксимації функції температур і координати за часом.

Коефіцієнти матриць системи рівнянь і векторів правих частин визначається чисельно на основі квадратурної формули Гауса за поліномами Лежандра. Попереднє обчислення величин $A(i)$, $B(i)$, $D(i)$, звільняє від необхідності виконувати чисельне інтегрування по координаті t . Застосування просторово-часового апроксимації з використанням неявної різницевої схеми Кранка – Николсона приводить, з одного боку, до зростання порядку системи рівнянь, а з іншого – збільшує точність наближених обчислень при значно більших кроках за часом у порівнянні з явною різницевою схемою.

Розв’язання задачі нестационарної теплопровідності зводиться до обчислювальної процедури, яка передбачає покрокове визначення температури при відповідному часовому інтервалі:

$$\left[[H] + \frac{1}{\Delta t} [G] \right] \{T_{n+1}\} = \frac{1}{\Delta t} [G] \frac{1}{\Delta t} [T_n] - \{R_n\}, \quad (2.35)$$

де H , G – матриці теплопровідності і теплоємності;

Δt - крок за часом;

Процес розв’язання системи рівнянь триває до тих пір, поки виконається умова у вигляді:

$$|T_{n+1} - T_n| \approx \varepsilon \quad (2.36)$$

де ε – точність розрахунків.

2.3. Дослідження збіжності рішення

Для обґрунтування достовірності пропонованого підходу розглянемо розв’язання задач стаціонарної теплопровідності для шаруватих конструкцій.

Задача 2.1. Розглянемо розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності тришарової панелі. Панель прямокутна: розміри панелі $a_1=3,5\text{м}, a_2=2,9\text{м}, a_3=0,35\text{м}$. Матеріал шарів ізотропний. Товщина шарів $h^{(k)} = 0,17; 0,1; 0,08\text{м}$. Конструкція являє собою стінову панель житлового будинку.

Температура середовища на зовнішній поверхні $\theta_1=318\text{К}$, на внутрішній поверхні $\theta_2=293\text{К}$. Коефіцієнти теплообміну на зовнішній і внутрішній поверхнях $h_1 = 8,7\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$, $h_2 = 23\text{Вт}/(\text{м}^2\cdot\text{К})$ відповідно. Коефіцієнти теплопровідності $\lambda_{11}^{(k)} = \lambda_{22}^{(k)} = \lambda_{33}^{(k)} = 0,52; 0,12; 0,52$. Бічні поверхні панелі теплоізовані.

Результати розрахунку при різних сітках скінченних елементів представлено в таблиці 2.3 і на рис. 2.1, 2.2.

Таблиця 2.1.- Температура на поверхнях тришарової панелі

Координати точок поверхні	0,1a ₁ ; 0,1a ₂	0,2a ₁ ; 0,2a ₂	0,3a ₁ ; 0,3a ₂	0,4a ₁ ; 0,4a ₂	0,5a ₁ ; 0,5a ₂
Температура на поверхні панелі МССЕ (4х11х11)	293,82 313,41	295,43 316,87	295,48 317,05	295,49 317,06	29,49 317,06
МССЕ (2х16х16)	294,13 316,73	295,41 317,01	295,48 317,06	295,49 317,06	296,49 317,06
МССЕ (2х21х21)	294,17 316,74	295,41 317,04	295,49 317,06	295,49 317,06	296,49 317,06
Розв'язок [39] (сітка 40×40)	294,4 317,0	294,9 317,2	294,9 317,3	294,9 317,3	294,9 317,3
Розв'язок [8]	291,69 316,06	294,29 317,28	294,65 317,35	294,70 317,35	294,71 317,35

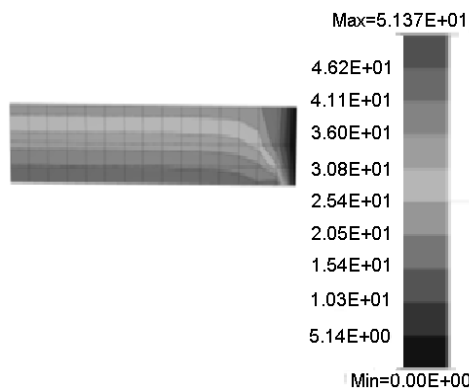


Рис. 2.1. Розподіл температур ΔT при сітці $4 \times 16 \times 16$

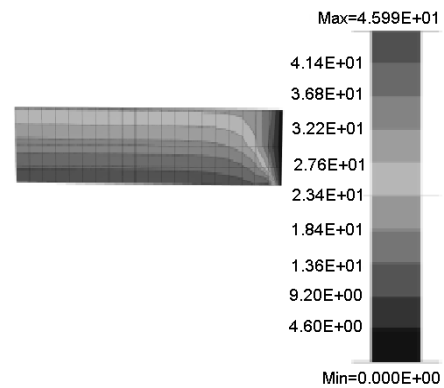


Рис. 2.2. Розподіл температур ΔT при сітці $4 \times 21 \times 21$

Результати задовільно збігаються з аналітичним рішеннями, наведеними в роботах [8, 39], отриманими на основі двовимірної моделі. Перевірка збіжності результатів проведена при різних сітках скінченних елементів. При збільшенні числа скінченних елементів спостерігається стійка збіжність результатів, що свідчить про достовірність отриманих рішень.

Задача 2.2. Розглянемо п'ятишарову квадратну плиту 2×2 м, на бічних поверхнях якої підтримується нульова температура. На нижній поверхні плити має місце конвективний теплообмін з навколишнім середовищем, коефіцієнт теплообміну $h_1 = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$, температура навколишнього середовища $\theta = 15^\circ \text{C}$. До верхньої поверхні підводиться теплової потік інтенсивністю $q = 200 \text{ Вт}/\text{м}^2$.

Кожен шар пластини - односпрямований епоксидний вуглепластик. Коефіцієнти теплопровідності відповідно рівні $\lambda_{11} = 14,6 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$, $\lambda_{22} = \lambda_{33} = 0,93 \text{ Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$. Шари орієнтовані по черзі під кутом 0° та 90° . Товщина шарів $h^{(k)} = 0,17a; 0,25a; 0,16a; 0,25a; 0,17a$ м, де $a = 0,1$ м.

Результати розв'язання даної задачі, отримані при різних сітках СЕ, наведено в таблиці 2.2 і на рис. 2.3. 2.3.

Таблиця 2.2 - Температура в центральних точках на поверхнях п'ятишарової плити

Температура на поверхні панелі	Сітка СЕ			Точний розв'язок [38]
	6×4×4	6×6×6	6×10×10	
T^-	31,314	30,720	30,043	29,906
T^+	50,540	49,749	48,692	48,457

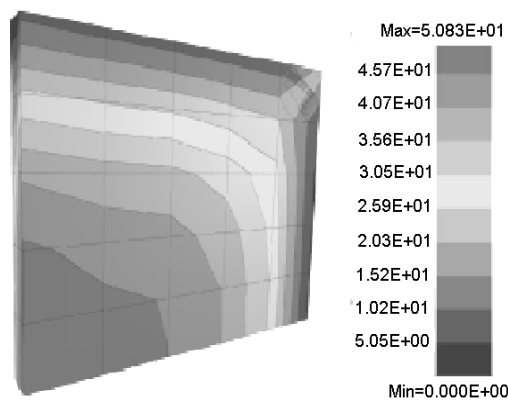


Рис. 2.3. Розподіл температур на поверхні плити

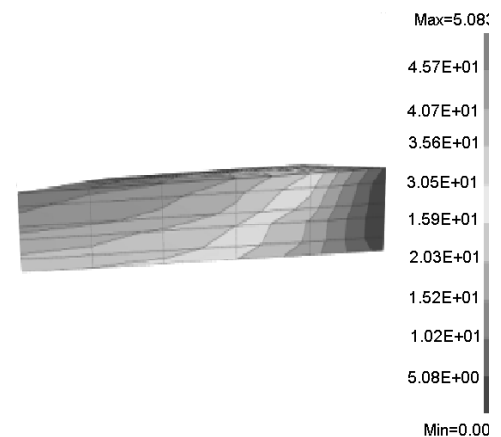


Рис. 2.4. Розподіл температур по товщині плити

Задача 2.3. П'ятишарова трапецевидна панель під дією теплового навантаження. Розміри плити в плані: $a=150\text{см}$, $b=81\text{см}$, $c=15\text{см}$. До верхньої поверхні $x_3=12\text{мм}$ підводиться теплової потік $q^+=2,24\text{кВт/м}^2$. На нижній поверхні ($x_3=0$) і бічних гранях панелі –2-3, 3-4, 1-4 має місце конвективний теплообмін з навколишнім середовищем ($\theta=153\text{ K}$), грань 1-2 теплоізована. Шари 2, 4 - трансверсально-ізотропні, а 1, 3, 5 - ортотропні. Головні осі ортотропії шарів 1, 3, 5 розташовані під кутом 30° до прийнятої системи координат $x'_1 O x'_2$, отже, в цій системі характеристики матеріалу шару відповідають випадку прямолінійної анізотропії.

Теплофізичні характеристики пакета шарів ($k=1\dots5$) наступні:

$$\lambda_{11}^{(k)} = 0,12; 16,24; 0,12; 16,24; 0,12 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)};$$

$$\lambda_{22}^{(k)} = 0,54; 16,24; 0,54; 16,24; 0,54 \text{ Вт/(м}\cdot\text{K)};$$

$$\lambda_{33}^{(k)} = 0,048; 0,83; 0,048; 0,83; 0,048 \text{ Вт/(м·К)};$$

$$\lambda_{12}^{(k)} = \lambda_{21}^{(k)} = 0,1785; 0; 0,1785; 0; 0,1785 \text{ Вт/(м·К)}.$$

Коефіцієнти теплообміну по бічних гранях $h_6^{(k)} = 1500; 1700; 1500; 1700; 1500 \text{ Вт/(м·К)}$. На нижній поверхні $h^- = 1500 \text{ Вт/(м·К)}$. Розподіл температури на поверхні $x_3 = 12 \text{ мм}$ представлено ізотермами на рис. 2.5.

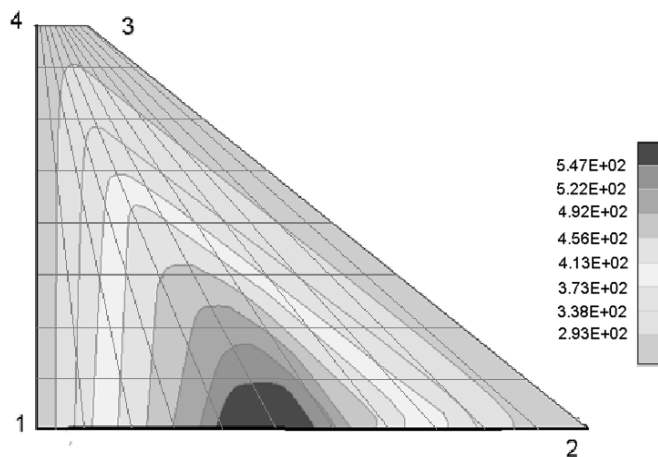


Рис. 2.5. Розподіл температур на поверхні плити

Таким чином, запропонований підхід до побудови матриці теплопровідності шаруватих елементів конструкцій у тривимірній постановці дозволяє отримати результати з достатньою точністю.

Задача 2.4. Нестационарна одновимірна задача теплопровідності для складеної області [22]. Товщини шарів $h_k = (1/3; 1/3; 1/3)a$, де $a = 6 \text{ см}$ – загальна товщина пакета. Теплофізичні характеристики:

$$\lambda^{(k)} = (34,5; 202; 65,6) \text{ Вт/(м·К)};$$

$$\rho^{(k)} = (11340; 2700, 7400) \text{ кг/м}^3;$$

$$c_p^{(k)} = (129,9; 758,4; 226,3) \text{ Дж/(кг·К)} \quad (k=1, 2, 3).$$

Початкова температура пакету 0°C . У момент часу $t = 0$ температура нижньої поверхні ($x_3 = 0$) підвищується від 0 до 400°C і підтримується такою протягом всього процесу. На рис. 2.6 наведено розподіл температури по товщині пакету в момент часу t . Скінченно-елементний розв'язок,

отриманий на основі тривимірних СЕ, практично збігається з аналітичним, наведеними в [22]. Похибка не перевищує 1,5%, тому результати представлено однією кривою. Криві 1, 2, 3 відповідають розподілу температури при $t = 8 \cdot 10^{-4}$, $50 \cdot 10^{-4}$, 1 (с).

