

ДЕРЖАВНИЙ ЗАКЛАД  
«ЛУГАНСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ІМЕНІ ТАРАСА ШЕВЧЕНКА»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій  
Кафедра математики та інформатики

Козуб Владислав Юрійович

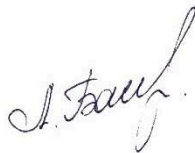
**ТЕПЛОФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛАСТОМЕРІВ**

кваліфікаційна робота  
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня  
освітньої програми «Фізика»  
за спеціальністю 014.08 «Середня освіта. Фізика»

Особистий підпис –



Науковий керівник –



Бондаренко Л.І., к.пед.н., доцент

Полтава – 2024

## АНОТАЦІЯ

Козуб В.Ю.

Тема: Теплофізичні властивості еластомерів

Спеціальність: 014.08 «Середня освіта (Фізика)».

Установа: ДЗ ЛНУ імені Тараса Шевченка, 2024 р.

Кваліфікаційна робота містить: 61 стор., 16 рис., 4 табл., 39 джерел.

Метою досліджень є створення ефективної моделі процесів деформування еластомерів з урахуванням реологічних та термопружних характеристик.

Об'єкт дослідження – елементи конструкцій з еластомерів та еластомерних композитів з урахуванням теплових ефектів.

Предмет дослідження – феноменологічні моделі та чисельні методи проектування конструкцій з урахуванням термосилового навантаження.

Результати роботи. Проведено аналіз підходів до вимірювання фізико-механічних характеристик еластомерних полімерів. Проведено побудову феноменологічних співвідношень для моделювання поведінки конструкцій з еластомерів та композитів на їх основі. Отримано тестові розрахунки параметрів термонапруженого стану та дисипативного розігріву суцільних тіл різної форми.

*Ключові слова:* термопружність, теплопровідність, температура, реологічні властивості, еластомер.

## **ABSTRACT**

Kozub V.Yu.

Master's qualification thesis: "Thermophysical properties of elastomers"

Specialty: 014.08 "Secondary education (Physics)".

Institution: Luhansk Taras Shevchenko National University, 2024

The qualification work contains: 61 pages, 16 figures, 4 tables, 39 sources.

The purpose of the research is to create an effective model of elastomer deformation processes taking into account rheological and thermoelastic characteristics.

The object of the study is structural elements made of elastomers and elastomeric composites, taking into account thermal effects.

The subject of the research is phenomenological models and numerical methods of designing structures taking into account thermoforce loading.

Work results. An analysis of approaches to measuring the physical and mechanical characteristics of elastomeric polymers was carried out. The construction of phenomenological ratios for modeling the behavior of structures made of elastomers and composites based on them was carried out. Test calculations of the parameters of the thermal stress state and dissipative heating of solid bodies of various shapes were obtained.

Key words: thermoelasticity, thermal conductivity, temperature, rheological properties, elastomer.

## ЗМІСТ

ВСТУП .....	5
РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЕЛАСТОМЕРІВ .....	7
РОЗДІЛ 2. РЕОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛАСТОМЕРІВ .....	12
2.1. Моделі урахування фізичної нелінійності наповнених гум .....	12
2.2. Експериментальні дослідження параметрів деформування гумових деталей.....	27
РОЗДІЛ 3. ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛАСТОМЕРНИХ ТА ШАРУВАТИХ ТІЛ.....	33
3.1. Дослідження амортизаторів складної форми для вібраційних машин.....	34
3.2. Аналіз деформування і довговічності віброізоляторів .....	41
ВИСНОВКИ.....	57
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	58

## ВСТУП

Серед величезної кількості полімерних матеріалів, що використовуються в різних галузях машинобудування, авто- та тракторобудування, вібраційної техніки, у будівництві, в енергетиці, в аерокосмічній і військовій техніці, еластomers та еластомерні композити займають особливе місце. Елементи конструкцій з таких матеріалів, як правило, працюють в умовах інтенсивного термосилового навантаження та супроводжуються ефектами як зворотної (термопружні), так і незворотної дії (розігрів внаслідок внутрішньої дисипації механічної енергії). Високі вимоги до надійності і економічності конструкцій, їх безвідмовної роботи ведуть до необхідності розгляду складних просторових задач термопружного деформування при наявності різноманітних супутніх факторів, що ускладнюють аналіз їх поведінки. В коливальних процесах спостерігаються різні форми проявів нелінійності й внутрішніх втрат: енергетичні витрати на підтримання самих коливань, наявність гістерезису, обмеженість амплітуди резонансних коливань, згасання вільних коливань, вібраційний розігрів тощо. За деяких умов, наприклад при резонансних коливаннях, дисипативний розігрів може досягати значного рівня.

Для опису поведінки матеріалу з урахуванням теплових ефектів проводиться дуже важливим є визначення фізико-механічних характеристик.

Метою досліджень є створення ефективної моделі процесів деформування еластомерів з урахуванням реологічних та термопружних характеристик.

Об'єкт дослідження — елементи конструкцій з еластомерів та еластомерних композитів з урахуванням теплових ефектів.

Предмет дослідження — феноменологічні моделі та чисельні методи проектування конструкцій з урахуванням термосилового навантаження.

Результати роботи. Проведено аналіз підходів до вимірювання фізико-механічних характеристик еластомерних полімерів. Проведено побудову феноменологічних співвідношень для моделювання поведінки конструкцій з еластомерів та композитів на їх основі. Отримано тестові розрахунки параметрів термонапруженого стану та дисипативного розігріву суцільних тіл різної форми.

У першому розділі проведено аналіз стану досліджень фізико-механічних властивостей еластомерних матеріалів.

У другому розділі на основі аналізу експериментальних даних визначено основні підходи до моделювання поведінки еластомерних конструкцій. Визначено основні феноменологічні теорії пружності та термопружності еластомерів та композитів.

У третьому розділі на основі розробленої методики отримано розв'язки тестових задач термопружності суцільних еластомерних амортизаторів та шаруватих тіл з еластомерними шарами. Отримано задовільне співпадіння результатів розв'язку з даними інших авторів.

## РОЗДІЛ 1. МЕТОДИ ВИЗНАЧЕННЯ ФІЗИКО-МЕХАНІЧНИХ ПАРАМЕТРІВ ЕЛАСТОМЕРІВ

Найбільш поширеними еластомерами, що використовуються в різних галузях промисловості, транспорті та будівництві являються гуми. В залежності від ступеню наповнення технічним вуглецем гуми поділяються на слабо наповнені та наповнені. Слабо наповнені гуми (наповнення технічним вуглецем 0-15 мас.ч.) широко використовуються в інженерній практиці для виготовлення віброізоляторів, пружних ланок, демпферів і т.д. Найбільший інтерес представляє одержання залежностей основних реологічних параметрів (модуля зсуву  $G$  і коефіцієнта дисипації  $\psi$ ) від частоти навантаження. На рис. 1.1 представлені такі залежності для гуми 51-1562 (наповнення технічним вуглецем 15 мас.ч.) при 293 К. Інтерес тут представляють релаксаційні піки на залежності  $\psi - \lg \omega$ ; їх природа пов'язана з особливістю структури еластомеру. Експеримент підтверджує дослідження Г.М. Бартенєва, Ю.В. Зеленєва [1, 2], виконані для різних полімерних матеріалів.

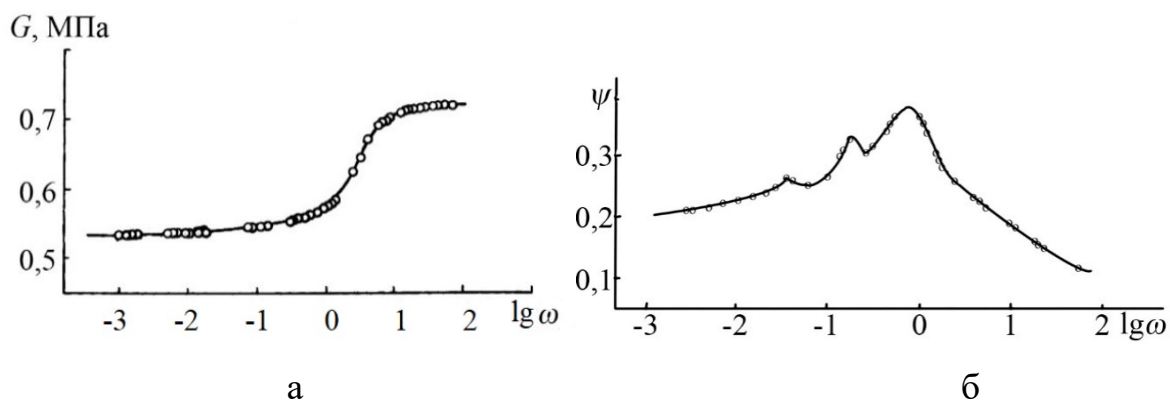


Рис. 1.1. Частотні залежності динамічного модуля зсуву (а) і коефіцієнта дисипації енергії (б) для гуми 51-1562

В даний час накопичений великий експериментальний і теоретичний матеріал по визначенню механічних і втомних властивостей гум і впливу на

них різних факторів: рецептури суміші (наповнення), режиму навантаження, температури і т.д. [5, 6, 7, 8].

Результати експериментальних досліджень свідчать про відмінності статичних і динамічних характеристик гум, про залежність властивостей від температури, частоти і амплітуди гармонійного навантаження, часу навантаження.

Зі збільшенням наповнення все виразніше проявляються ефекти фізичної нелінійності матеріалу у формі залежності модулів податливості і тангенса кута втрат від амплітуди деформації (напруження). Вони досить істотні вже для середньонаповнених гум на основі НК і СКІ-3. Зокрема, для цих гум в діапазоні амплітуд деформацій від 0,01 до 10% механічні характеристики змінюються більш ніж удвічі, що свідчить про істотність фізичної нелінійності.

Огляд експериментальних досліджень такої поведінки гумоподібних матеріалів наведений у [9]. Найважливішими особливостями поведінки матеріалу є посилення амплітудної залежності з ростом вмісту сажі, спадання модуля  $G'$  з ростом деформації, наявність максимуму для  $G''$  в області деформацій, де  $G'$  змінюється найшвидше, і, мабуть, існування граничних значень, як при низьких, так і при високих деформаціях. Другу і третю з цих особливостей прийнято називати ефектом Пейна [8].