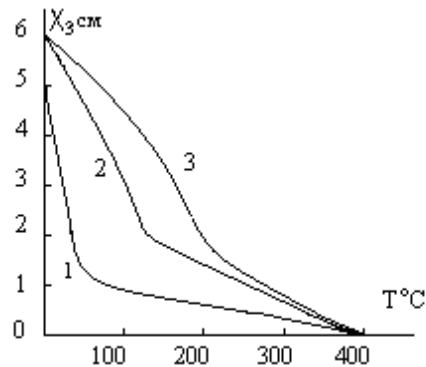


Рис. 2.6. Розподіл температур по товщині пакету

Задача 2.5. Нестационарна задача теплопроводності для двошарового циліндра при складному температурному навантаженні. Розглянемо двошаровий циліндр (рис.2.7). $R = 5$ см, товщина шарів $h^{(k)} = (2/3, 1/3)a$, де $a = 0,3$ см - загальна товщина пакета. Початкова температура 20°C . Теплофізичні характеристики наступні: $\lambda^{(k)} = (2, 23,3) \text{ Вт/(м} \cdot \text{К)}$; $\rho c_p^{(k)} = (2,0, 4,413) \cdot 10^6 \text{ Дж/(м}^3 \cdot \text{К)}$.

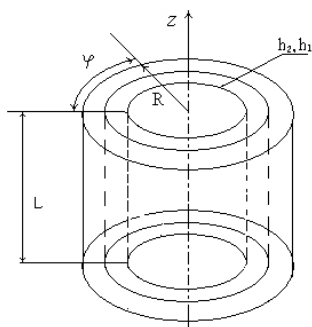


Рис. 2.7. Розрахункова схема двошарового циліндру

З боку зовнішньої поверхні температура змінюється за законом $T = 500 \cdot (1 + 0,1 \cos \varphi)^\circ\text{C}$. Внутрішня поверхня циліндра і торець $L = 10$ см теплоізолювані, а на торці $z = 0$ задано конвективний теплообмін з навколишнім середовищем $\theta = 300^\circ\text{C}$. Коефіцієнти тепловіддачі на зовнішній і торцевої ($z=0$) поверхнях

прийняті однаковими і рівними $1000 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$.

Необхідно відзначити, що в науковій літературі практично відсутні точні розв'язки нестационарних задач теплопровідності для шаруватих композитних систем, отримані за допомогою аналітичних методів. Тому для порівняння були взято результати розв'язання цієї задачі, які отримано за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів [9].

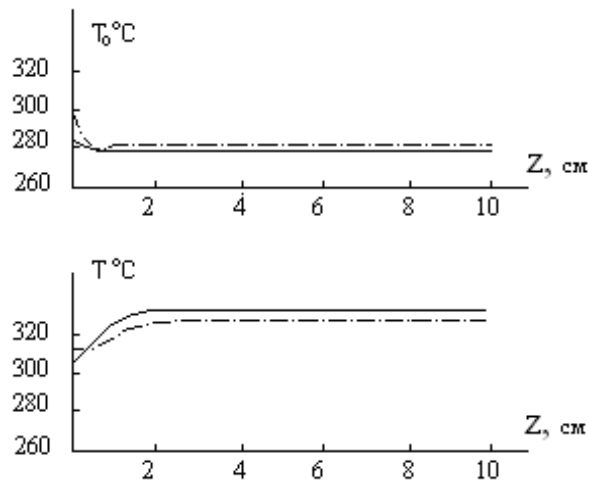


Рис. 2.8. Розподіл температури по внутрішній (T_0) і зовнішній (T) поверхні циліндра по твірній. (Суцільна лінія – отриманий розв'язок, штрихпунктирна – розв'язок [9])

При розв'язанні застосовано неявну схему дискретизації за часом з кроком $\Delta t = 0,2$ с. Розподіл температури по внутрішній і зовнішній поверхні циліндру вздовж твірної яка утворює для перетину $\varphi = 180^\circ$ при $t = 10$ с наведено на рис. 2.8 (суцільна крива). Результати, отримано на основі запропонованого підходу, досить добре узгоджуються з розв'язком [9] (штрихпунктирна крива)

2.4. Висновки до розділу 2

В даному розділі проведено створення методики розв'язання задач теплопровідності для анізотропних матеріалів. Опис розподілу температур і процесів теплопровідності композиційних елементів здійснюється за

допомогою співвідношень, що враховують специфічні особливості анізотропних матеріалів.

На основі суперелементного підходу побудовано розв'язувальні рівняння для моделювання процесу теплопровідності в шаруватих конструкціях.

Розроблена методика є універсальною і має ряд особливостей, серед яких можна виділити наступні:

- незалежність порядку дозвільних рівнянь від структури пакета шарів, що створює зручності для реалізації чисельними методами;
- можливість введення відповідних значень теплофізичних характеристик. Компоненти тензора пружних постійних задаються відповідно до виду анізотропії композиту в системі армування;
- можливість використання тривимірних скінченних елементів при моделюванні термопружного поведінки реальних конструкцій довільної форми.

Відмінності і переваги розробленого підходу порівняно із відомими методиками полягають у наступному:

- урахування впливу теплофізичних характеристик на розподіл температури поля по товщині пакета;
- зручна для реалізації форма подання розв'язувальних рівнянь на основі МСЕ;
- тривимірна постановка задачі;
- можливість розрахунку конструкції складної геометричної форми.

Застосування запропонованої методики дозволяє вирішувати задачі теплопровідності для шаруватих анізотропних конструкцій. При цьому можна уникнути використання спрощують гіпотез, які зводять тривимірну задачу до плоскої постановки, що призводять до доволі суттєвих обмежень і похибок, зокрема пов'язаних із урахуванням граничних умов.

Запропонована методика апробована на прикладі розв'язання низки задач.

Всі результати, отримані на основі запропонованого підходу, демонструють збіжність при поступовому збільшенні скінченно-елементної моделі, задовільно збігаються з експериментальними даними і розв'язаннями інших авторів, що свідчить про високий рівень їх достовірності.

Розроблена методика є складовою частиною загальної процедури дослідження напружено-деформованого стану еластомерів і шаруватих композитів з урахуванням нестационарного температурного поля.

РОЗДІЛ 3

ПРОГРАМНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ ТЕРМОПРУЖНОСТІ

В загальному випадку задача термопружності вимагає урахування всіх факторів взаємного впливу механічних і теплових полів, до того ж потрібно урахувати не стаціонарність такої взаємодії. Задача дещо спрощується для випадку дії циклічних навантажень за рахунок спрощення процедури інтегрування за часом.

3.1. Структура обчислювального комплексу «МІРЕЛА+»

Обчислювальний комплекс «МІРЕЛА+» (міцність і руйнування еластомерних матеріалів), призначений для розрахунку еластомерних і композитних елементів конструкцій на міцність, руйнування та довговічність при статистичних і динамічних навантаженнях.

Структура обчислювального комплексу наведена на рис. 3.1.

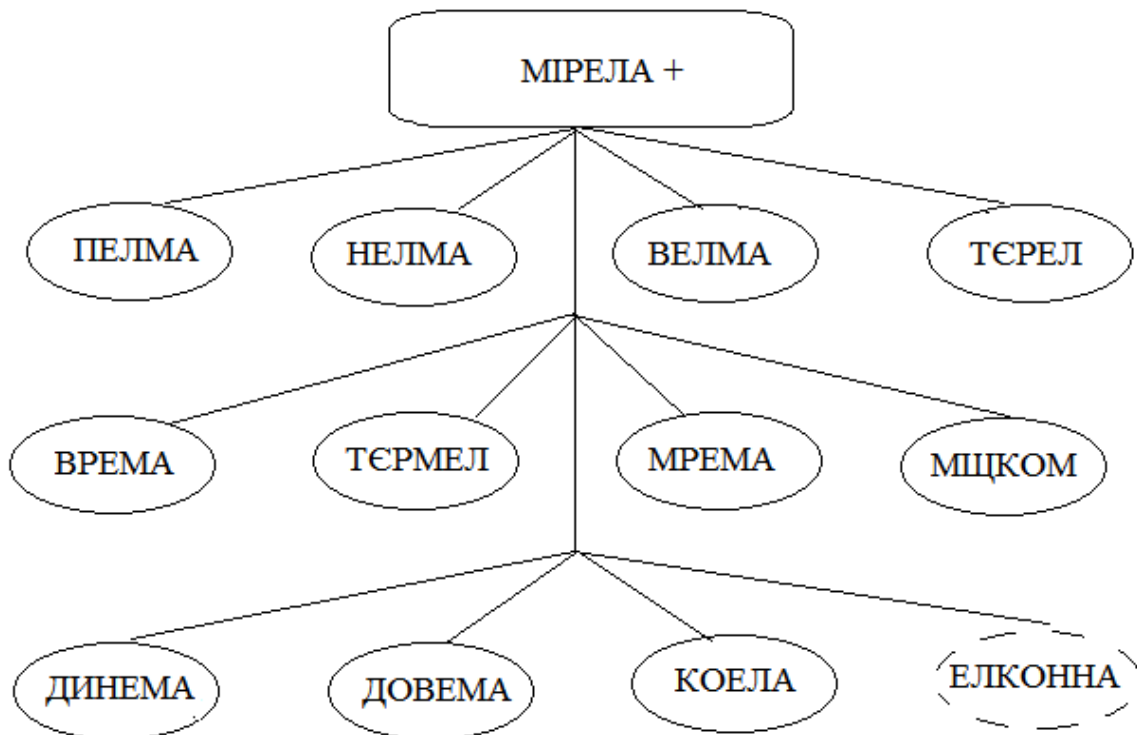


Рис. 3.1. Структура обчислювального комплексу «МІРЕЛА+»

Призначення підсистем обчислювального комплексу «МІРЕЛА+»:

- **ПЕЛМА** (пружність еластомерних матеріалів) – є базовою та застосовується для вирішення задач лінійної пружності еластомерів;
- **НЕЛМА** (нелінійне деформування еластомерних матеріалів) – застосовується для вирішення геометричних та фізичних задач пружності еластомерів;
- **ВЕЛМА** (в'язкопружність еластомерних матеріалів) – призначена для розрахунку еластомерних конструкцій, котрі працюють в умовах повзучості та релаксації напруги;
- **ТЄРЕЛ** (теплопровідність еластомерних матеріалів) – застосовується для вирішення задач стаціонарної та нестаціонарної теплопровідності в елементах конструкцій з еластомерів;
- **ВРЕМА** (в'язкопружне нелінійне руйнування еластомерів) – призначена для розрахунку параметрів механіки руйнування в умовах в'язкопружного нелінійного деформування;
- **ТЄРМЕЛ** (термомеханіка еластомерних матеріалів) – призначена для визначення температури дисипативного розігрівання еластомерних елементів конструкцій при циклічному деформуванні;
- **МРЕМА** (механіка руйнування еластомерних матеріалів) – призначена для визначення параметрів руйнування: коефіцієнтів інтенсивності напруги та величини розкриття тріщин в конструкціях з еластомерів;
- **МІЦКОМ** (міцність композитних матеріалів) – призначена для розрахунку елементів конструкцій з шаруватих ортотропних і анізотропних армованих композитів;
- **ДИНЕМА** (динаміка конструкцій з еластомерних матеріалів) – призначена для рішення задач пружності еластомерів в умовах динамічної напруги;

– **КОЕЛА** (контактна взаємодія еластомерних матеріалів) – призначена для визначення напруго-деформованого стану конструкцій з еластомерів в умовах контактної взаємодії;

– **ДОВЕМА** (довговічність еластомерних матеріалів) – призначена для розрахунку терміну служби конструкцій з еластомерів, що працюють в умовах тривалого та циклічного навантаження;

– **ЕЛКОННА** (підсистема розрахунку конструкцій з початковими напруженнями) – дванадцята підсистема знаходиться у стадії розвитку.

Розрахунок конструкцій методом скінчених елементів можна представити у вигляді трьох взаємопов’язаних послідовних процесів:

1) підготовка вихідних даних – скінчено-елементна дискретизація об’єму, що розраховується, його топологія та кінематичні і силові граничні умови, фізико-механічні характеристики матеріалу;

2) чисельний розрахунок скінчено-елементної моделі – обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості скінчених елементів, формування глобальної системи дозволяючих рівнянь та її рішення;

3) обробка результатів рішення – обчислення параметрів напружено-деформованого та температурного стану конструкції; їх візуальне представлення у вигляді таблиць, графіків, двовимірних або трьохвимірних зображень.

3.2. Підсистеми «ТЕРЛ» розв’язування задач теплопровідності

У задачах теплопровідності граничні умови можуть бути 1-го роду, 2-го роду, 3-го роду, а також змішані граничні умови (наприклад, на одній частині поверхні граничні умови 1-го роду, на іншій - 2-го роду, на третій - 3-го роду, і т.д.). Кроки за часом можуть бути постійними, ступінчасто-змінними та змінними довільного характеру

Блок-схема алгоритму розв’язання задач теплопровідності наведено на рис. 3.2.

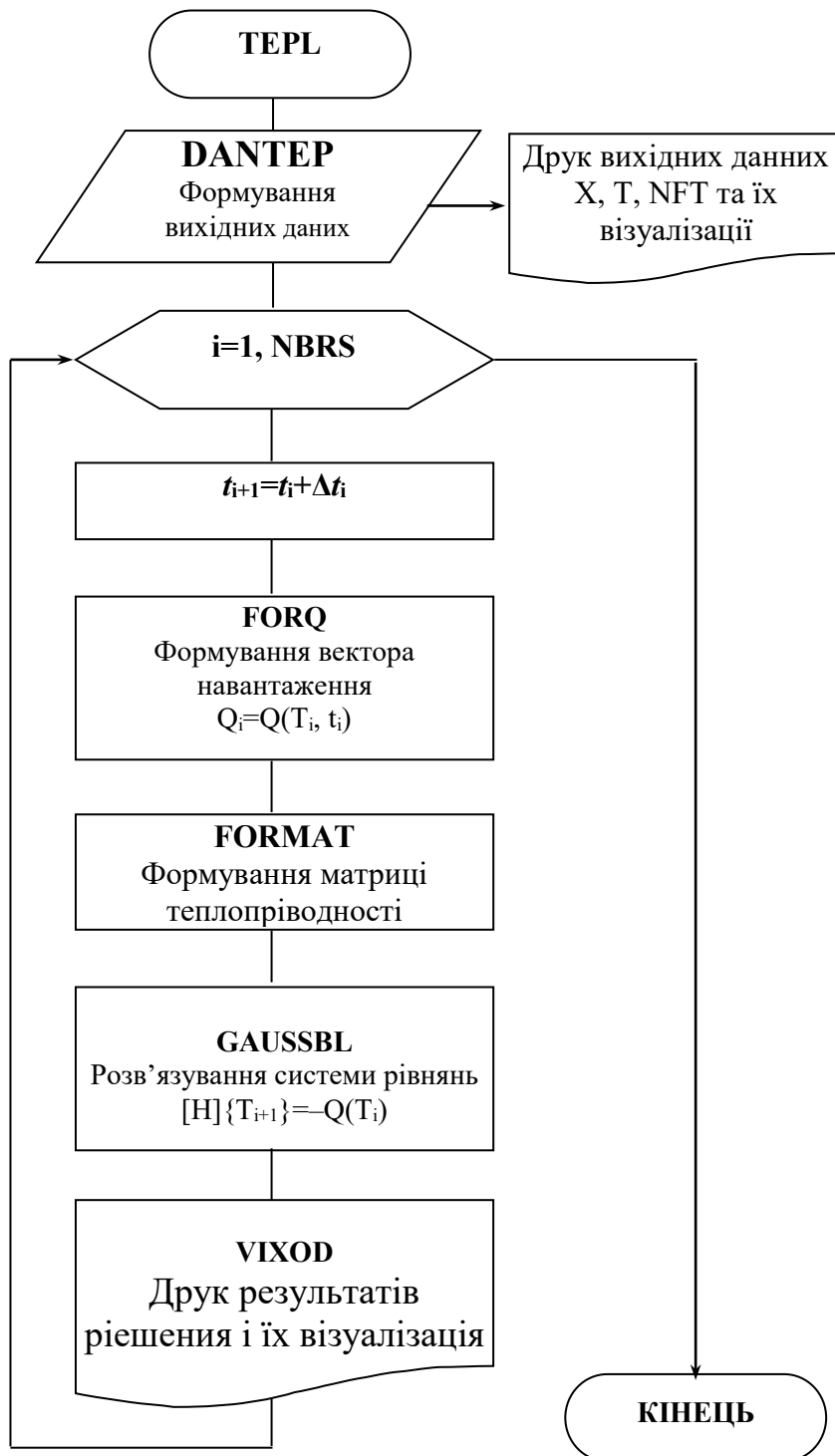


Рис. 3.2. Блок-схема алгоритму розв'язування задачі теплопровідності

У блоці FORQ на підставі заданих у блоці DANTEP граничних умов та поля температур, отриманого на попередній ітерації, формується вектор вузлових теплових навантажень.

Блок FORMAT складається з програми FOMATT формування глобальної матриці системи рівнянь та підпрограми AKOFMT, яка обчислює коефіцієнти матриці теплопровідності кінцевого елемента та вектор вузлового навантаження від вимушених зсувів.

Система лінійних рівнянь алгебри, складена на матриць жорсткості окремих кінцевих елементів, записується на магнітний диск у вигляді блоків. Розмір блоку KB і кількість записів KZ залежать від розмірності розв'язуваної задачі та обсягу зовнішніх пристроїв, що запам'ятовують. У блоці GAUSSBL відбувається рішення системи рівнянь алгебри. У цей блок входять підпрограми GASAL, STRIFQ, REMAQ та GALOA. У цих підпрограмах виконується приведення матриці коефіцієнтів системи рівнянь до трикутного вигляду та отримання рішення у зворотному ході. Ці програми реалізують блоковий метод Гауса для симетричних стрічкових матриць. Обробка матриці по блоках дозволяє вирішувати системи рівнянь алгебри до 10000 невідомих. Підпрограми WLIM, RLIM виконують запис на диск та зчитування з нього.

Підсистема «TEPL» призначена для вирішення задач стаціонарної та нестаціонарної теплопровідності в елементах конструкцій із композитів. Блок-схема підсистеми наведено на рис. 3.2.

Система роздільних рівнянь стаціонарної задачі теплопровідності права частина має вигляд

$$[H]\{T\}=(R\},$$

де $[H]$ – глобальна матриця теплопровідності; $\{T\}$ – поле температур;

$$\{R\} = \sum_{i=1}^k \left(\{P\}_{(i)}^e + \{S\}_i^e \right)$$

– еквівалентний вектор теплового навантаження.

Рішення нестаціонарної теплопровідності зводиться до обчислювальної процедури, що передбачає покрокове визначення температури при

тимчасовому інтервалі. Процес розв'язання системи рівнянь триває доти, доки виконається умова у вигляді:

$$|T_{n+1} - T_n| \approx \varepsilon,$$

де ε – точність обчислень.

3.3. Формування вихідних даних

У головній програмі TEPL виконується резервування робочих масивів для силових та температурних полів. У підпрограмі DANTEP задаються та формуються вихідні дані.

1. Розміри сіткової області M1, M2, M3, при цьому необхідно враховувати, по-перше, щоб по першому напрямку число розбиття було найменше і, по-друге, розміри одного осередку не перевищували розмірів іншого більш ніж у 10 разів.

2. Закон апроксимації (лінійний, квадратичний, кубічний).

3. Розміри конструкції.

4. Поле координат, що формується у масиві X(NUX,3), NUX – зарезервований розмір масиву.

5. Для вирішення задачі теплопровідності необхідно знати інформацію про вирізи, отвори, тріщини, тобто. про топологію конструкції, що розраховується, що здійснюється за допомогою підпрограми TELOS

CALL TELOS (N1, N2, N3, K1, K2, K3, NFT),

де N1, N2, N3 – початкові, а K1, K2, K3 – кінцеві сіткові координати області, що задаються щодо місцевої системи координат x_i , та зберігається у масиві NFT(NUX).

Для вузлів, яких примикає KE з правого боку, формується ознака 71, а вузлів, у яких немає КЭ – 7.

Граничні умови формуються щодо базисної системи координат зі зверненням до підпрограми ZAKREP

CALL ZAKREP (N1, N2, N3, K1, K2, K3, F, NFT),

де N1, N2, N3 – початкові та K1, K2, K3 – кінцеві сіткові координати точки тіла, параметр F визначає тип граничної умови, і приймає значення 1 – для граничних умов I-го роду, 2 – для граничних умов II-го роду і 4 – для граничних умов III-го роду.

У підпрограмах-функціях задаються пружні постійні матеріали конструкції μ – модуль зсуву, ν – коефіцієнт Пуассона, λ – коефіцієнт теплопровідності, α – коефіцієнт тепловіддачі, ρ – щільність матеріалу, C – питома теплоємність, N1, N2, N3 – коефіцієнти теплообміну на межах, Θ – температура навколишнього середовища. Для анізотропного матеріалу тензори фізико-механічних параметрів задаються у відповідних підпрограмах.

6. Обчислюються параметри системи рівнянь для завдання теплопровідності:

- кількість рівнянь теплопровідності обчислюються за наступною залежністю:

$$NEQT = M1 \cdot M2 \cdot M3;$$

- Ширина стрічки матриці NSTT системи рівнянь визначаються з виразу:

$$NSTT = 2 + M1 + M1 \cdot M2.$$

7. Задається кількість кроків за часом NBRS та масив часу $t_i = \text{BRSL}(I)$.

Друк вихідних даних у вигляді полів координат X, ознак NFT, початкових температур T та їхня візуалізація виконується за допомогою підпрограми PRINDA.

3.4. Програмне забезпечення підсистеми «TEPL»

Підпрограма NEST управляє алгоритмом розв'язання задачі нестационарної теплопровідності. Блок FORMAT виконує обчислення коефіцієнтів матриці теплопровідності кінцевих елементів та формування глобальної матриці системи рівнянь. Програми, що входять до блоку FORQ, виконують обчислення та формування вектора еквівалентного навантаження,

обумовленого внутрішніми джерелами, тепловими потоками та конвективним теплообміном.

У блоці GAUSSBL відбувається рішення системи рівнянь теплопровідності та визначаються вузлові значення поля температур на першому етапі за часом.

Підпрограма SAPTEM видає на друк поля вузлових температур T на кожному кроці за часом.