Одна з особливостей розрахунку деталей з сажонаповнених гум полягає в тому, що залежність напруження - деформації для еластомеру істотно відрізняється від лінійного закону Гука. При циклічній деформації таких гум нелінійність добре визначається по петлях гістерезису і по зрушенню фаз синусоїдальних кривих деформація - навантаження, що реєструються відомими способами [5].

Лінійна ділянка експериментальної кривої залежності напружень та деформацій залежить від ступеня наповнення еластомеру, якості суміші; для



ненаповнених і слабонаповнених гум він зберігається в деяких випадках до 50, а для сильно наповнених до 1 ... 10% [5]. Цей факт говорить про те, що використання закону Гука при розрахунку високоеластичних конструкцій, які зазвичай виготовляються з сильнонаповнених еластомерів, вимагає певної обережності, так як може призвести до грубих помилок.

Проведені дослідження нелінійних ефектів у гумах з різним наповненням технічним вуглецем [4] показують, що на динамічні характеристики гумових деталей сильно впливає ступінь наповнення технічним вуглецем вихідного матеріалу. Для гум з малим наповненням (5 мас.ч.) коефіцієнт дисипації енергії і динамічний модуль практично не залежать від амплітуди деформації і статичного підтискання, зберігаючи деяке постійне значення. Зазначені залежності стають помітними для гум зі ступенем наповнення 15-20 мас.ч. (гума типу 67л). Для досліджуваних гум при наповненні 50 мас.ч. і більше зміна динамічних характеристик може становити приблизно 50% і цей факт не можна не враховувати при розрахунках і проектуванні конструкцій.

Нелінійність деформаційних властивостей гум проявляється і в області резонансних частот гармонійного навантаження, близьких до власної частоти коливань системи. Нелінійність виражається в аномальній (зі стрибком) залежності амплітуди  $u_0$  переміщення вимушених коливань від частоти  $\omega$ , що спостерігається замість симетричних відносно максимуму кривих для лінійних систем. Зазвичай нелінійні співвідношення  $\sigma$  -  $\varepsilon$  виражені кривими, увігнутими до осі напружень  $\sigma$  [6].

Амплітудно-залежні модулі  $G'$  и  $G''$ , найпростіше вимірювати, якщо в зразку реалізовано однорідне деформований стан.

В даний час практично відсутні дані про амплітудні залежності властивостей при складному напруженому стані або полігармонійному навантаженні, необхідні для розрахунку реальних віброізоляторів [3].

Параметри квазістатичних петель гістерезису доцільно використовувати для визначення реологічних параметрів в разі геометричної нелінійності і в «зоні подібності» для нелінійно спадкових матеріалів.

Чітко виражена фізична нелінійність наповнених гум, зростаюча у міру збільшення наповнення гуми технічним вуглецем, значно ускладнює математичний опис залежності «деформація - навантаження» для деталей, виконаних з сажонаповнених гум.

Як зазначено авторами робіт [4], технічні гуми при кімнатних і підвищених температурах відповідають області вискоеластичного стану, в якій практично нехтує мала залежність  $E'$  и  $E''$  від температури, однак добре виражена нелінійність властивостей як фізична (нелінійні співвідношення  $\sigma - \varepsilon$ ), так і геометрична (великі неоднорідні деформації). В області малих деформацій, що реалізуються при експлуатації багатьох видів, найбільш широко застосовуваних гумових виробів, для стаціонарних режимів можна знехтувати геометричною, але не фізичною нелінійністю. Вплив величини і виду деформації виявляється істотним, тому знайдені в лінійному наближенні характеристики є деякими ефективними величинами. Їх застосування для обробки експериментальних результатів корисно як при якісному розгляді загальних закономірностей механічної поведінки гум, так і для використання при розв'язанні нелінійних задач динамічного навантаження, наприклад, методом послідовних наближень (в якості першого наближення для розв'язку).

Щоб встановити закон повзучості (або релаксації), будують експериментальні криві повзучості  $\varepsilon \sim t$  або релаксації  $\sigma \sim t$  при різних рівнях напруження або деформацій (хоча б 2-3 рівня). Кожна точка, як правило, визначається як середнє арифметичне з 6-8 експериментів. Отримані експериментальні криві повзучості  $\varepsilon \sim t$  (або релаксації  $\sigma \sim t$ ) перебудовують в безрозмірних координатах щодо деформацій. При цьому всі деформації

відносять до початкової миттєвої деформації  $\varepsilon_0$ , (або напруження  $\sigma_0$ ) вимірюваних в момент часу  $t = 0$ . Аналогічно для кривих релаксації. Перебудовані таким чином експериментальні криві повзучості або релаксації, в лінійній області деформування збігаються (або укладаються в вузькі пучки, ширина яких обумовлена розкидом експерименту).

## РОЗДІЛ 2. РЕОЛОГІЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ЕЛАСТОМЕРІВ

### 2.1. Моделі урахування фізичної нелінійності наповнених гум

В даний час все більше застосування знаходять матеріали з яскраво вираженими в'язко-пружними властивостями (наповнені технічним вуглецем гуми, композити на основі полімерної матриці, чисті полімери та ін.). У зв'язку з цим для практики термомеханічного аналізу елементів конструкцій з таких матеріалів виникає необхідність комплексного опису основних особливостей нелінійної поведінки таких матеріалів при різних режимах навантаження та побудови моделей, ідентифікованих при спільному використанні даних доступного для практичної реалізації експерименту при квазістатичних і динамічних випробуваннях.

При побудові визначальних рівнянь  $\sigma - \varepsilon$  для опису деформації твердих тіл, найбільш простим і перспективним підходом, є використання принципу спадковості. У загальному вигляді нелінійне рівняння було виписано ще Вольтерра [11, 12] і являє собою нескінченний ряд кратних інтегралів виду

$$E \cdot \varepsilon = \sigma + \int_{-\infty}^t K_1(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_2(t-\tau) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 + \\ + \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^t K_3(t-\tau) \sigma(\tau_1) \sigma(\tau_2) \sigma(\tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 + \dots \quad (2.1)$$

Вибираючи досить велике число членів цього ряду, і визначивши будь-яким чином ядра, можна описати будь-який процес деформування з будь-якою точністю. Розвитку цього напрямку присвячено багато робіт. Основні зусилля спрямовуються на запровадження додаткових гіпотез: нестисливі, однакове поведінка при розтягуванні і стисненні і ін. Це дає можливість спростити ядра і скоротити число членів ряду. Однак очевидно, що використання кратних інтегралів і визначення великого числа ядер спадковості досить важко, тому роботи в цьому напрямку, як правило, є теоретичними.

У разі лінійної в'язкопружності при порівняно невеликих рівнях напружень часові співвідношення  $\varepsilon \sim \sigma \sim t$  лінійні, залежність податливості  $I(t) = \varepsilon(t)/\sigma$  не змінюється з ростом  $\sigma$  (криві співпадають), а ізохрони  $\sigma \sim \varepsilon$  лінійні. Інша картина спостерігається при нелінійній в'язкопружності.

Для більшості еластомерів область лінійності мала, і розглядати її потрібно з відомим наближенням. Подальший розвиток теорії деформування йде по шляху обліку фізичної нелінійності і складних шляхів навантаження матеріалу [6].

Для більш спрощеного опису фізичної нелінійності полімерних матеріалів використовуються залежності, що представляють собою окремі випадки рівняння (2.1) і містять лише один інтеграл. Такі спроби засновані на нелінійному принципі суперпозиції, узагальнюючому відомий принцип Больцмана-Вольтерра. Згідно з цим принципом:

$$d\varepsilon(t) = \sigma(t)f(t-\tau)d\tau, \quad (2.2)$$

де  $f(t-\tau)$  – ядро повзучості.

Для фізично нелінійного члена:

$$d\varepsilon(t) = f(\sigma(t), t-\tau)d\tau. \quad (2.3)$$

Вираз (3) відомо як принцип Больцмана-Персо [13], а йому відповідне нелінійне рівняння, має вигляд:

$$\varepsilon(t) = a\sigma + \int_0^t f[\sigma(\tau), t-\tau]d\tau.$$

У практичних розрахунках частіше використовуються наближені варіанти рівнянь нелінійної спадковості, запропоновані:

Лідерманом і Розовським [14, 15]:

$$\varepsilon(t) = \psi(t) + \int_0^t K(t-\tau) \psi[\sigma(\tau)] d\tau; \quad (2.4)$$

Ю.Н. Работновим [16]

$$\phi[\varepsilon(t)] = \sigma(\tau) + \int_0^t K(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau; \quad (2.5)$$

М.А. Колтуновим [17]

$$\phi[\varepsilon(t), \dot{\varepsilon}(t)] = f[\sigma(\tau), \dot{\sigma}(\tau)] + \int_0^t K(t-\tau) f[\sigma(\tau), \dot{\sigma}(\tau)] d\tau. \quad (2.6)$$

Суттєвим питання про вибір ядра спадковості. Відомо, що найбільш придатними є прості ядра зі слабкою особливістю в нулі, але вони, найчастіше, добре описують початкові ділянки кривих повзучості (або релаксації), але виявляються непридатними при великих часах. Це відбувається тому, що з плином часу все сильніше виявляється нелінійність.

Найбільш широке застосування в механіці еластомерів отримали:

ядро Ю.М. Работнова – дрібно-експоненціальна функція  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)$  виду [16]:

$$\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) = \chi(t-\tau)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\beta)^n (t-\tau)^{n(1+\alpha)}}{\Gamma[(n+1)(1+\alpha)]}, \quad (2.7)$$

$$(-1 < \alpha < 0, \quad \beta > 0)$$

ядро Абеля

$$R(\tau) = \frac{(t-\tau)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}, \quad (2.8)$$

ядро А.Р. Ржаніцина [18]

$$K(t - \tau) = A e^{-\beta(t-\tau)} (t - \tau)^{\alpha-1}, \quad (2.9)$$

ядро Колтунова [17]

$$R(t - \tau) = \frac{e^{-\beta(t-\tau)}}{t - \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\alpha)]^n}{\Gamma(\alpha n)} (t - \tau)^{\alpha n}, \quad (2.10)$$

ядро А.П. Бронського [16]

$$K(t - \tau) = \lambda \beta (1 - \alpha) (t - \tau)^{-\alpha} e^{\left[-\beta(t-\tau)^{1-\alpha}\right]}, \quad (2.11)$$

де  $-1 < \alpha < 0$ ;  $\beta > 0$ ;  $\chi > 0$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  – параметри ядер - реологічні параметри матеріалу.