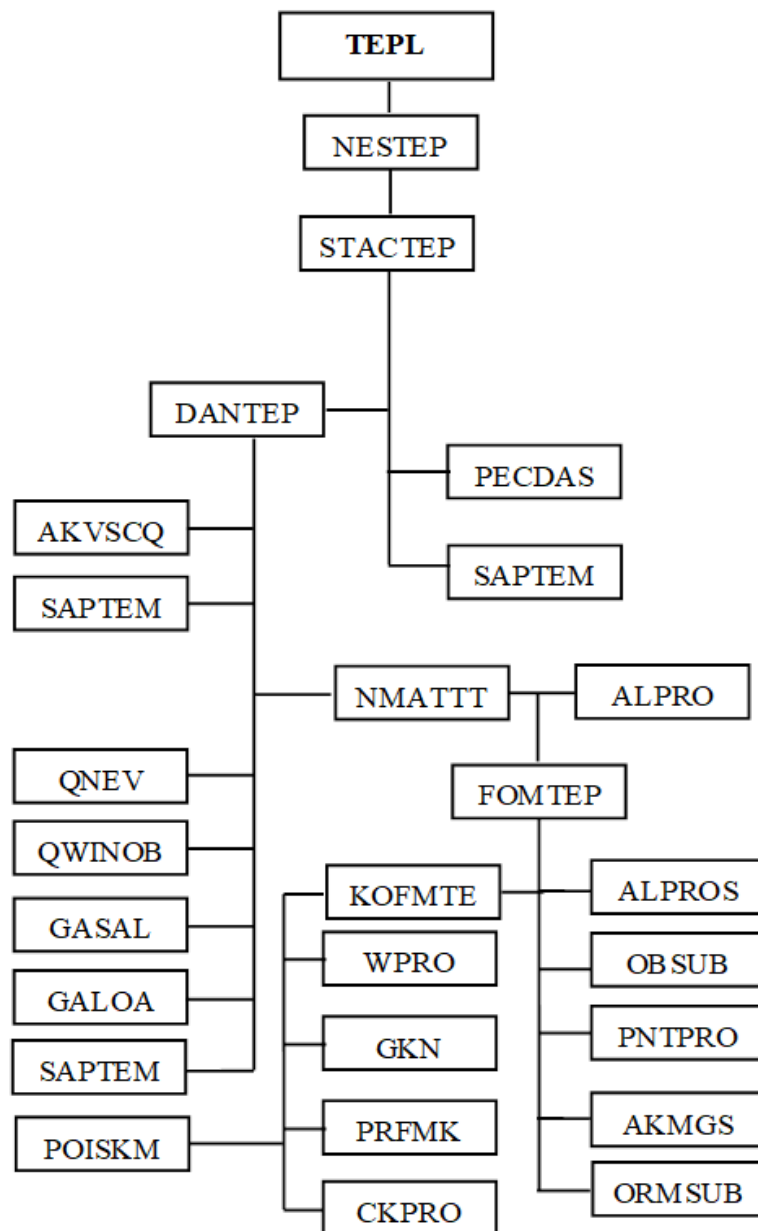


Рис. 3.3. Функціональна схема блока розв'язування стаціонарної і нестаціонарної задачі теплопровідності.

На рис. 3.3–3.5 наведено функціональні схеми блоків головної програми, формування матриці теплопровідності та обчислення її коефіцієнтів.

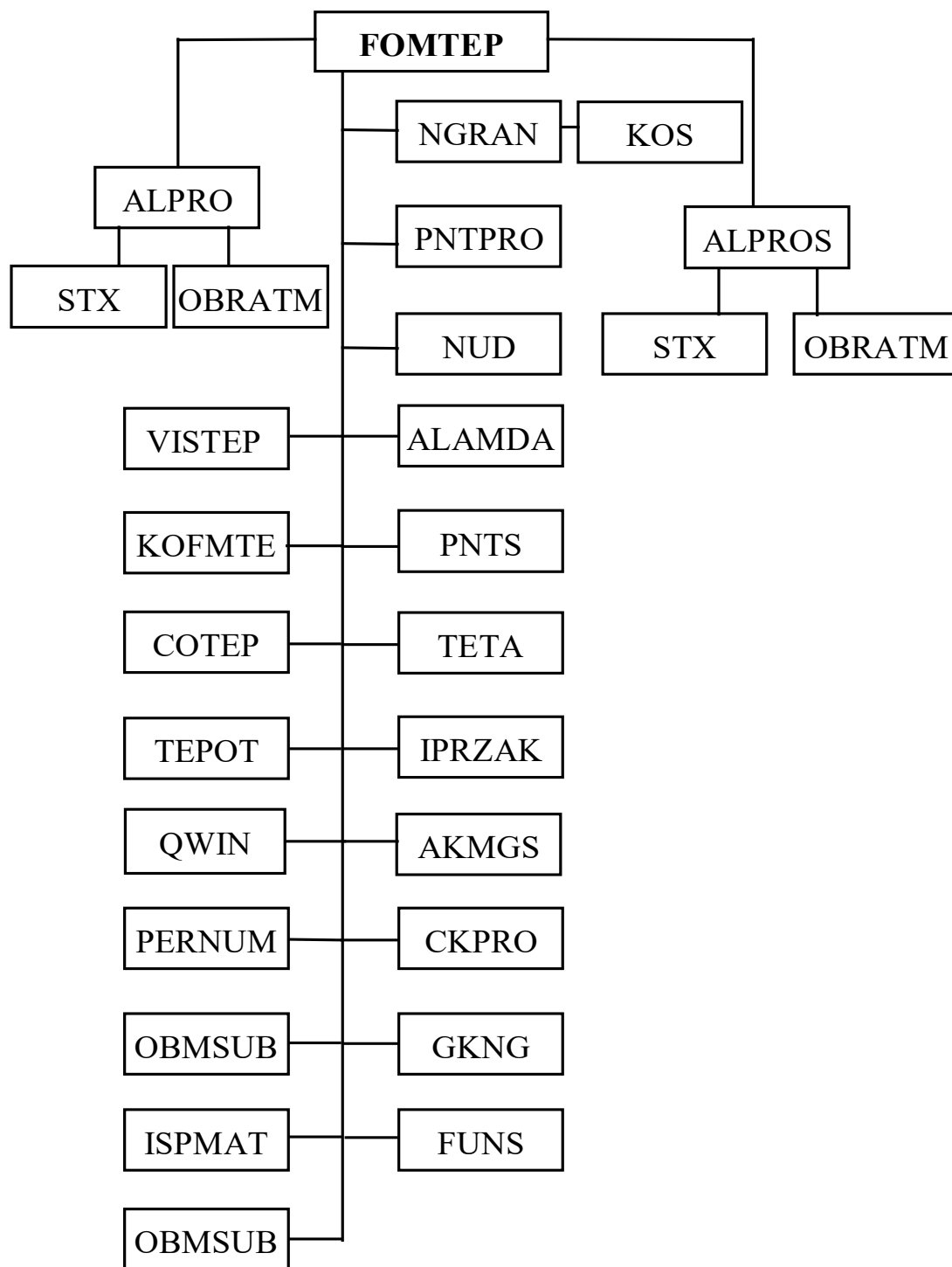


Рис.3.4. Функціональна схема блоку формування матриці теплопровідності конструкції

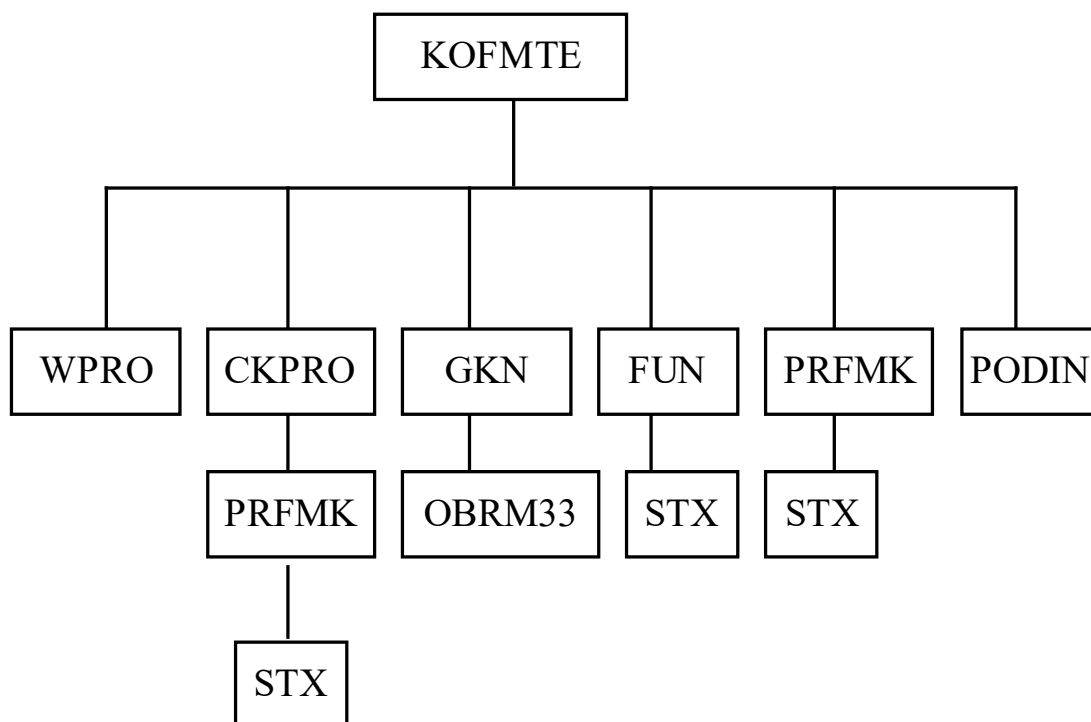


Рис. 3.5. Функціональна схема блоку формування матриці теплопровідності скінченного елемента

В табл. 3.1 наведено описання функціонального призначення програм підсистеми TEPL.

Таблиця 3.1.- Функціонального призначення програм підсистеми TEPL

№пп	Блок	Ім'я підпрограми	Призначення підпрограми
1		NESTEP	Головна програма розв'язання задач нестационарної теплопровідності
2		STACSTEP	Головна програма вирішення завдань стаціонарної теплопровідності
3	DANKON	DANSTEP	Підпрограма формування вихідних даних стаціонарної та нестационарної теплопровідності
4		QTEP3	Перетворення вектора температурного навантаження тіл обертання
5		ALFAT	Підпрограма-функція завдання тензора температурного розширення α_{ij}
6		AKVSCQ	Обчислення коефіцієнтів скінченно-різницевої апроксимації функції часу

Продовження таблиці 3.1

7		ALAMDA	Підпрограма-функція завдання коефіцієнта теплопровідності
8		COTEP	Підпрограма-функція завдання коефіцієнтів тепловіддачі на поверхні СЕ
9	TETA		Підпрограма-функція завдання температури навколишнього середовища
10		TEROT	Підпрограма-функція завдання величини теплових потоків q
11	FORMAT	FOMTEP	Формування матриці теплопровідності конструкції та вектора еквівалентного теплового навантаження
12		KOFMTE	Обчислення коефіцієнтів матриці теплопровідності та вектора температурних навантажень СЕ
13		VISTEP	Підпрограма-функція завдання внутрішніх джерел тепла w_0
14		AKMGS	Формування матриці теплопровідності, обумовленої граничними умовами 3-го роду на поверхні СЕ
15		ALPRO	Обчислення матриці переходу від вектора степеневих координатних функцій до функцій форми
16		ALPROS	Обчислення матриці переходу від вектора степеневих координатних функцій до функцій форми
17		STX	Обчислення творів степеневих координатних функцій
18		OBRATM	Обчислення зворотної матриці
19		PNTPRO	Просторова нумерація вузлів КЕ
20		NUD	Вибірка глобальної невідомої
21		PERNUM	Визначення номера скінченного елемента
22		IPRZAK	Визначення граничних умов для КЕ
23		CKPRO	Обчислення тензора перетворення координат
24		GKNG	Обчислення контраваріантного метричного тензора
25		GKN	Обчислення підступного метричного тензора
26	FORQ	QNEV	Обчислення вектора еквівалентного навантаження від конвективного теплооб.

Продовження таблиці 3.1

27		QWINOB	Обчислення вектору еквівалентного навантаження від температури на поверхні конструкції
28	GAUSSBL	GASAL	Керуюча програма вирішення системи рівнянь блочним методом
29		RLIM	Зчитування блоку з диска
30		WLIM	Запис блоку на диск
31		STRIFQ	Приведення матриці до трикутного вигляду та виключення невідомих у прямому ході методу Гауса
32		REMAQ	Виключення невідомих у прямому ході методу Гауса
33		GALOA	Перетворення вектора правої частини системи рівнянь та отримання рішення у зворотному ході методу Гауса
34	VIXOD	SAPTEM	Запис та зчитування поля температур
35		SAGTEM	Друк поля температур та візуалізація

3.5. Побудова алгоритму розв'язання задачі термопружності

Підсистема «TERCOM» призначена визначення температури дисипативного розігріву еластомерних елементів конструкцій при циклічному деформуванні. Схема підсистеми зображено на рис. 3.6.

Розглянемо процес визначення температури дисипативного розігріву (саморозігріву) конструкцій з еластомерів як рішення незв'язаної задачі термов'язкопружності для режиму циклічного деформування і теплообміну з навколишнім середовищем. У цьому випадку розв'язання квазістатичної задачі термов'язкопружності розпадається на дві самостійні: визначення функції внутрішніх джерел у пружно-спадковому тілі (розв'язання задачі термопружності) та розрахунок температурного поля за заданих граничних умов (розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності). При побудові математичної моделі завдання вважається, що напружений стан істотно залежить від координат, наслідком чого є поле джерел тепла і температури неоднорідним.

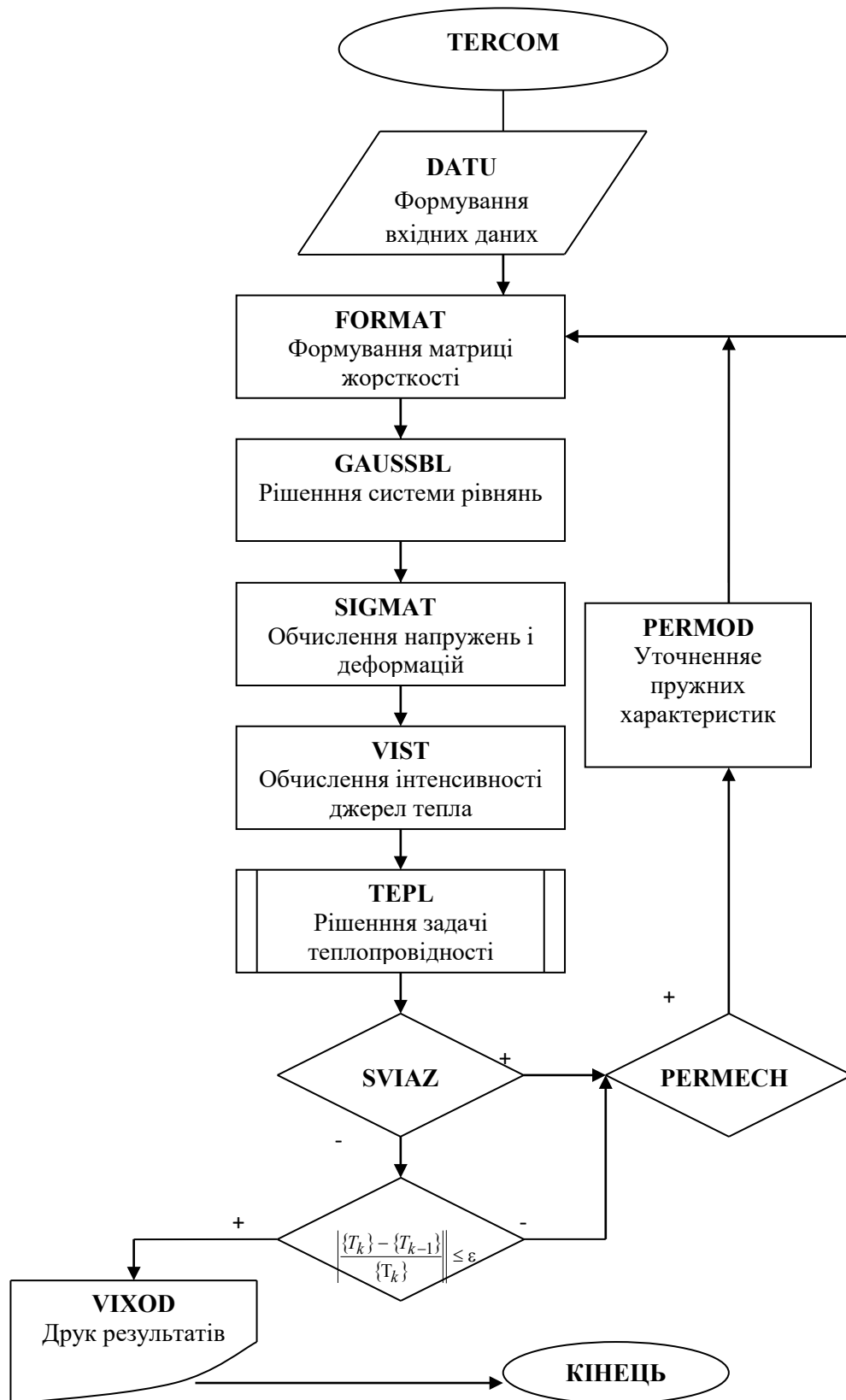


Рис. 3.6. Блок-схема алгоритму рішення задачі термопружності

Алгоритм розв'язання задачі є наступною послідовністю розв'язуваних задач:

1. З розв'язання задачі пружності $[K^{ij}]\{u_j\} = \{P^i\}$ визначається вектор вузлових переміщень $\{u_i\}$ при заданій амплітуді коливань. Вектор правої частини визначається за матрицею жорсткості $[K^{ij}]$ та граничними умовами у вигляді переміщень на поверхні СЕ. Для окремого СЕ вектор внутрішніх зусиль визначається за формулою

$$\{P^s\} = [A]^T [F_{ij}^s]^T [E^{ijkl} [F_{kl}^t] [A] \{u_t\}^{(P)} + [A]^T [F_{(\Theta)}^s]^T [E^{(\Theta)} [F_{(\Theta)}^t] [A] \{u_t\}^{(P)}] \quad (3.4)$$

2. Для визначення потужності внутрішніх джерел теплоутворення необхідно визначити величину розсіяної енергії за цикл навантаження.

Використання найпростіших гіпотез про однорідність поля переміщень у напрямку армування та однорідності поля узагальнених сил для зсувних напружень і напруги, нормальних до волокон, дозволяє обчислювати потужність внутрішніх джерел теплоутворення як середню величину для k -го шару, рівну дисіпованій енергії:

$$w_0^{(k)} = \Delta W^{(k)} = [\sigma^{(k)}]^T [\Psi_k^O] [\varepsilon^{(k)}], \quad (3.5)$$

де $[\sigma^{(k)}]$, $[\varepsilon^{(k)}]$ – тензори напружень та деформацій, $[\Psi_k^O]$ – тензор упругодисіпативних характеристик композиту в системі координат армування шару

У разі в'язкопружного деформування компоненти композитного матеріалу, що описується рівняннями Вольтера II роду, потужність джерел тепла їх матеріалів обчислюються за формулою:

$$w_0 = \frac{1}{2} \omega R_s \sigma_0^{ij} \varepsilon_{ij}^0 = \psi R_s, \quad (3.6)$$

де R_s – синус-перетворення ядра релаксації.

3. З розв'язання задачі стаціонарної теплопровідності (2.48) визначається поле температур.

Для вирішення пов'язаної задачі терм в'язкої пружності використовується метод послідовних наближень. У цьому випадку завдання теплопровідності стає нелінійним, оскільки матриця $[H]$ та вектор еквівалентного теплового навантаження $\{R\}$ стають залежними від температури.

Система роздільних рівнянь стаціонарної теплопровідності з використанням методу послідовних наближень записується у вигляді

$$[H(T_{(k-1)})]\{T_{(k)}\} = -\{R_{(k-1)}\}. \quad (3.7)$$

Ітераційний процес розв'язання задачі продовжується доти, доки не буде досягнуто заданої точності обчислення за умовою

$$\left| \frac{\{T_{(k)}\} - \{T_{(k-1)}\}}{\{T_{(k)}\}} \right| \leq \varepsilon. \quad (3.8)$$

Для досягнення заданої точності зазвичай достатньо двох-трьох ітерацій.

У тому випадку, коли фізико-механічні властивості матеріалу залежать від температури, на кожній ітерації проводиться перерахунок компонентів тензорів пружних характеристик теплопровідності, а також компонент жорсткості матриць і теплопровідності конструкції.

На рис. 3.6. представлено блок-схему алгоритму визначення температури дисипативного саморозігріву.

У головній програмі DATU відбувається резервування робочих масивів та завдання початкових значень параметрів задачі термов'язкої пружності. У підпрограмі DTUVIS відбувається завдання вихідних даних: тип кінцевого елемента, розміри сіткової області – , поле координат $X(NUX, 3)$, топологія та кінематичні граничні умови завдання пружності $NF(NUX)$ та

теплопровідності $NFT(NUX)$, амплітуда навантаження Δ , μ_0 , ν , α_T пружні постійні, коефіцієнти теплопровідності λ_q , теплообміну α_q , температура навколишнього середовища T_0 . Обчислюються розмірності завдань пружності NEQ, NST та теплопровідності NEQT, NSTT.

Додатково до сказаного задаються частота коливання ω , параметри реологічні матеріалу α, β, χ , тип ядра релаксації Ю.Н. Работнова чи А.Р. Ржаніцина.

3.6. Програмне забезпечення підсистеми «TERCOM»

Розв'язання задачі пружності утворюється у вигляді вектора вузлових переміщень і виконується блоком TERMU. Підпрограма VISQI3 підкомпонентів тензорів напружень та деформацій, обчислених у підпрограмах SIGKE3, обчислює потужність внутрішніх джерел тепла. Температура саморозігріву визначається рішенням системи теплопровідності (3.4) в блоці TEPLO. На рис. 3.7. наведено схему функціональної взаємодії підпрограм підсистеми.

У табл. 3.2 наведено опис функціонального призначення програм підсистеми «TERCOM».

Таблиця 3.2.- Функціонального призначення програм підсистеми «TERCOM»

№ пп	Блок	Ім'я підпрограми	Призначення підпрограми
1	TERCOM	TERMU	Головна програма управління вирішенням задач термопружності
2	DATU	DTUVIS	Підпрограма формування вихідних даних: сітки розбиття, координат конструкції, топології, граничних умов.
3	FORMAT	FOMATR	Підпрограма формування матриці жорсткості для шаруватого композиту.
4	SIGMAT	SIGMA3	Підпрограма обчислення тензора напруги для анізотропного матеріалу

Продовження таблиці 3.2

5	VIST	VISQI3	Підпрограма обчислення потужності внутрішніх джерел w_0
6	TEPL	TEPL	Підпрограма розв'язання задач теплопровідності
7	VIXOD	PRNSGT	Друк результатів рішення: поля температур T , переміщень u_i та напружень σ_{ij} та їх візуалізація