Широкому застосуванню цих ядер сприяли створення практичних методів визначення їх параметрів за експериментальними даними.

Наведені ядра містять, як правило, три або чотири параметри, мають дробову ступінь часу, так як тільки в цьому випадку можливий опис експериментальних даних по релаксації напруження і повзучості з хорошим наближенням. Вибір відповідного ядра залежить від властивостей матеріалу. При цьому велику роль відіграють наступні фактори: явний вираз ядра релаксації для відповідного ядра повзучості, кількість параметрів ядер, які визначаються за експериментальними даними, наявність методик визначення цих параметрів, математична складність ядер, гнучкість аналітичних виразів при описі експериментів.

Успішному застосуванню дробово-експоненційних функцій  $\mathcal{E}_\alpha$  – Работнова (2.7) при дослідженні в'язкопружної поведінки реальних полімерів сприяло існування алгебри резольвентних операторів [12], наявність таблиць

$\mathcal{E}_\alpha$  – функцій [16], створення методики визначення параметрів  $\mathcal{E}_\alpha$  – функцій  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ , які є реологічними параметрами матеріалу при циклічному деформуванні гумових деталей [7]. Таблиці параметрів  $\mathcal{E}_\alpha$  – функції представлені в [5] для деяких еластомерів (наповнених і ненаповнених), використовуваних у вібраційній техніці.

Ядро (2.9) і його резольвента (2.10), а також інтеграли від цих функцій табульовані в [17] для досить широкого діапазону зміни параметрів  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\lambda_i$  та інтервалу часу  $t \geq 0,001$ .

Ядро Ржаніцина (2.9) широко застосовується в розрахунках деяких видів полімерів і бетону.

Для опису часових ефектів в сажонаповнених гумах часто використовується трипараметричне ядро Бронського - Слонімського, методика оцінки параметрів ядра і таблиці реологічних параметрів, використовуваних гум наведені в [19].

Для урахування нелінійності на практиці йдуть по шляху побудови більш складних ядер, зберігаючи лінійною форму спадкових рівнянь. Спрощення ядра нелінійного інтегрального рівняння істотно розширює його застосування в розрахунках, а також процедуру визначення його параметрів. Найчастіше нелінійність вводять лише за рахунок уточнення положення миттєвої кривої деформування.

Перехід від лінійного рівняння до нелінійного може бути здійснений одним з відомих способів - рівняння Работнова [16], Лідерман-Розовського-Персо [14], Колтунова, [17], Шепері[20] та ін.

Для знаходження необхідних параметрів використовуваних ядер, а також для побудови кривої миттєвого навантаження і встановлення ступеня нелінійності, досліджуваних матеріалів використовуються сімейство ізохронних кривих повзучості (або релаксації) з урахуванням нелінійності матеріалу.

Можливі три типи ізохронних кривих:



1. Криві не подібні між собою і кожна з них описується своєю функцією  $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ ;
2. Криві подібні між собою та описуються однією функцією  $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ , за винятком кривої миттєвої деформації  $t = 0$ , що описується функцією  $\sigma = \varphi_0(\varepsilon)$ ;
3. Всі криві для будь-якого моменту часу  $t \geq 0$  взаємоподібні; такі криві описуються однією функцією  $\sigma = \varphi(\varepsilon)$ .

Якщо криві податливості не збігаються, а криві повзучості подібні, то в'язкопружні властивості матеріалу описуються співвідношенням (2.4) [14, 15].

В цьому випадку можна підібрати такі числа  $\psi(\sigma_0)$ , що криві

$$\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon_k(t)}{\psi(\sigma_0)}$$

співпадуть в межах експериментального довірчого інтервалу.

Послідовність таких розрахунків докладно представлені в [17].

Якщо криві піддатливості не збігаються і криві повзучості не подібні, а ізохронні криві, тобто криві  $\sigma \sim \varepsilon$  при різних  $t = t_k = \text{const}$ , побудовані за даними кривих повзучості, подібні, то для опису процесу деформування такого матеріалу застосовують рівняння Работнова (2.5).

У разі повзучості при  $\sigma(t) = \sigma_k = \text{const}$  рівняння (2.5) буде мати вигляд:

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma_k \left[ 1 + \int_0^t K(t - \tau) d\tau \right] = \sigma_k f(t). \quad (2.12)$$

Рівняння (2.12) показує, що ізохронні криві повзучості подібні, причому функція  $f(t)$  дає коефіцієнти подібності при фіксованих  $t$ .

Тут  $\varphi(\varepsilon)$  – апроксимації кривої  $\sigma \sim \varepsilon$  миттєвого деформування або ізохронна крива  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$  при  $t = 0$ .

Підхід (модель) Работнова полягає в тому, що з напруженням зв'язується лінійним інтегральним рівнянням не сама деформація, а нелінійна функція

деформації (2.5). Урахування нелінійності в рамках такого підходу здійснюється введенням кривої миттєвого деформування, а навантаження визначають величину «сповзання» з неї.

В якості ядра рекомендується використовувати  $\mathcal{E}_\alpha$  – функції Работнова [21].

Слід зазначити, що використання рівнянь (2.5) і (2.6) для опису нелінійної повзучості передбачає наявність і нелінійної пружності  $\varepsilon = f(\sigma)$  при  $t \rightarrow 0$  [22, 23, 24]:

$$\sigma = (1 - K^*)f(\varepsilon) \quad (2.13)$$

$$\varepsilon = (1 + K^*)F(\sigma) \quad (2.14)$$

При гармонійному деформуванні за законом  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$  рівняння лінійної в'язкопружності:

$$\sigma(t) = E \left[ \varepsilon(t) - \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right], \quad (2.15)$$

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) - \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \quad (2.16)$$

де  $E$  – модуль пружності матеріалу;

$\varepsilon(t)$  и  $\sigma(t)$  – деформація та напруження в момент часу  $t$ ;

$t$  – час спостереження;

$\tau$  – час, що передує моменту спостереження;

$K(t - \tau)$  та  $R(t - \tau)$  – ядра релаксації і повзучості, які відповідно,

перетворюються до вигляду:

$$\begin{aligned}\sigma(t) &= E_0 \varepsilon_0 \left[ \sin \omega t - \int_0^t K(t-\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= E_0 \varepsilon_0 \left[ (1 - A(\omega)) \sin \omega t + B(\omega) \cos \omega t \right];\end{aligned}\quad (2.17)$$

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ \sin \omega t + \int_0^t R(t-\tau) \sin \omega \tau d\tau \right] = \\ &= \frac{\sigma_0}{E_0} \left[ (1 - A_1(\omega)) \sin \omega t + B_1(\omega) \cos \omega t \right],\end{aligned}\quad (2.18)$$

де  $A(\omega) = \int_0^\infty K(z) \cos \omega z dz$  – косинус-перетворення Фур'є ядра релаксації;

$B(\omega) = \int_0^\infty K(z) \sin \omega z dz$  – синус перетворення Фур'є ядра релаксації;

$A_1 = \int_0^\infty R(z) \cos \omega z dz$  – косинус перетворення Фур'є резольвенти;

$B_1 = \int_0^\infty R(z) \sin \omega z dz$  – синус перетворення Фур'є резольвенти.

Приймаємо в якості ядра релаксації дробово-експонентну функцію Работнова (2.7) з параметрами, що задовольняють вимогам

$$-1 < \alpha < 0, \quad \beta = t_0^{-(1+\alpha)},$$

$$\chi = \frac{\lambda}{t_0^{1+\alpha}}, \quad \lambda = \frac{E_0 - E_\infty}{E_0},$$

$$\text{або} \quad \lambda = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0}. \quad (2.19)$$

$\alpha, \beta, \lambda$  – параметри ядра, що є реологічними параметрами матеріалу і мають конкретний фізичний зміст:

$t_0$  – час релаксації;

$\lambda$  – дефект модуля;

$\chi = \lambda \cdot \beta$  – узагальнений час релаксації;

$\alpha$  – параметр дробу, явно виражається через максимальне значення спектра  $\rho_{max}$  и дефект модуля  $\lambda$

$$\alpha = -1 + \frac{4}{3} \pi^{-1} \operatorname{arctg} \left( 2 \pi \rho_{max} \lambda^{-1} \right); \quad (2.20)$$

$\Gamma(\dots)$  – гамма-функція заданого параметра;

$E_0$  и  $G_0$  – миттєві модулі пружності і зсуву матеріалу;

$E_\infty$  и  $G_\infty$  – усталені значення модуля пружності і модуля зсуву, що визначаються як:

$$E_\infty = \lim_{\omega \rightarrow 0} E(\omega), G = \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega),$$

Тоді косинус та синус перетворення Фур'є обчислюють за такими аналітичним залежностями:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= \frac{\chi \left( \omega^{1+\alpha} \cos \delta + \beta \right)}{\omega^2 + 2\beta \omega^{(1+\alpha)} \cos \beta + \beta^2}, \\ B(\omega) &= \frac{\chi \left( \omega^{1+\alpha} \sin \delta \right)}{\omega^2 + 2\beta \omega^{(1+\alpha)} \cos \beta + \beta^2}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Синус і косинус перетворення Фур'є ядра Ржаницина [25] мають вираз:

$$A(\omega) = \frac{A\Gamma(\alpha)}{\left( \omega^2 + \beta^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}}} \cos \left( \alpha \operatorname{arctg} \frac{\omega}{\beta} \right),$$

$$B(\omega) = \frac{A\Gamma(\alpha)}{(\omega^2 + \beta^2)^{\frac{\alpha}{2}}} \sin\left(\alpha \arctg \frac{\omega}{\beta}\right), \quad (2.22)$$

де  $A, \alpha, \beta$  – параметри ядра,  $-1 < \alpha < 0, \beta > 0$ ;  $t$  – час.