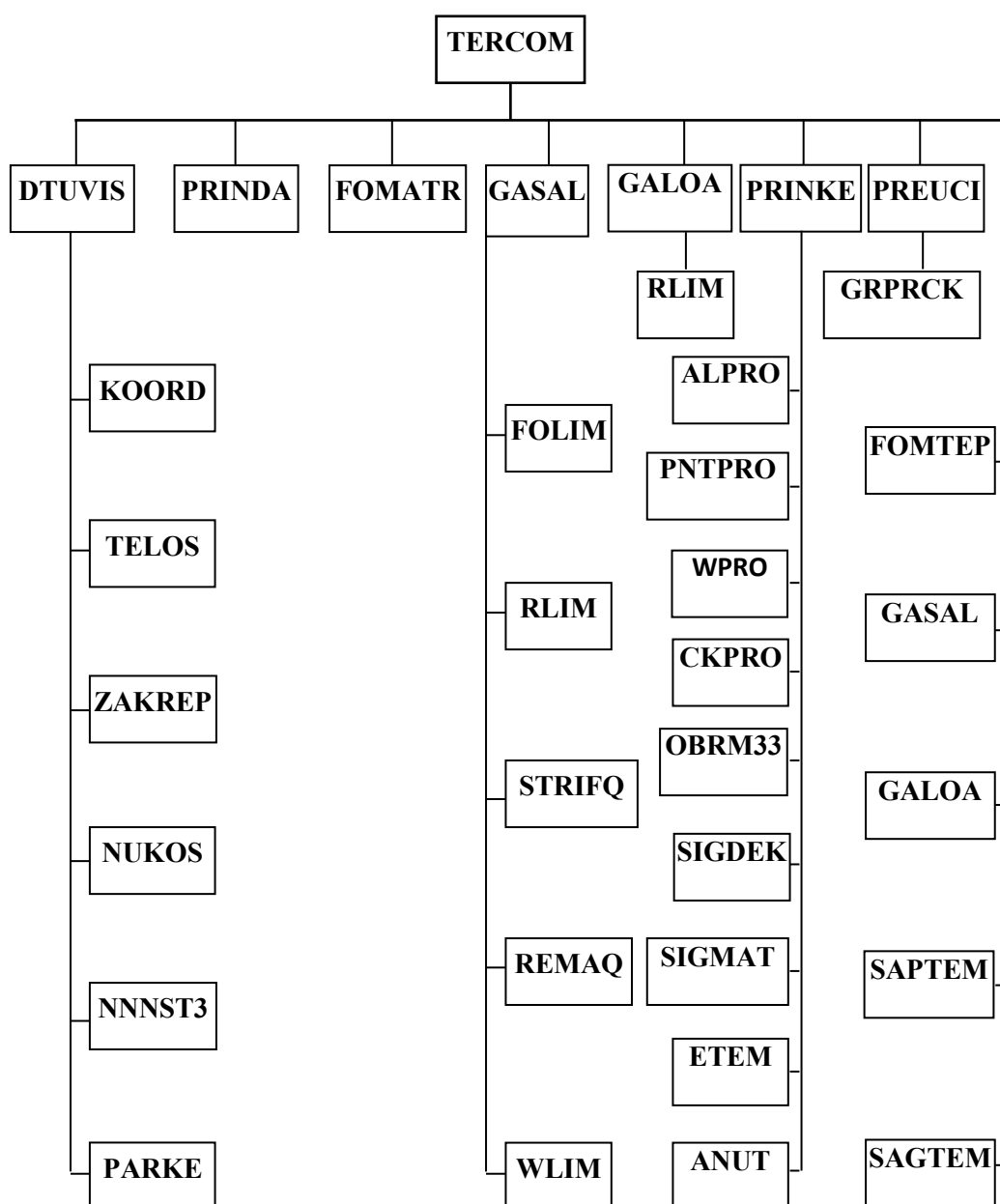


Рис. 3.7. Функціональна схема підсистеми «TERCOM»

3.7. Висновки до розділу

Розглянуто методику побудови матриці теплопровідності скінченних елементів, що моделюють поведінку шаруватих композитних конструкцій, реалізована у вигляді пакету прикладних програм обчислювального комплексу «МІРЕЛА+».

У розділі 3 на підставі вихідних скінченно-елементних співвідношень, розглянутих в розділі 2 розроблено:

- алгоритм і пакет прикладних програм «ТЕРЕЛ» для розв'язання завдань стаціонарної і нестаціонарної теплопровідності анізотропних матеріалів в тривимірній постановці;
- алгоритм і пакет прикладних програм «ПРОКОМ» для розв'язання просторової задачі термопружності шаруватих композитних конструкцій;

ВИСНОВКИ

Сьогодні скінчено-елементні методи є невід'ємною частиною інженерного аналізу, розробок, опису фізико-механічних полів у твердих тілах. Згідно з теорією СЕ методів, їм притаманні дві властивості: ефективність та застосовність до інженерного аналізу. Цей метод незамінний, якщо треба враховувати геометричні особливості областей. Метод скінчених елементів застосовується у системі «МІРЕЛА+», яка призначена для автоматизованого проектування складних інженерних конструкцій з анізотропних матеріалів та аналізу фізико - механічного стану.

У кваліфікаційній роботі проведено дослідження стану проблеми, представлено аналіз літературних джерел про підходи та методи розв'язання задач в умовах дії термосилових навантажень, визначено вихідні співвідношення та обрано найбільш ефективні чисельні методи їх розв'язання. Та, незважаючи на численні дослідження на цю тему, досі не існує універсальних програмних рішень.

Для розрахункових співвідношення обрано МСЕ до задач теплопровідності конструкцій, та розроблено алгоритми їх розв'язання. Проведено чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів. Наведено особливості використання МСЕ для розв'язання зв'язаних задач термопружності. Представлено структуру розробленого програмного комплексу. Отримано такі основні наукові та практичні результати:

1. Набула розвитку теорія розрахунку шаруватих композиційних конструкцій на теплові та силові впливи. На основі співвідношень тривимірної теорії пружності побудовано математичну модель деформування конструкції із анізотропних матеріалів. Для вирішення задач термопружності для анізотропного тіла, застосовано просторовий СЕ.

2. На основі МСЕ розроблено методику рішення задач термопружності. Побудовано алгоритм розв'язання системи рівнянь термопружності для анізотропних конструкцій. Розроблено пакет прикладних програм розв'язання задачі теплопровідності анізотропних конструкцій. Розроблено пакет прикладних програм розв'язання задачі термопружності. Розроблена методика є універсальною і має ряд особливостей і дозволяє вирішувати задачу термопружності для шаруватих анізотропних конструкцій. Дозволяє проводити розрахунки реальних конструкцій на теплові навантаження, при цьому можна уникнути використання спрощуючих гіпотез, що зводять тривимірне завдання до плоскої постановки, що призводять до великих обмежень і похибок граничними умовами.

3. Встановлено та досліджено закономірності термомеханічної поведінки анізотропної конструкції. Розглянуто рішення задач термопружності різних конструкцій.

4. Розроблений алгоритм розв'язання задачі термопружності дозволяє досліджувати напружено-деформований стан конструкцій з теплофізичними властивостями, які сильно залежать від температури. Вирішено низку задач термопружності конструкцій, властивості яких мають наперед задану залежність від температури.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Barber J. R., Comninou Maria. Thermoelastic contact problems. Therm.Stresses.Vol.3. Amsterdam, 1989. P. 1 – 106.
2. Kwon Y. W. Multiscale Modeling and Simulation of Composite Materials and Structures / Y. W. Kwon, D. H. Allen, R. Talreja. New York: Springer, 2007. 630 p.
3. Mukhopadhyay M. Mechanics of Composite Materials and Structures / M. Mukhopadhyay. Hyderabad: Universities Press, 2005. 371 p.
4. Poisson S. D. Memor sur l'equilibre et le mouvement des corps elastiques. Mem. Paris Acad. 1828. V.8. P. 357 – 570.
5. Tolok V. A., Kirichevsky V. V., Dokhnyak B. M., Grebenyuk S. V., Kozub Y. G. Mathematical Modeling of destruction Processes of elastomer constructions in conditions of nonlinear deformation on the basis of J-Integral. Berichte des Intern. Kollog. über Anwendungen der Informatik und der Mathematik in Arch. und Bauw (IKM-2000). Deutschland, 2000. P. 1–6.
6. V.A. Bazhenov, Yu.H. Kozub, H.O. Kozub, I.I. Solodei, R.L. Stryhun. Thermoelasticity of elastomers and elastomer composites constructions. LAP, 2021, 320p.
7. Беляев Н. М., Рядно А. А. Методы нестационарной теплопроводности. М.: Высш. школа, 1978. 328 с.
8. Бурцев Г. Г., Чибириков В. К. Численное исследование термоупругого состояния толстых неоднородных плит. Сопротивление материалов и теория сооружений. 1987. вып. 51. С. 63 – 67.
9. Василенко А. Т., Судацова Г. К. Напряженное состояние термочувствительных толстостенных цилиндров из анизотропных композитов. *Механика композитных материалов*. 1999. Т. 35, №3. С. 367 – 374.
10. Вигак В. М. О построении решения уравнения теплопроводности для

- кусочно-однородного тела. Докл. АН УССР. Сер. А. 1980. №1. С. 30 – 32.
11. Григоренко А. Я. Численное решение задачи об осесимметричных свободных колебаниях сплошных цилиндров. Прикл. механіка. 2010. Т. 46, №5. С. 10 – 20.
 12. Григоренко Я. М., Грицько Є Г., Журавчак Л. М. Застосування скінченних різниць і приграничних елементів в задачі пружності для неоднорідного тіла. Доп. НАН України. 1993. №4. С. 49 – 53.
 13. Гуляр А. И., Сахаров А. С., Черный С. М. Исследование неустановившихся температурных полей в неоднородных телах вращения. Сопротивление материалов и теория сооружений. 1977. Вып.31. С. 91 – 96.
 14. Жук Я.А., Сенченков И.К. Связанное термомеханическое поведение трехслойной вязкопластической балки при гармоническом нагружении. Прикладная механика. 2001. Т.37, №1. С. 93 – 99.
 15. Зинкевич О. К. Метод конечных элементов в технике. М. Мир, 1975. 541 с.
 16. Исследование вибрационного разогрева прямоугольной вязкоупругой призмы при циклическом сдвиге / Потураев В. Н., Дырда В. Н., Карнаухов В. Г., Мазницова А. В., Сенченков И. К., Прикладная механика. 1976. Т.12, № 11. С. 57 – 61.
 17. Каминский А. А., Селиванов М. Ф. Определение и анализ-эффективных релаксационных свойств композита с вязкоупругими компонентами. Прикл. механіка. 2010. 46, №1. С. 23 – 33.
 18. Карнаухов В. Г. Связанные задачи термовязкоупругости. К.: Наукова думка, 1982. 280 с.
 19. Киричевский В.В., Сахаров А.С. Нелинейные задачи термомеханики конструкций из слабосжимаемых эластомеров. Киев: Будівельник, 1992.

216 с.

20. Козлов В. И. Колебания и диссипативный разогрев многослойной оболочки вращения из вязкоупругого материала. Прикладная механика. 1996. 32, №6. С. 82 – 89.
21. Козуб Г. О. Чисельне моделювання фізико-механічних полів в твердих тілах // Modern ways of solving the latest problems in science. Proceedings of the XXXVII International Scientific and Practical Conference. Varna, Bulgaria. 2022. Pp. 446-448. URL: <https://isg-konf.com/modern-ways-of-solving-the-latest-problems-in-science/>. Available at: DOI: 10.46299/ISG.2022.1.37.
22. Козуб Г. А., Козуб Ю. Г., Дяченко С. В., Хмиль Н. А. Конечноэлементное моделирование термомеханического деформирования слоистых анизотропных конструкций. Вісник Східноукраїнського національного університету імені Володимира Даля. 2010. №10(152). Частина 2. С. 85 – 97.
23. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела. К.: Наук. думка, 1992. 280 с.
24. Куш В. І., Майстренко А. Л., Чернобай В. С. Модифікований метод Максвелла визначення ефективних стали структурно-неоднорідних матеріалів. Доповіді Нац. акад. наук Укр. 2017. №2. С. 35 – 41.
25. Лавренюк В. І., Терещенко В. М. Напружений стан кусково–однорідних тіл при дії нестационарних теплових полів. Мат. методи та фіз.–мех. поля. 1997. Т. 40, №1. С. 53 – 58.
26. Метод конечных элементов в механике твердых тел/ А. С. Сахаров, В. Н. Кислоокий, В. В. Киричевский и др. К.: Вища школа, 1982. 480 с.
27. Механика композитов. Т.12. Прикладные исследования / под ред. А. Н. Гузя и Л. П. Хорошуна. К.: Наук. думка, 2003. 398 с.
28. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.:

- Наука, 1970. 512 с.
29. Мотовиловец И. А. Теплопроводность пластин и тел вращения. К.: Наук. думка, 1969. 144 с.
 30. Новацкий В. Динамические задачи термоупругости М.: Мир, 1975. 256 с.
 31. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К., Сипетов В. С., Карпиловский В. С. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов. К.: Вища школа, 1987. 200 с
 32. Пискунов В. Г., Вериженко В. Е., Присяжнюк В. К., Сипетов В. С., Карпиловский В. С. Расчет неоднородных оболочек и пластин методом конечных элементов. К.: Вища школа, 1987. 200 с.
 33. Потураев В. Н., Дырда В. И., Круш И. И Прикладная механика резины: Наук. думка, 1980. 260 с.
 34. Прусов И. А. Некоторые задачи термоупругости. – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1972. 200 с.
 35. Решение трехмерной задачи теплопроводности в криволинейной системе координат методом конечного элемента / Гуляр А. И., Кислоокый В. Н., Сахаров А. С., Чорный С. М. Сопротивление материалов и теория сооружений. 1974. Вып. 22. С. 21 – 29.
 36. Самойлович Ю. А. Применение вариационного метода Био для решения задач Стефана. Теплофизика высоких температур. 1966. Т. 4, № 6. С. 832 – 837.
 37. Сегерлинд И. К. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
 38. Сипетов В. С. Уточненный анализ поведения слоистых композитных конструкций при тепловом и статическом воздействиях. Механика композитных материалов. 1989. № 1. С. 142 – 149.
 39. Сипетов В. С., Демчук О. Н. Решение в уточненной постановке задачи

- термоупругости слоистых пластин. Мат. методы и физ.-мех. поля. 1989. Вып. 29. С. 25 – 29.
- 40.Толок В. А., Кабулов И. К. Алгоритмическая система для решения задач теории упругости и пластичности. Вопросы выч. и прикл. математики. Ташкент: ИК с ВЦ АН УзССР. 1970. вып.4.
- 41.Хорошун Л. П., Козлов С. В., Патлашенко И. Ю. Определение осесимметричного напряженно-деформированного состояния термочувствительных оболочек вращения методом сплайн-коллокации. Прикл. механика 1988. Т.24, №6. С. 56 – 63.
- 42.Хуан С., Чжан Ю. Нестационарный, периодический и стационарный режим теплопроводности в слоистых композитах. ASME. Сер. С. Теплопередача. 1980. Т.102, №4. С. 165 – 172.
- 43.Ши Д. Численные методы в задачах теплообмена. М.: Мир, 1988. 544 с.