Параметр  $\beta$  має розмірність  $c^{-1}$ ,  $A$  та  $\alpha$  – безрозмірні величини.

Аналітична форма інтегральних перетворенні ядра (2.11) відсутня. При цьому синус- і косинус-перетворення  $A(\omega)$  та  $B(\omega)$  ядра (2.11) можна отримати на основі рівномірних апроксимацій, використовуючи формули [5].

При гармонійному навантаженні можна користуватися комплексним поданням модулів:

$$G^* = G' + iG'', \quad E^* = E' + iE'' \quad (2.23)$$

де  $G', E'$  – динамічні модулі, що характеризують пружні властивості гуми;

$G'', E''$  – модулі втрат, що характеризують дисипативні властивості гуми.

Результати експериментальних вимірювань реакції гуми на механічний вплив можуть бути виражені через будь-які складові цих функцій і перераховані наступним чином [26]:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \frac{G''}{G'}; & G' &= |G^*| \cos \delta; \\ G'' &= |G^*| \sin \delta; & |G^*| &= \sqrt{G'^2 + G''^2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Визначивши величини синус і косинус перетворень Фур'є  $A(\omega)$  и  $B(\omega)$ , можна знайти всі динамічні характеристики гуми з співвідношень [5]:

$$\begin{aligned} G''(\omega) &= G_0 B(\omega); & G'(\omega) &= G_0 [1 - A(\omega)]; \\ \operatorname{tg} \delta(\omega) &= \frac{G''(\omega)}{G'} = \frac{B(\omega)}{1 - A(\omega)}; & \psi &= 2\pi \operatorname{tg}[B(\omega)]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Правомірність опису динаміки механічної поведінки гум в нелінійній області за допомогою лінійної моделі гармонійного осцилятора показана в [27].

$G'$  та  $\operatorname{tg}\delta$  розраховують за даними експерименту за умови відсутності спотворень форми синусоїдальних сигналів сили і зміщення або еліпса втрат, які спостерігаються на екрані електронного осцилографа, а про нелінійність судять по залежності динамічних функцій від амплітуди деформацій.

Як правило, аналіз динамічних характеристик в разі нелінійної реакції гуми показує, що основні нелінійні ефекти, такі як відмінність петлі гістерезису від еліптичної форми, залежність дійсної складової модуля і тангенса кута втрат від амплітуди деформацій і амплітудна залежність  $G'$  та  $\operatorname{tg}\delta$ , тим сильніше виражені, чим вище твердість гуми (чим вище сажонаповненість).

Нелінійна поведінка сажонаповнених гум вносить поправку в  $\operatorname{tg}\delta(\omega)$  або  $\psi(\omega)$ , значно ускладнюючи їх визначення.

Для їх визначення можна використовувати співвідношення, отримані І.І. Крушем [5] і розвинені в роботах [7, 19, 28] при обробці експериментальних даних для сажонаповнених гум.

При цьому використовують рівняння (2.5) описується нелінійну реакцію гуми у вигляді:

$$\varepsilon(t) = G_0^{-1} K(t) f[\sigma(t)], \quad f[\sigma(t)] = \sigma(t) + \mu \sigma^2(t), \quad (2.26)$$

де  $K(t)$  – часова функція (функція повзучості);

$\mu$  – коефіцієнт нелінійності.

Застосувавши метод Гальоркіна при деформації  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sin \omega t$ , можна отримати систему рівнянь виду [5, 19]:

$$\begin{aligned}\sigma_0(1-A) &= \sigma_1 \left[ 1 + 0,75\mu(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right], \\ \sigma_0 B &= \sigma_2 \left[ 1 + 0,75\mu(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \right],\end{aligned}\tag{2.27}$$

де  $\sigma_0 = G_0 \cdot \varepsilon_0$ ;

$\sigma_1, \sigma_2$  – амплітуди складових прикладеної напруженні, при цьому  $\sigma_1$  збігаються з напрямом деформації,  $\sigma_2$  – перпендикулярні напрямку.

Коефіцієнт дисипації енергії  $\psi(\omega)$ , динамічний модуль  $G$  і параметр  $\lambda$  [19] визначають зі співвідношень:

$$\begin{aligned}\psi(\omega) &= \frac{\psi_0 \sigma_0}{1 + 0,75\mu\sigma_1^2}, \\ \lambda &= \frac{\operatorname{tg} \delta(\omega)}{B(\omega) - \operatorname{tg} \delta(\omega) A(\omega)}, \\ G(\omega) &= \frac{G_0}{\sqrt{(1 + \lambda A(\omega))^2 + \lambda^2 B^2(\omega)}}.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Надійність таких оцінок визначається ступенем відповідності отриманих розрахункових значень механічних характеристик експериментальним.

Досвід показує [5, 6, 19, 29], що істотний вплив на реологічні властивості всіх матеріалів надає температура.

Розв'язання конкретних задач з урахуванням останнього в загальному випадку досить важко. Щоб обійти ці труднощі, необхідно або вводити в програму розрахунку вид ядра повзучості або релаксації при різних температурах, або використовувати поняття термореологічно простих тіл, для яких вплив температури на реологічні властивості враховується шляхом введення в звичайні пружно-спадкові співвідношення типу (2.15), (2.16 )

модифікованого часу  $t'$  (принцип температурно-часової аналогії [26]). В даній роботі прийнятний другий метод.

Наведений час або псевдочас  $t'$  при різних постійних температурах  $T$  вводить як:

$$t' = a_T(T) \cdot t, \quad (2.29)$$

де  $a_T(T)$  – функція температури або коефіцієнт температурно-часового зсуву, коефіцієнт редукції;

$t$  – час спостереження.

Коефіцієнт температурного зсуву вибирається таким чином, що  $a_T(T_0) = 1$ , де  $T_0$  – деяка базова температура приведення. Для нестационарних температурних полів умовний час визначається як інтеграл від добутку функції температури на диференціал істинного часу.

Якщо для даного матеріалу температурно-часова аналогія має місце, тобто відома функція  $a_T(T)$  в деякому інтервалі температур, то рівняння (2.15), (2.16) після заміни часу  $t$  на  $t'$  зовні не змінюються, а насправді будуть відображати сильний вплив температури. Основним обмеженням застосування принципу ТЧА є вимога незмінності матеріалу і природи релаксацийних процесів в області, де проводиться приведення. Так, для еластомерів неможлива пряма суперпозиція спектрів, отриманих до і після старіння і кристалізації [30]. вид функції  $a_T(T)$  визначається з експерименту.

Для апроксимації коефіцієнта  $a_T(T)$  запропоновано кілька формул. Найбільш вживана залежність прийнята у вигляді рівняння Вільямса-Ланделла-Феррі [26]:

$$\lg a_T = -\frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + (T - T_0)} \quad (2.30)$$



де  $C_1$  и  $C_2$  – емпіричні коефіцієнти, що залежать від вибору  $T_s$ ;

$T_s$  – приведена температура.

Для практичних цілей за базову температуру приведення зручно приймати температуру лабораторних випробувань [16]  $T_s = 20^\circ\text{C}$ , де  $a_T = 1$ . В якості першого наближення для більшості гумоподібних матеріалів в [26] прийняті значення  $C_1 = 8,86$ ;  $C_2 = 101^\circ\text{C}$ , що отримали назву універсальних коефіцієнтів приведення. Межі застосування температурно-часової аналогії (ТЧА) залежать від типу еластомеру (гуми). В роботах [31, 32] обґрунтовано можливість використання універсальних параметрів приведення для гум, що містять до 30 мас.ч. техвуглецю, при цьому температура приведення  $T_s$  в (2.30) визначається як  $T_s = T_c + 50^\circ = 252\text{ K}$ , де  $T_c$  – температура склування гуми. Тут же показана можливість використання ТЧА динамічних функцій наповнених технічним вуглецем гум в нелінійній області, для якої сформульовано додатковий критерій застосовності приведення - сумісності ізотерм амплітудних залежностей динамічних функцій гум (модуль зсуву  $G'$  і тангенс кута механічних втрат  $\tan\delta$ ). Максимальна амплітуда деформацій, при якій можливе приведення, залежить від твердості гуми і досягає 0,02 для будь-яких гум (до  $H = 80$  ед. по Шору А.); 0,1 для середньонаповнених гум ( $H = 50$  мас.ч.) і 0,13 для малонаповнених гум. Показано, що для гум, що містять до 30 мас.ч. сажі ТЧА здійснюється з універсальними параметрами приведення.

З урахуванням викладеного, якщо повзучість або релаксація описуються рівняннями (2.15), (2.16) з дробово-експоненціальним ядром  $\mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau)$  Работнова, наприклад,

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[ \sigma(t) + \chi \int_0^t \mathcal{E}_\alpha(-\beta, t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \quad (2.31)$$

то, при сталій температурі  $T_0 = a_T(T)$ , та відомій функції  $a_T(T)$ , для якої  $a_T(T_0) = 1$  значення реологічних параметрів  $\chi$  та  $\beta$  при температурі приведення  $T_0$  були рівні відповідно  $\chi_0$  та  $\beta_0$ , з самого визначення дрібно-експоненційної функції (2.19) безпосередньо впливає, що при довільній температурі  $T$  параметри ядра будуть перераховуватися за формулами [16]:

$$\chi = \chi_0 a_T^{1-\alpha}, \quad \beta = \beta_0 a_T^{1-\alpha}, \quad (-1 < \alpha < 0) \quad (2.32)$$

Якщо  $a_T$  апроксимується залежністю (2.30), то для параметрів ядра Работнова вирази (2.32) будуть мати наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \chi(T) &= \chi_0 10^{\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+T-T_0}(1+\alpha)}, \\ \beta(T) &= \beta_0 10^{\frac{C_1(T-T_0)}{C_2+T-T_0}(1+\alpha)} \end{aligned} \quad (2.33)$$

Аналогічно можна отримати залежності параметрів ядра Ржаніціна (2.9) від температури [17]

$$\begin{aligned} A &= A_0 a_T^\alpha, \\ \beta &= \beta_0 a_T, \end{aligned} \quad (2.34)$$

де параметр  $\alpha$  не залежить від температури.