ДОДАТКИ

Додаток А. Фрагмент коду програми модулю «ТЕРЕЛ»

```

DOUBLE PRECISION BBSL
COMMON/PARGAU/NEQQ,NST,NB,NL
      COMMON/MAXNZZ/MAX,NZZ,NNP
      COMMON/DRIWG/LOA,TIME,NDRIW,ISUH
      COMMON/RABGAU/NS1(9)
      COMMON/RESZAP/ITAPE(8)
      COMMON/KSO/LDK(8)
      COMMON/KKTI/KTI(3)
      COMMON/IUPR/MRE(4)
      COMMON/J123/J2(3)
      COMMON/AVTOM1/EPN,EPMAX,CUVEL,CUMEN,CUMENS
      COMMON/AVTOM2/ITMIN,ITMAX,ITSP,NITER,NPERMA
      COMMON/ITER/ITER,NMS
      COMMON/SPUSK/DSPUS,QRA
      COMMON/DIMS/M1,M2,M3
      COMMON/PARLIS/ILIS
      COMMON/NUSTR/NUS
      COMMON/OBMD/INZ(3)
      COMMON/CATFIL/IC(150)
      COMMON/KV/KV
      COMMON/NVZ/NZM,NTB
      COMMON/MSKE/MSKE
      COMMON/MNLMCX/MNL,MCX
      COMMON IS
DOUBLE PRECISION ASI,SHAG,X1,CSI
      COMMON/CSI/ASI(20)
      COMMON/SHAGI/SHAG(60)
      COMMON/NACH/X1(3)
      COMMON/ACSI/CSI(60)
      COMMON/ALV/ALV,BETA
      COMMON/OBM/ARR(911)
DOUBLE PRECISION DET,DETS,ALV,BETA
      COMMON/DET/DET
      COMMON/DETS/DETS
      COMMON/JN64/NN(64)
      COMMON/JN16/NNN(16)
      COMMON/NUKE/KU(16)
      COMMON/KSOS/MMS(2)
      COMMON/NGR/NGR(6)
      COMMON/NEQ/NEQ
      COMMON/NUS/NUSSS
      COMMON/PRCILC/PREO,SVER,IPRI
      LOGICAL PREO,SVER
      COMMON/UVINO/UVIN,UTEM
      LOGICAL UVIN,UTEM
      COMMON/UPRO/UPRO
      LOGICAL UPRO

```



```

      DOUBLE PRECISION CORECT,UD,UVIS3,U,Q,X
      COMMON/CORECT/CORECT
      COMMON/N1930/N19(12)
      COMMON/J1J2J3/J1(10)
      COMMON/PECKOT/NUK,IDER
C     ПАРАМЕТРЫ ВЯЗКОСТИ
      DOUBLE PRECISION
TAU,TK,DTAU,CREL1,CREL2,DREO,RTN1,RTN2,QRK
      DOUBLE PRECISION
RTV1,RTV2,P,QQS,EPSR,SV,SP,SUMSG,SUMD,SUMS
      DOUBLE PRECISION RT1,RT2,STEK
      LOGICAL RABOT,RGANI
      LOGICAL NELDEP,NEVIS,XCONST
      COMMON/YADRO/RABOT,RGANI
      COMMON/NELVIS/NELDEP,NEVIS,XCONST
      COMMON/STEK/STEK
      COMMON/QRK/QRK
      COMMON/TAU/TK,DTAU
      COMMON/VAZ3/EPSR,CREL1,CREL2
      COMMON/REOPAR/ALFA,BET,HI
      COMMON/DREO/DREO
      COMMON/SV/SV(500,3)
      COMMON/SP/SP(500,3)
      DIMENSION SUMSG(500,6)
      DIMENSION SUMD(500,6)
      DIMENSION SUMS(500,6)
      DOUBLE PRECISION RM,RM1,T,ARR
      DOUBLE PRECISION CUVEL,CUMENS,CUMEN,DSPUS,
,RO,EPMAX,EPN,RITV,RONA,QQ,QRA,DSP,DSP2,DU
      DIMENSION RM(911),RM1(911)
      DIMENSION NF(500),NG(500),T(500)
      DIMENSION Q(500,3),X(500,3),UD(500,3)
      DIMENSION U(1500),QQ(500,3),DU(3,500)
      DIMENSION BBSL(2)
      DATA X,UD,NF,NG,T,Q/3000*0.D0,1000*-1,2000*0.D0/
      DATA SUMS/3000*0.D0/
      DATA RM,RM1,U/3322*0.D0/
      DATA BBSL/2*0.D0/
      DATA QQ,DU/3000*0.D0/
      DATA SP/1500*0.D0/
      DATA SV/1500*0.D0/
C     ЗАДАНИЕ ПАРАМЕТРОВ ФАЙЛОВ ЗАПИСИ
      OPEN (4,FILE='DATA.TXT',STATUS='NEW')
      OPEN (8,STATUS='UNKNOWN',FORM='BINARY',
*ACCESS='DIRECT',RECL=7288)
C     ЗАДАНИЕ ОБЩИХ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ
      IS=1
      NL=0
      LOA=0
      NUX=500
      ITER=1

```

```

CALL DANVIS (X,NF,NG,T,Q,NUX)
      MCX=MRE (2)
NEQQ=NEQ
NST=LDK (6)
NB=LDK (5)
NSTN=NST*NB+NL*NB
NSB=NST*NB+1
NMS=M1*M2*M3
NES=(NEQ-1)/NB+1
ITAPE (1)=8
NUS=1
NZM=LDK (8)+1
CALL WRITL (X,NUX,3,NZM,NMS)
DO 1 I10=1,NMS
  UD(I10,1)=0.D0
  UD(I10,2)=0.D0
  UD(I10,3)=0.D0
  IP=NF(I10)
  IF(IP.LT.0) GOTO 1
  MU=NG(I10)
  U(MU)=0.D0
  U(MU+1)=0.D0
  U(MU+2)=0.D0
1 CONTINUE
  TAU=0.D0
  DREO=0.D0
  CREL1=0.D0
  CREL2=0.D0
  ITER=0
  MDR=0
3 ITER=ITER+1
  PRINT 101,ITER
  WRITE(4,101) ITER
101 FORMAT(42X,'ITER=',1I2)
  DO 5 I10=1,NMS
    IP=NF(I10)
    IF(IP.LT.0) GOTO 5
    MU=NG(I10)
    U(MU)=0.D0
    MU=MU+1
    U(MU)=0.D0
    MU=MU+1
    U(MU)=0.D0
5 CONTINUE
  ITV=0
  QRA=QRA+DSPUS
  IF(NEVIS) QRA=DSPUS
  IF(NEVIS) GOTO 7
  IF(DABS(QRA).GT.DABS(QRK)) QRA=QRK
  IF(DABS(QRA).GT.DABS(QRK)) DSPUS=QRK-QRA+DSPUS
7 IF(ITER.EQ.1) GOTO 9

```

```

IF(.NOT.NELDEP) GOTO 9
TAU=TAU+DTAU
IF(TAU.GT.TK) TAU=TK
RTN1=CREL1
IF(RABOT) CALL RABO(TAU,0.D0,1)
IF(RGANI) CALL RGAN(TAU,0.D0,1)
RTN2=CREL1
DREO=RTN2-RTN1
RT1=CREL1
RT2=CREL2
RTV1=1.D0/(1.D0/3.D0-RT2/DTAU+TAU/DTAU*RT1)
RTV2=(2.D0/3.D0-(1.D0+TAU/DTAU)*RT1+RT2/DTAU)*RTV1
9 IF(ITER.EQ.1) DSP=DSPUS
  DSP2=DSPUS/DSP
  ITAPE(1)=8
  NUS=1
  NZM=LDK(8)+3
  CALL WRITL(UD,NUX,3,NZM,NMS)
  DO 11 I=1,NMS
  DO 11 J=1,3
  UD(I,J)=UD(I,J)*DSP2
11 CONTINUE
13 CONTINUE
  ITV=ITV+1
  DO 15 I=1,NMS
  DO 15 J=1,3
  QQ(I,J)=Q(I,J)*QRA
  SV(I,J)=0.D0
15 CONTINUE
  IF(ITER.EQ.1.AND.ITV.EQ.1) GOTO 17
  CALL NAGRUZ(X,UD,T,NF,NUX,QQ)
17 RITV=0.D0
  DO 19 I10=1,NMS
  IP=NF(I10)
  IF(IP.LT.0) GOTO 19
  IPZ=IPRZAK(IP,II,JJ,KK)
  IF(II.EQ.1) QQ(I10,1)=0.D0
  IF(JJ.EQ.1) QQ(I10,2)=0.D0
  IF(KK.EQ.1) QQ(I10,3)=0.D0
  MU=NG(I10)
  U(MU)=QQ(I10,1)
  MU=MU+1
  U(MU)=QQ(I10,2)
  MU=MU+1
  U(MU)=QQ(I10,3)
  RITV=RITV+QQ(I10,1)**2+QQ(I10,2)**2+QQ(I10,3)**2
19 CONTINUE
  IF(ITER.EQ.1.AND.ITV.EQ.1) RONA=RITV/(QRA**2)
  RO=(QRA**2)*RONA
  WRITE(4,103) DTAU,TAU
  WRITE(*,103) DTAU,TAU

```

```

103 FORMAT(15X, ' DTAU=', 1D12.5, ' TAU=', 1D12.5)
    WRITE(4, 105) ITV, RITV, EPN, DSPUS, QRA
    PRINT 105, ITV, RITV, EPN, DSPUS, QRA
105 FORMAT(' ITV=', 1I2, ' HEBЯ3KA=', 1D12.5, ' EPN=', 1D12.5
, , ' MAT=', 1D12.5, ' QRA=', 1D12.5)
113 FORMAT(2X, 'US(', I4, ', ', I1, ') =', D12.5, ' DU(', I3, ', ', I1,
*')=', D12.5)
    IF(RITV/EPMAX.LT.RO.AND.ITV.LT.ITMAX) GOTO 29
    ITAPE(1)=8
    NUS=1
    NZM=LDK(8)+3
    CALL READL(UD, NUX, 3, NZM, NMS)
    IF(NEVIS) GOTO 23
    QRA=QRA-DSPUS
    DSP=DSPUS
    DSPUS=DSPUS/CUMEN
    QRA=QRA+DSPUS
23 IF(.NOT.NELDEP.OR.ITER.EQ.1) GOTO 25
    TAU=TAU-DTAU
    TSP=DTAU
    DTAU=DTAU/CUMEN
    TAU=TAU+DTAU
    IF(RABOT) CALL RABO(TAU, 0.D0, 1)
    IF(RGANI) CALL RGAN(TAU, 0.D0, 1)
    WRITE(4, 107) CREL1, CREL2
107 FORMAT(15X, ' CREL1=', 1D12.5, ' CREL2=', 1D12.5)
    RTN2=CREL1
    DREO=RTN2-RTN1
25 ITV=0
    DO 27 I=1, NMS
    DO 27 J=1, 3
    UD(I, J)=UD(I, J)/CUMEN
27 CONTINUE
    GOTO 13
29 CONTINUE
    IF(RITV.LT.RO*EPN) GOTO 35
    MAT=0
    NPER=ITER/NPERMA*NPERMA
    IF(NPER.EQ.ITER) MAT=1
    IF(ITER.EQ.1) MAT=1
    IF(MAT.EQ.0) GOTO 31
        IF(MDR.EQ.2) GOTO 31
    CALL NMAK1(NF, NG, X, T, Q, NUX)
    CALL GASAL(RM(1), RM1(1), RM(NSB), RM1(NSB), NSTN)
31 CONTINUE
    CALL GALOA(RM, NSTN, U)
    MDR=2
    WRITE(*, 113) NUK, IDER, UD(NUK, IDER), NUK, IDER, DU(IDER, NUK)
    WRITE(4, 113) NUK, IDER, UD(NUK, IDER), NUK, IDER, DU(IDER, NUK)
    DO 33 I10=1, NMS
    IP=NF(I10)