Таким чином, проводячи експерименти на повзучість (релаксацію) при різних значеннях температури, постійних в кожному експерименті і змінних від експерименту до експерименту, можна відповідно до методик [7, 17] визначити параметри ядер (2.7) і (2.10) в залежності від температури.

Адекватно впливу температури на в'язкопружні властивості еластомерів відповідає і зміна частоти навантаження. Така адекватність була предметом

численних досліджень. Особливим напрямком дослідження є вивчення взаємного впливу залежностей в'язкопружних характеристик від частоти та температури. Це явище отримало назву температурно-часової (частотної) аналогії і пояснено в рамках теорії так званого термореологічно простої поведінки матеріалу [26]. Відповідно до цієї теорії, ізотермічні і неізотермічні характеристики співвідносяться наступним чином

$$\begin{aligned} G'(\omega, T) &= \frac{T\rho}{T_0\rho_0} G'(\omega a_T, T_0); \\ G''(\omega, T) &= \frac{T\rho}{T_0\rho_0} G''(\omega a_T, T_0), \end{aligned} \quad (2.35)$$

де  $\rho$  та  $\rho_0$  – густина полімеру при абсолютних температурах  $T$  та  $T_0$  відповідно;  $G'$  и  $G''$  – складові комплексного модуля зсуву  $\tilde{G} = G'(\omega, T) + iG''(\omega, T)$ ,  $a_T$  – коефіцієнт температурного приведення, який визначається за формулою (2.30).

У роботах [27, 33] наведено методики визначення коефіцієнтів температурного зсуву  $a_T$  за експериментальними даними, а також основні вимоги, що пред'являються до проведення таких експериментів.

## **2.2. Експериментальні дослідження параметрів деформування гумових деталей.**

Дослідженням підлягали гумометалеві елементи типу БРМ 101, виконані з гуми на основі СКІ-3 з різним наповненням технічного вуглецю: від 5 до 75 мас.ч. Вимірювалися такі механічні характеристики: умовно-рівноважний і динамічний модулі зсуву, коефіцієнт дисипації енергії. Виміри проводилися відповідно до методик [7, 16, 17] з використанням стандартної тензовимірювальної апаратури [5]. Найбільш характерні результати

вимірювань при температурі навколишнього середовища 20 °С наведено на рис. 2.2 – рис. 2.6.

Похибка вимірювань при динамічному навантаженні згідно з прийнятою методикою не перевищувала (з ймовірністю 0,95) 5-10%, при статичному навантаженні з тією ж ймовірністю вона не перевищувала 3-5%.

Отримані дані підтверджують той висновок, що пружні і демпфуючі характеристики гумових деталей суттєво залежать від ступеня наповнення гуми технічним вуглецем. Ця залежність, як видно з графіків, виражається в монотонному зростанні всіх виміряних величин при збільшенні ступеня наповнення. Характер і швидкість росту модулів зсуву трохи різні на двох ділянках: при наповненні менше 20 мас.ч. зростання виражене слабо і носить лінійний характер, для наповнення більше 20 мас.ч. зростання стає практично нелінійним.

У дослідженнях використовувалося ядро Работнова (2.7). Параметри ядра є реологічними характеристиками матеріалу, мають конкретний фізичний зміст. Відповідно до методики [7, 34] реологічні параметри  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  для гум мають наступний зміст:  $\alpha$  – параметр дробу функції (2.7), явно виражається через параметри спектра часів релаксації і дозволяє враховувати

його розмитість; параметр  $\beta = \frac{1}{t_0^{1+\alpha}}$ , де  $t_0$  – найбільш «вагомий» час

релаксації;  $\chi = \lambda\beta = \frac{G_0 - G_\infty}{G_0} \frac{1}{t_0^{1+\alpha}}$  – узагальнений час релаксації ( $G_0$  – миттєве

значення модуля, а  $G_\infty$  – умовно-рівноважне значення модуля зсуву).

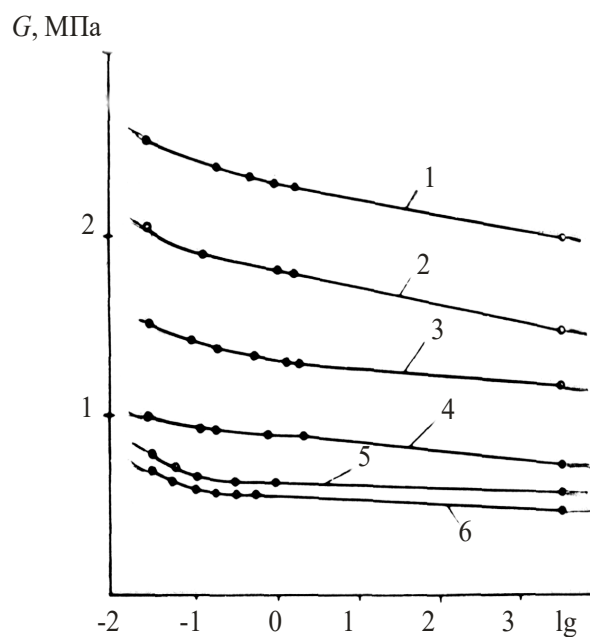


Рис. 2.2. Криві релаксації гум з різним наповненням технічним вуглецем: 1 – наповнення 75 мас.ч.; 2 – 60 мас.ч.; 3 – 45 мас.ч.; 4 – 30 мас.ч.; 5 – 15 мас.ч.; 6 – 5 мас.ч.

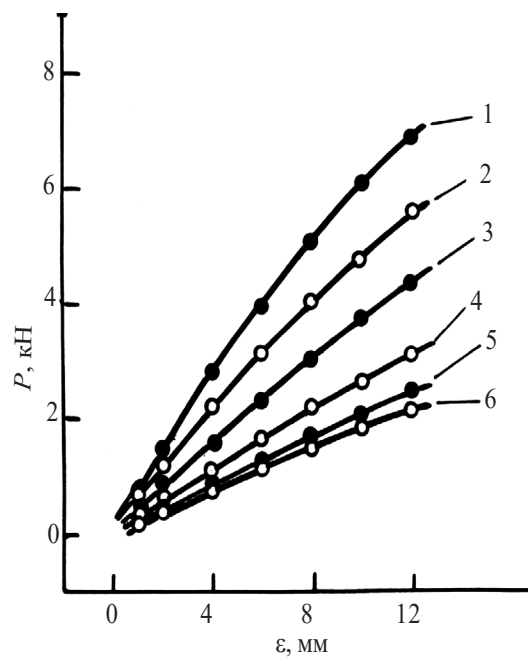


Рис. 2.3. Залежність сили зрушення  $P$  від зміщення зрушення: 1 – наповнення 75 мас.ч.; 2 – 60 мас.ч.; 3 – 45 мас.ч.; 4 – 30 мас.ч.; 5 – 15 мас.ч.; 6 – 5 мас.ч.

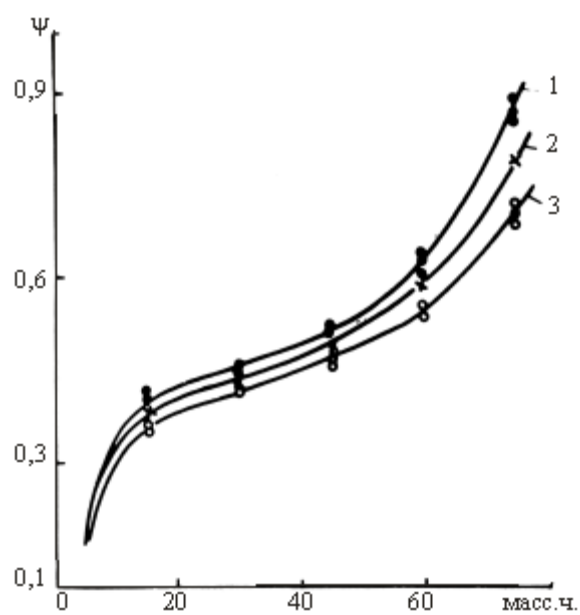
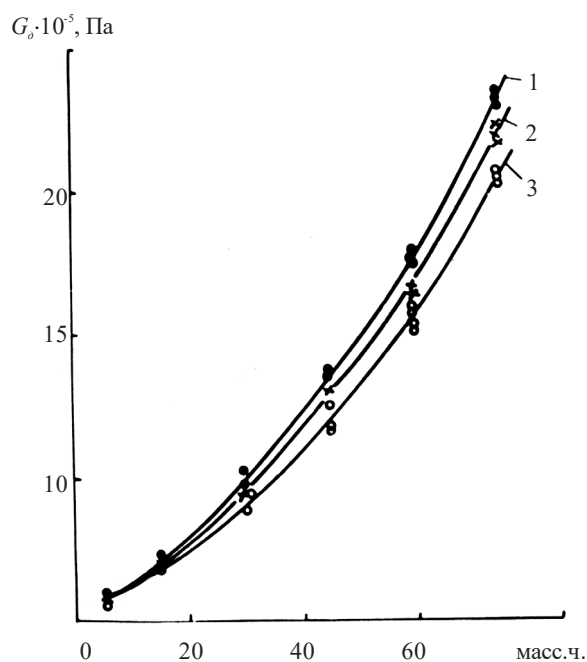


Рис. 2.4. Залежність динамічного модуля від міри наповнення технічним вуглецем: 1 –  $A = 2$  мм; 2 –  $A = 4$  мм; 3 –  $A = 6$  мм

Рис. 2.5. Залежність коефіцієнта дисипації енергії від міри наповнення технічним вуглецем: 1 –  $A = 2$  мм; 2 –  $A = 4$  мм; 3 –  $A = 6$  мм