```

```

      IF(IP.LT.0) GOTO 33
      MU=NG(I10)
      UD(I10,1)=UD(I10,1)+U(MU)
      U(MU)=0.D0
      MU=MU+1
      UD(I10,2)=UD(I10,2)+U(MU)
      U(MU)=0.D0
      MU=MU+1
      UD(I10,3)=UD(I10,3)+U(MU)
      U(MU)=0.D0
33  CONTINUE
      IF(PREO) CALL PREUCI(UD,NUX,NMS)
      GOTO 13
35  CONTINUE
      DO 37 I=1,NMS
      DO 37 J=1,3
      SP(I,J)=SP(I,J)+SV(I,J)
37  CONTINUE
      IF(XCONST) GOTO 41
      DO 39 I=1,NMS
      DO 39 J=1,3
      X(I,J)=X(I,J)+DU(J,I)
39  CONTINUE
41  CONTINUE
      CALL SUMNA3(X,NF,T,UD,SUMSG,SUMD,NUX,SUMS)
      CALL PRINKS(UD,X,T,NF,NUX,NMS,SUMSG,SUMD,SUMS)
      WRITE(4,109)NUK,IDER,UD(NUK,IDER)
      WRITE(*,109)NUK,IDER,UD(NUK,IDER)
109  FORMAT(5X,'CYMMAPHOE ПЕРЕМЕЩЕНИЕ U1(' ,I4,',',',
      *I1,') =' ,D12.5/)
      DSP=DSPUS
      IF(.NOT.NEVIS) GOTO 43
      IF(ITV.LT.ITMIN) DSPUS=DSPUS*CUVEL
      IF(ITV.GT.ITSP) DSPUS=DSPUS/CUMENS
43  IF(.NOT.NELDEP) GOTO 45
      IF(ITV.LT.ITMIN) DTAU=DTAU*CUVEL
45  CONTINUE
      ITAPE(1)=8
      NUS=1
      NZM=LDK(8)+1
      CALL WRITL(X,NUX,3,NZM,NMS)
      IF(ITER.EQ.1) CALL PECDA3(X,Q,T,NF,NG,NUX,NMS)
      WRITE(4,111)NUK,IDER,X(NUK,IDER)
      WRITE(*,111)NUK,IDER,X(NUK,IDER)
111  FORMAT(/15X,'KOORDX(' ,I4,',',',I1,') =' ,D12.5)
      IF(TAU.LT.TK.OR.QRA.LT.QRK) GOTO 3
      IF(.NOT.XCONST) GOTO 49
      DO 47 I=1,NMS
      DO 47 J=1,3
      X(I,J)=X(I,J)+UD(I,J)
47  CONTINUE

```

```

49 CALL PECDA3 (X, Q, T, NF, NG, NUX, NMS)
   END
   SUBROUTINE DANVIS (X, NF, NG, T, Q, NUX)
      DOUBLE PRECISION CORECT, X1, X2, X3, H1, H2, H3, X, T, Q,
      , RH, RB, ALF, AF, AF2, A1, A2, CUVEL, CUMEN, CUMENS, EPN,
      , EPMAX, DSPUS, QRA
      DOUBLE PRECISION STEK, QRK, EPSR, TK, DTAU, CREL1, CREL2
      COMMON/RESZAP/ITAPE (8)
      COMMON/KSO/LDK (8)
      COMMON/DIMS/M1, M2, M3
      COMMON/NEQ/NEQ
      COMMON/PARLIS/ILIS
      COMMON/MAXNZZ/MAX, NZZ, NNP
      COMMON/NUSTR/NUS
      COMMON/NNBRS/NACHH, NBRS, JJJ, NEL, EPS
      COMMON/NVZ/NZM, NTB
      COMMON/PRCILC/PREO, SVER, IPRI
      LOGICAL PREO, SVER
      COMMON/UVINO/UVIN, UTEM
      LOGICAL UVIN, UTEM
      COMMON/UPRO/UPRO
      LOGICAL UPRO
      COMMON/MSKE/MSKE
      DIMENSION NF (1), NG (1), T (1), X (NUX, 3), Q (NUX, 3)
      COMMON/CORECT/CORECT
      COMMON/NACH/X1, X2, X3
      COMMON/SHAGI/H1 (20), H2 (20), H3 (20)
      COMMON/AVTOM1/EPN, EPMAX, CUVEL, CUMEN, CUMENS
      COMMON/AVTOM2/ITMIN, ITMAX, ITSP, NITER, NPERMA
      COMMON/SPUSK/DSPUS, QRA
      COMMON/DEFNEL/DN
      COMMON/PECKOT/NUK, IDER

COMMON/SECH/KSECH, NS1 (5), NS2 (5), NS3 (5), KS1 (5), KS2 (5), KS3 (5)
      LOGICAL RABOT, RGANI
      LOGICAL NELDEP, NEVIS, XCONST
      COMMON/YADRO/RABOT, RGANI
      COMMON/NELVIS/NELDEP, NEVIS, XCONST
      COMMON/STEK/STEK
      COMMON/QRK/QRK
      COMMON/TAU/TK, DTAU
      COMMON/VAZ3/EPSR, CREL1, CREL2
      COMMON/REOPAR/ALFA, BET, HI
      DOUBLE PRECISION SEL, SEL1, SEL2, H, HM, HC, HMM, DN
      DATA RH, RB, H, ALF, AF, AF2, A1, A2/8*0.D0/
      DATA M, N, L/3*2/
      DN=0
      QRA=0.D0
      DSPUS=-100.D0
      QRK=-100.D0
      STEK=2.4D0

```

```

DTAU=0.1D0
TK=1.0D0
EPN=0.5D-3
EPMAX=1.D7
CUVEL=1.1D0
CUMEN=2.D0
CUMENS=1.5D0
ITMIN=7
ITMAX=15
ITSP=10
NITER=3
NPERMA=101
PREO=.FALSE.
UVIN=.FALSE.
UTEM=.FALSE.
UPRO=.FALSE.
XCONST=.TRUE.
NEVIS=.FALSE.
NELDEP=.TRUE.
RABOT=.FALSE.
RGANI=.NOT.RABOT
LDK(7)=1
CORECT=0.D0
MSKE=2
ILIS=911
ITAPE(1)=8
NUS=1
NZM=1
C    РЕОЛОГИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ МАТЕРИАЛА
ALFA=-0.6
BET=1.1
HI=0.64
ALFA=0.3
BET=0.05
HI=0.0765
C    ТОЧНОСТЬ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЯДРА РЕЛАКСАЦИИ
EPSR=1.D-4
C    РАЗМЕРЫ СЕТОЧНОЙ ОБЛАСТИ
M1=2
M2=8
M3=5
C    НОМЕР КОНТРОЛЬНОЙ ТОЧКИ
NUK=15
IDER=2
LDK(6)=(M+(N-1)*M1+(L-1)*M1*M2)*3
NMS=M1*M2*M3
NEQ=NMS*3
MA1=M1-1
MA2=M2-1
MA3=M3-1
RH=10.D0

```

```

RB=2.5D0
H=1.D0
C ЗАДАНИЕ ТОПОЛОГИИ 3-Х МЕР.КОН-ЦИИ
CALL TELOS(1,1,1,M1,M2,M3,NF)
CALL ZAKREP(1,2,1,1,M2,M3,4,NF)
CALL ZAKREP(M1,2,1,M1,M2,M3,4,NF)
CALL ZAKREP(1,2,1,M1,M2,1,1,NF)
CALL ZAKREP(1,2,M3,M1,M2,M3,2,NF)
CALL ZAKREP(1,1,1,M1,1,M3,7,NF)
DO 51 I=1,NMS
51 NG(I)=(I-1)*3+1
ALF=DATAN(1.D0)*2.D0
CALL CILKOR(X,NUX,RH,RB,H,ALF)
CALL HAGPO3(1,M2,1,M1,M2,M3,4,NUX,NF,X,Q)
CALL PARKE(M,N,L)
LDK(4)=3
KSECH=1
NS1(1)=1
NS2(1)=1
NS3(1)=1
KS1(1)=M1
KS2(1)=M2
KS3(1)=M3
RETURN
END
DOUBLE PRECISION FUNCTION ANUT(T)
DOUBLE PRECISION T,V,ALV,BETA
COMMON/ALV/ALV,BETA
V=0.3D0
ALV=V/(1.D0-V)
BETA=1.D0
ANUT=V
RETURN
END
DOUBLE PRECISION FUNCTION ALFAT(T)
DOUBLE PRECISION T,A
A=1.0D0
ALFAT=A
RETURN
END
DOUBLE PRECISION FUNCTION ETEM(T)
DOUBLE PRECISION T,E
E=260.D0
ETEM=E
RETURN
END
DOUBLE PRECISION FUNCTION POVNA3(NU,NG,X,NUX,JM)
DOUBLE PRECISION X,A,DSPUS,QRA
COMMON/SPUSK/DSPUS,QRA
COMMON/ITER/ITER,NMS
DIMENSION X(NUX,3)

```



```

A=0.D0
IF (NG.EQ.4.AND.JM.EQ.2) A=1.D0
POVNA3=A
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION ALFREO (T,N)
DOUBLE PRECISION T,A
COMMON/REOPAR/ALFA,BET,HI
ALFREO=ALFA
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION ALMREO (T,N)
DOUBLE PRECISION T,A
COMMON/REOPAR/ALFA,BET,HI
ALMREO=HI
RETURN
END

DOUBLE PRECISION FUNCTION BETREO (T,N)
DOUBLE PRECISION T,A
COMMON/REOPAR/ALFA,BET,HI
BETREO=BET
RETURN
END

SUBROUTINE CILKOR (X,NUX,RH,RB,H,ALF)
COMMON/DIMS/M1,M2,M3
DOUBLE PRECISION X,RH,RB,H,ALF,H3,AF,RD,
,A,SA,CA,R,Z1,Z2,Z3
DIMENSION X(NUX,3)
H3=H/(M1-1)
AF=ALF/(M3-1)
RD=(RH-RB)/(M2-1)
DO 1 K=1,M3
A=AF*(K-1)
SA=DSIN(A)
CA=DCOS(A)
DO 1 J=1,M2
R=RH-RD*(J-1)
Z1=R*SA
Z2=R*CA
DO 1 I=1,M1
Z3=H3*(I-1)
NU=I+M1*(J-1)+M1*M2*(K-1)
X(NU,1)=Z1
X(NU,2)=Z2
1 X(NU,3)=Z3
RETURN
END

```

Додаток Б. Сертифікат впровадження






INTERNATIONAL
SCIENCE GROUP

CERTIFICATE



Open Ukrainian Citation Index




Content Registration

is awarded to

Козуб Галина Олександрівна

for active participation

XXXVII International Scientific and Practical Conference

“MODERN WAYS OF SOLVING THE LATEST PROBLEMS IN SCIENCE”

20-23 September 2022, Varna, Bulgaria

24 Hours of Participation

(0,8 ECTS credits)

Organizing committee



Ekaterina Zvereva