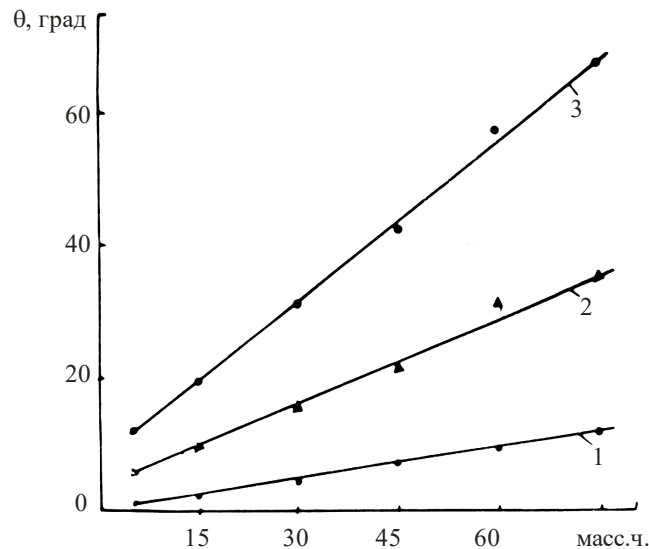


Рис. 2.6. Залежність збільшення температури в гумових деталях від ступеня наповнення технічним вуглецем: 1 –  $A = 2$  мм; 2 –  $A = 4$  мм; 3 –  $A = 6$  мм

Реологічні параметри  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$  іх гум з різним наповненням, отримані за методикою [34], наведені в табл. 2.1. Значення  $G_p(\omega)$  та  $\psi_p(\omega)$ , отримані розрахунковим шляхом по реологічним параметрам  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ ,  $\chi$  та експериментальні значення  $G_{\text{екс}}(\omega)$  та  $\psi_{\text{екс}}(\omega)$  для гум з наповненням 45 і 60 мас.ч. наведені в табл. 2.2.

Ступінь відповідності розрахункових значень  $G$  та  $\psi$  експериментально оцінювалася за значеннями середньоквадратичних залишкових відхилень  $S_G$  та  $S_\psi$ , що визначаються за формулами

$$S_G = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (G_p - G_y)^2}{N-1}} \quad S_\psi = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\psi_p - \psi_y)^2}{N-1}} \quad (2.54)$$

Значення  $S_G$  та  $S_\psi$  наведені в табл. 2.3.

Таблиця 2.1

Результати динамічних і квазістатичних випробувань елементів типу БРМ101 з різним наповненням технічним вуглецем.

Наповнення технічним вуглецем, масових частин	$G_0$ , МПа	$G_d$ , МПа	$G_\infty$ , МПа	$\alpha$	$\beta$	$\lambda$
5	0,720	0,578	0,445	-0,857	1,719	0,382
15	0,750	0,656	0,577	-0,456	8,722	0,231
30	1,000	0,883	0,687	-0,310	15,100	0,313
45	1,500	1,283	1,182	-0,148	23,174	0,212
60	2,100	1,670	1,464	-0,100	34,800	0,303
75	2,600	2,356	1,957	-0,015	45,960	0,231

Таблиця 2.2

Розрахункові значення динамічного модуля і коефіцієнта дисипації

Частота, Гц	Наповнення (масових частин)							
	45				60			
	$G_p$ , МПа	$G_{\text{екс}}$ , МПа	$\Psi_p$	$\Psi_{\text{екс}}$	$G_p$ , МПа	$G_{\text{екс}}$ , МПа	$\Psi_p$	$\Psi_{\text{екс}}$
0,500	1,194	-	0,139	-	1,512	-	0,248	-
1,000	1,207	-	0,235	-	1,552	-	0,374	-
2,000	1,237	-	0,368	-	1,621	-	0,518	-
4,500	1,303	1,242	0,508	0,485	1,743	1,641	0,632	0,615
6,000	1,334	-	0,528	-	1,793	-	0,638	-
7,600	1,360	1,259	0,522	0,476	1,833	1,669	0,627	0,609
11,100	1,399	1,283	0,482	0,482	1,894	1,684	0,582	0,582

12,000	1,406	-	0,470	-	1,905	-	0,569	-
14,300	1,421	1,288	0,439	0,437	1,930	1,689	0,538	0,599
16,000	1,430	-	0,417	-	1,944	-	0,517	-
18,300	1,439	-	0,390	-	1,960	-	0,489	-
20,000	1,445	1,319	0,372	0,444	1,970	1,697	0,471	0,600
22,000	1,450	-	0,352	-	1,980	-	0,451	-

Таблиця 2.3

Середньоквадратична помилка%	Наповнення, мас.ч.					
	5	15	30	45	60	75
$S_G$	0,8	1,0	2,0	11,0	21,0	18,0
$S_\psi$	4,0	4,5	4,7	4,0	6,5	8,2



### РОЗДІЛ 3. ТЕРМОПРУЖНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ЕЛАСТОМЕРНИХ ТА ШАРУВАТИХ ТІЛ

Проблема захисту операторів, машин, приладів, обладнання, будівель та споруд від впливу вібрації та звукового тиску залишається актуальною.

Це особливо важливо для складної технічної системи, такої як підприємство гірничодобувної промисловості, в якій важке обладнання встановлюється в певній послідовності відповідно до технологічних вимог, і досить часто машини встановлюються в тривимірному просторі, наприклад, крани можуть бути розміщені на стелях близько 18 м тощо [34].

При цьому вібронавантажувальне гірниче обладнання є досить значним, а частотний спектр включає весь діапазон від низького до високого. Вібрації часто є випадковим білим шумом і до першого наближення можна вважати квазігармонійним. Вищі частоти, як правило, приглушуються демпфуючими смугами, чим вище частота вібрації, тим легше вона приглушується. Для приглушення низьких частот потрібно використовувати спеціальні системи віброізоляції.

Зазвичай для цього використовують ізолятори вібрації, демпфери та динамічні демпфери тощо, які розташовані між машиною та рамою (опорна конструкція фундаменту).

Багаторічний досвід експлуатації різних машин розробив тенденцію до вібрації важкої техніки в гірничій та будівельній галузях, гумові елементи віддають перевагу перед сталевими пружинами та іншими типами вібраційних ізоляторів. Гума через високу поглинальну здатність, довговічність, надійність (у гумових елементах відсутній випадковий збій) майже не має рівних серед інших матеріалів (металу, деревини, пластику тощо) [11].

В пружних елементах типу АР, як і у будь-яких гумових амортизаторах, при тривалому циклічному навантаженні відбувається саморозігрів до певної

температури, яка залежить від властивостей гуми, амплітуди і частоти деформування та температури навколишнього середовища. Експериментальні дані по саморозігріву амортизаторів важливо враховувати при застосуванні їх в вібраційних машинах, оскільки максимальна температура гумового масиву ні в якій його точці не повинна перевищувати температури, при якій відбувається термодеструкція гуми

### 3.1. Дослідження амортизаторів складної форми для вібраційних машин

Розглядаються гумові деталі типу АР (амортизатор гумовий) (рис. 3.1, рис. 3.2) зі складною формою вільної поверхні. Така форма дозволяє при необхідній несучій здатності отримувати малу жорсткість на зсув, а також запобігати значний саморозігрів пружних опор при роботі в екстремальних умовах. Деталі, **що** призначені для використання в вібраційних машинах у якості віброізоляторів і елементів пружної підвіски, в процесі експлуатації зазнають деформації стиску від ваги машини і деформації стиску із зсувом від вимушених коливань приводу. Розроблено різні типи амортизаторів АР з гум серійних і дослідних марок. Геометричні розміри досліджуваних деталей наведено нижче у табл. 3.1.

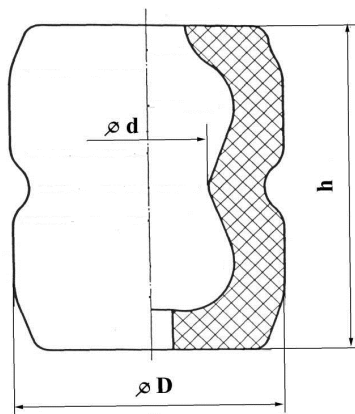
Фізико-механічні характеристики матеріалу:

для гуми 15.1711 миттєвий, динамічний та умовно-рівноважний модулі зсуву  $G_0=1,3\text{МПа}$ ,  $G_d=1,02\text{МПа}$ ,  $G_\infty=0,71\text{МПа}$ ; коефіцієнт дисипації  $\psi=0,25$ , реологічні параметри  $\alpha=-0,60$ ;  $\beta=2,405$ ;  $\lambda=0,454$ ;

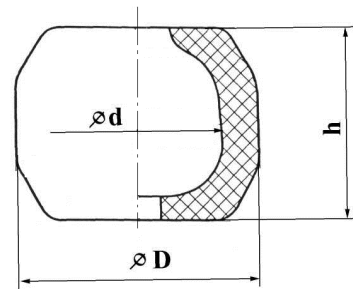
для гуми 15.1714 миттєвий, динамічний та умовно-рівноважний модулі зсуву  $G_0=2,0\text{МПа}$ ,  $G_d=1,40\text{МПа}$ ,  $G_\infty=1,10\text{МПа}$ ; коефіцієнт дисипації  $\psi=0,35$ , реологічні параметри  $\alpha=-0,60$ ;  $\beta=2,082$ ;  $\lambda=0,45$ ;

Таблиця 3.1

Тип елемента	Діаметр D, мм	Діаметр d, мм	Висота H, мм
AP103	120	72	148
BP201.1	100	70	80
BP201.2	100	76	80



а)



б)

Рис. 3.1. Схеми віброізоляторів: а) AP103; б) BP201

Властивості амортизаторів при статичних деформаціях визначаються залежністю сила-осадка. Оскільки гуми мають помітну в'язкість, то можливі різні варіанти отримання кривих сила-осадка в залежності від характеру урахування в'язкості.

В даній роботі для визначення фізико-механічних властивостей гум використовувався східчастий квазістатичний вид навантаження: зразок навантажувався до осадки  $\Delta_1$ , після витримки під навантаженням 1 годину знімалося значення сили  $P_1$ , потім (без розвантаження) зразок навантажувався до осадки  $\Delta_2 > \Delta_1$  знову слідувала витримка під навантаженням 1 годину;

знімалося значення сили  $P_2$  і т.д. Результати випробувань елементів АР103 з гуми 51-1714 і 51-1711 наведено на рис. 3.2. Зразки при деформації розташовувалися між двома горизонтальними металевими поверхнями. Результати випробувань елемента ВР201 з гуми 51-1714 представлено на рис. 3.3. При деформації елемент розміщувався між двома металевими поверхнями, причому верхня поверхня мала можливість нахилу (зусилля передавалось через шарнірне з'єднання динамометра). Як видно з графіку на рис. 3.3, при осадці 15 ... 35 мм кут нахилу кривої практично дорівнює нулю. Це відбувалося тому, що при зазначених деформаціях елемент втрачав вертикальну стійкість (верхня поверхня нахилялася). При подальшому збільшенні навантаження стійкість елемента відновлювалася.

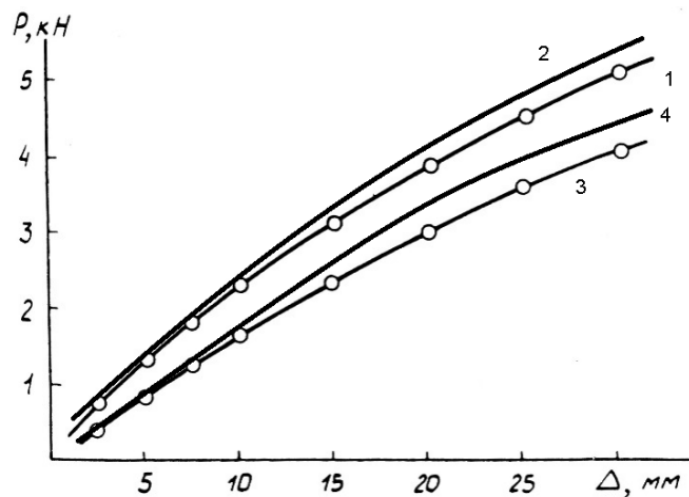


Рис. 3.2. Залежність сили  $P$  від осадки  $\Delta$  для елементів АР103. Гума марки 51 - 1714: 1- експериментальні дані; 2 – чисельний розв'язок; гума марки 51-1711: 3- експериментальні дані; 4 – чисельний розв'язок

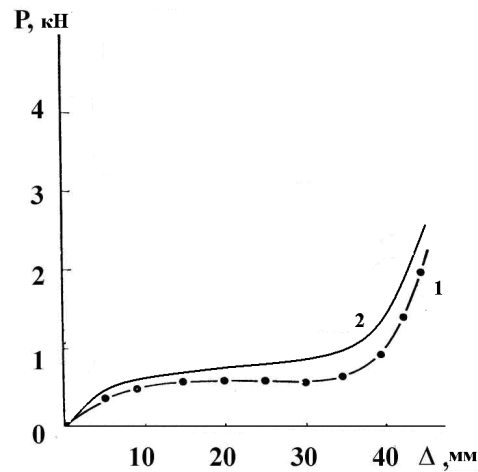


Рис. 3.3. Залежність сили  $P$  від осадки  $\Delta$  для амортизатора BP201

Таким чином, з отриманих даних можна зробити наступні висновки. При вертикальному стисненні залежність сила-осадка для амортизаторів AP103 і BP201 є практично лінійною до деформації  $\Delta_m/H \approx 0,1$  (для AP103  $\Delta_m = 15$  мм, для BP201  $\Delta_m = 8$  мм). Елементи мають при цьому практично постійну жорсткість, величина якої залежить від марки гуми. При великих деформаціях залежність сила-осадка стає нелінійною, жорсткість зменшується. При значних деформаціях в залежності від способу кріплення елементів до верхньої і нижньої поверхонь і способу навантаження можливо втрата вертикальної стійкості елементів.

В результаті випробувань амортизаторів типу AP103 з двох марок гум – 51-1711 і 51-1714 отримано жорсткості гумових елементів. Квaziстатична (витримка під навантаженням 1 година) жорсткість при вертикальному стискуванні  $C_{ст}$  при осадці 10 мм дорівнює  $\approx 150$  кН/м для гуми 51-1711 і  $\approx 220$  кН/м для гуми 51-1714. Динамічна жорсткість на стиск  $C_d$  при циклічному гармонійному навантаженні з частотою 20 Гц при максимальній осадці 10 мм дорівнює, відповідно, 170 кН/м і 250 кН/м. Коефіцієнт динамічності  $K = C_d/C_{ст}$ , як видно з наведених даних при зазначених частотах, дорівнює 1,1 ... 1,2 для обох марок гум.

Для дослідження властивостей само розігріву віброзахисних експериментально визначалися поля приросту температури  $\Delta T$  над температурою навколишнього середовища в амортизаторах AP103, BP201-1 і BP201-2. Точки, в яких проводилося вимірювання температури, показані на кресленнях ліворуч від графіків. Заміри проводилися точковою (діаметр 1 мм) хромель-алюмелевою термопарою. Температура навколишнього середовища дорівнювала 24 °С. Дані для  $\Delta T$  отримано для сталого (стаціонарного) теплового режиму, який в описуваних умовах досягався приблизно за 3 години від початку деформування в різних умовах циклічного навантаження.

Для амортизатора AP103:

попереднє стиснення 10мм;

1) амплітуда  $A=3$ мм, частота  $\omega=13,3$ Гц; 2) –  $A=3$  мм,  $\omega=20,3$  Гц; 3) –  $A=5$  мм,  $\omega=13,3$  Гц; 4) –  $A=10$  мм,  $\omega=13,3$  Гц

Для амортизаторів BP201:

попереднє стиснення 5мм;

1 – амплітуда  $A=1,5$  мм, частота  $\omega=13,3$  Гц; 2 –  $A=1,5$  мм,  $\omega=20,3$  Гц; 3,5 –  $A=3$  мм,  $\omega=13,3$  Гц; 4 –  $A=3$  мм,  $\omega=20,3$  Гц; 6,8 –  $A=5$ мм,  $\omega=13,3$  Гц; 7 –  $A=3$  мм,  $\omega=20,3$  Гц.

На рис. 3.4 – 3.5 наведено результати експериментальних даних та чисельного розв’язання задачі дисипативного розігріву еластомерних елементів для випадку найбільш інтенсивного навантаження. Аналіз результатів показує, скінченно-елементний розв’язок дає дещо завищений результат (максимальна температура розігріву, отримана експериментально, складає 74°C; чисельний розв’язок –  $\Delta T_{\max}=78^\circ\text{C}$  ).

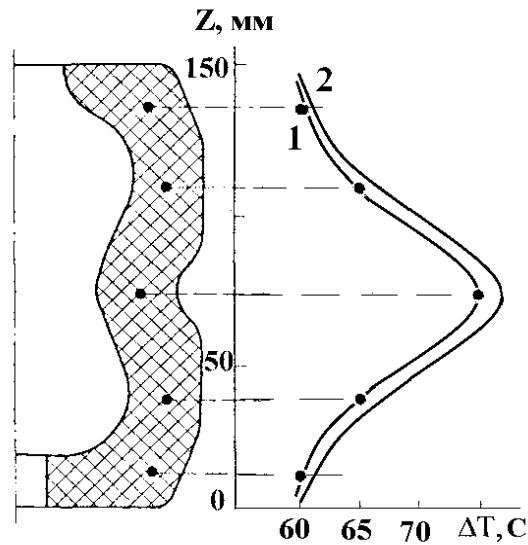


Рис. 3.4. Розподіл температури  $\Delta T$  у елементі AP103 при гармонійному стисканні (попереднє стиснення 10 мм), амплітуда  $A=10$  мм, частота  $\omega=13,3$  Гц: 1 – експериментальні дані [35]; 2 – чисельний розв’язок

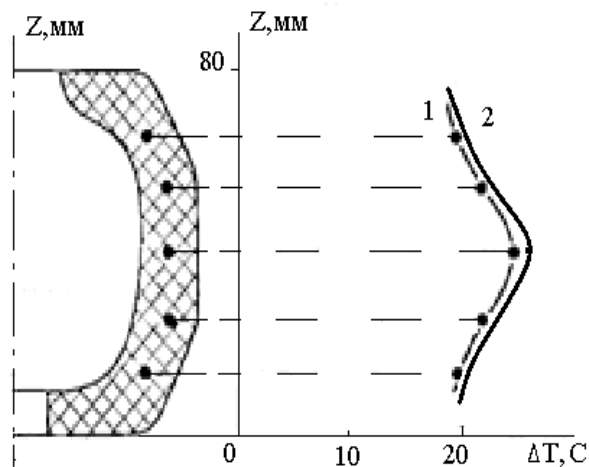


Рис. 3.5. Розподіл температури  $\Delta T$  по висоті елемента BP201, при гармонійному стисканні (попереднє стиснення 5 мм): амплітуда  $A=5$  мм, частота  $\omega=13,3$  Гц: 1 – експериментальні дані [36]; 2 – чисельний розв’язок

Практичний інтерес становить отримання формул для розрахунку статичної жорсткості розглянутих елементів. Проте зважаючи на складну геометричну форму елементів типу AP точний аналітичний розрахунок їх статичної жорсткості представляє значні труднощі. Використання МСЕ дозволяє уникнути спрощень і отримати розв'язання достатньої точності.

Проведені дослідження дозволяють зробити наступні висновки. Елементи типу AP мають деякі переваги в порівнянні з іншими елементами, наприклад, циліндричними, які можуть виявитися корисними при роботі в екстремальних умовах, які часто спостерігаються на вібраційних машинах. Такими перевагами є мала зсувна жорсткість при необхідній несучій здатності, а також зменшений дисипативний розігрів. Досліджені марки гум 51 1711 і 51 1714 дозволяють створювати гумові елементи конструкцій типу AP із наперед заданими фізико-механічними характеристиками, що відповідають умовам роботи на вібраційних машинах в якості пружних ланок та амортизаторів.

Виходячи з наведених у роботі даних по теплоутворенню в гумових елементах типу AP і BP, можуть бути рекомендовані режими навантаження, що забезпечують необхідну довговічність цих елементів.

При цьому слід враховувати, що тривала довговічність гумових елементів на основі каучуку СКІ-3 можлива в тому випадку, якщо максимальне перевищення температури  $\Delta T$  над температурою навколишнього середовища буде не вище 60-70 К, наприклад для AP103 з гуми 51-1714 (рис. 3.4) при частоті навантаження близько 13 Гц (частота навантаження існуючих вібромашин) та при  $A \geq 10$  мм температура значно перевищує максимально допустимі для такого матеріалу значення. При таких умовах навантаження можлива лише епізодична робота вібромашин, в разі тривалого навантаження в такому режимі буде спостерігатися ефект термомеханічної нестійкості і довговічність при цьому буде обмежена 50-100 годинами навантаження. Тривала робота AP103 з даної марки гуми при частоті 13 Гц можлива при  $A = 7 \dots 8$  мм.



Що стосується ВР201 з гуми 51-1714, то, як видно на рис. 3.5, при частотах навантаження 10...20 Гц і  $A = 5$  мм забезпечуються умови тривалого напрацювання.

Всі отримані результати необхідні при розробці нових гумових елементів, а також для подальшого поліпшення існуючих гумових конструкцій, при динамічних розрахунках вібромашин, в яких використовуються елементи типу АР в якості пружних ланок та віброізоляторів, та для розрахунку необхідної довговічності елементів.

### **3.2. Аналіз деформування і довговічності віброізоляторів**

В даний час у машинобудуванні і будівництві досить часто виникають проблеми віброізоляції і сейсмоізоляції. Одним з найбільш перспективних методів демпфірування коливань є використання віброізоляторів на основі еластомерних або композитних матеріалів. Дослідженню в'язкопружних властивостей гуми, аналізу деформування і руйнування еластомерних елементів конструкцій присвячено досить велику кількість робіт вітчизняних і зарубіжних авторів [37]. У розрахунках динамічного деформування слід враховувати ефекти демпфірування гумових елементів конструкцій. Найбільш ефективним для опису в'язкопружних властивостей є застосування рівнянь Вольтерра. Аналітичні розв'язання таких рівнянь в задачах про циклічне навантаження отримано лише для одновимірного випадку, що значно обмежує можливості отримати надійне розв'язання для елементів конструкцій, які мають складну форму. У цьому випадку найбільш прийнятним є застосування чисельних методів розв'язання задач в тривимірній постановці, одним з яких є метод скінченних елементів.

Для аналізу динамічного деформування еластомерних елементів конструкцій в цих умовах слід врахувати, що величина статичної деформації

значно перевищує амплітудні значення динамічного деформування. Для чисельного аналізу напружено-деформованого стану в цьому випадку можна використовувати теорію деформації попередньо навантажених тіл [38].

Варіаційне формулювання задачі динамічного навантаження пружного тіла в цьому випадку має вигляд

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \iiint_V (\sigma^{ij} + \sigma_0^{ij}) \delta \varepsilon_{ij} dV - \iiint_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_l \dot{u}_l dV - \right. \\ \left. - \iiint_V (P_0^i + P^i) \delta u_i dV - \iint_S (Q_0^i + Q^i) \delta u_i \right\} dt = 0, \quad (3.1)$$

де  $\sigma_0^{ij}$  – початкове напруження;

$P_0^i, Q_0^i$  – початкові значення масових і поверхневих сил відповідно;  $P^i, Q^i$  – поточні значення масових і поверхневих сил;

$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j})$  – тензор деформацій.

При цьому матеріал проявляє яскраво виражені в'язкопружні властивості, котрі можна описати рівняннями Вольтерра:

$$\sigma = E_0 \left[ \varepsilon - \int_0^t R(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right] \quad (3.2)$$

де  $R(t - \tau)$  – ядро релаксації.

Для еластомерів найчастіше використовується ядро Работнова.

Для врахування слабкої стисливості еластомерів використовуються різні підходи. В якості моделей поведінки еластомеру можуть використовуватися модифікований матеріал Гука (2.66), закон стану (2.72) або закон стану Ліндлі (2.76).

Замінюємо об'ємний модуль і модуль зсуву інтегральними операторами Вольтера [39]:

$$\begin{aligned}\mu\phi &= \mu \left[ \phi(t) - \int_{-\infty}^t R_{\mu}(t-\tau)\phi(\tau)d\tau \right], \\ B\phi &= B \left[ \phi(t) - \int_{-\infty}^t R_b(t-\tau)\phi(\tau)d\tau \right],\end{aligned}\tag{3.3}$$

де  $R_{\mu}$ ,  $R_b$  – різницеві ядра зсувної і об'ємної релаксації.

Після підстановки (3.3) - отримуємо фізично і геометрично нелінійні закони стану еластомерів. Причому у всіх випадках можна виділити лінійну складову, яка збігається з узагальненим законом Гука.

В умовах одночасної дії механічного і теплового навантаження в задача зводиться до сумісного розв'язання рівняння термopужності Біо та теплопровідності.

Циклічне деформування слабо-стисливих еластомерів при наявності дисипативного розігріву можна описати в квазістатичній постановці у вигляді рівняння Біо і рівняння теплопровідності:

$$\iiint_V \delta F dv - \iiint_V \vec{P} \delta \vec{u} dv - \iint_S \vec{Q} \delta \vec{u} ds = 0,,\tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
& \iiint_V c_\varepsilon (T - T_0) \delta T dv + \iiint_V \beta_{ij} (T - T_0) \delta \varepsilon_{ij} dv = \iiint_V \lambda_{ij} T_{,i} \delta T_{,j} dv + \\
& + \iiint_V w_0 \delta T dv + \iint_S [q + h(T - \theta)] \delta T ds.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Замінімо модуль В і модуль зсуву операторами Вольтерра для матеріалу Гука і запишемо варіацію вільної енергії для слабо-стисливого в'язкопружного матеріалу Гука з урахуванням дії початкових напружень для малих приростів деформації:

$$\begin{aligned}
\delta F = & \iiint_V \left\{ 2\mu \left[ \varepsilon_{mn} g^{mi} g^{nj} - \frac{1}{3} \theta g^{ij} - \int_{-\infty}^t R_\mu(t - \tau) \left( \varepsilon_{mn} g^{mi} g^{nj} - \frac{1}{3} \theta g^{ij} \right) d\tau \right] + \right. \\
& + B \left[ \left( \sqrt{I_3} - 1 \right) g^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) \left( \sqrt{I_3} - 1 \right) g^{ij} d\tau \right] \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_0^{ij} \delta(u_{k,i} u_{k,j}) - \\
& \left. - B \left[ 3\alpha_T (T - T_0) - 3 \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) \alpha_T (T - T_0) d\tau \right] \delta \varepsilon_{ij} \right\} dv.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Для закону стану Пенга-Ландела

$$\begin{aligned}
\delta F = & \iiint_V \left\{ \sqrt{I_3} \left[ \mu \left( I_3^{-\frac{4}{3}} g^{ij} + \left( -I_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9} (I_3 - 1)(I_1 - 2) + \frac{5}{36} (I_3 - 1) \right) G^{ij} - \right. \right. \right. \\
& - \int_{-\infty}^t R_\mu(t - \tau) \left[ I_3^{-\frac{4}{3}} g^{ij} + \left( -I_3^{-\frac{1}{3}} + \frac{4}{9} (I_3 - 1)(I_1 - 2) + \frac{5}{36} (I_3 - 1) \right) G^{ij} \right] d\tau + \\
& \left. \left. + \frac{B}{2} \left[ (I_3 - 1) G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) (I_3 - 1) G^{ij} d\tau \right] \right] \delta \varepsilon_{ij} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -B \left[ 3\alpha_T (T - T_0) - 3 \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) \alpha_T (T - T_0) d\tau \right] \delta \varepsilon_{ij} \delta_i^j \Bigg] + \\
& + \frac{1}{2} \sigma_0^{ij} \delta(u_{k,i} u_{k,j}) \Bigg\} dv .
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Для закону стану Ліндлі

$$\begin{aligned}
\delta F = & \iiint_V \frac{1}{\sqrt{I_3}} \left\{ \left[ \mu \left( g^{ij} - I_3 G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_\mu(t - \tau) (g^{ij} - I_3 G^{ij}) d\tau \right) + \right. \right. \\
& + B \left( \frac{c}{2} I_3 (I_3 - 1) G^{ij} - \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) \left( \frac{c I_3}{2} (I_3 - 1) G^{ij} \right) d\tau \right) \Bigg] - \\
& - B \left[ 3\alpha_T (T - T_0) - 3 \int_{-\infty}^t R_b(t - \tau) \alpha_T (T - T_0) d\tau \right] \delta \varepsilon_{ij} \delta_i^j \Bigg] + \\
& + \frac{1}{2} \sigma_0^{ij} \delta(u_{k,i} u_{k,j}) \Bigg\} dv .
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Величина  $T - T_0$  входить в рівняння (3.14) та (3.15), вона не являється незалежною, тому визначити її з одного рівняння можна лише за умови, що рівняння не зв'язані. Такий випадок можна спостерігати за умови стаціонарної теплопровідності.

Рівняння стаціонарної теплопровідності можна записати у вигляді аріаційного рівняння Лагранжа:

$$\delta W = \iiint_V \left( \lambda_{ij} T_{,i} \delta T_{,j} g^{ij} + w_0 \delta T \right) dv + \iint_S [q + h(T - \theta)] \delta T ds, \tag{3.9}$$

Функцію джерела теплоутворення можна обчислити спираючись на другий закон термодинаміки. Для незворотних процесів співвідношення термодинаміки має вид [39]:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} + \frac{w}{T} dt, \quad (3.10)$$

де  $S$  – ентропія;

$T$  – абсолютна температура;

$w$  – функція розсіювання;

$t$  – час.

Вільну енергію можна представити у вигляді:

$$F = E - TS,$$

Зважаючи на те, що  $\delta E = \delta Q + \delta W$  отримуємо:

$$dF + TdS + Sdt = \delta Q + \delta W. \quad (3.11)$$

То з рівняння (3.10) отримаємо:

$$TdS = \delta Q + \omega^* dt. \quad (3.12)$$

підставляючи наразі рівняння (3.12) в (3.11), отримаємо основне термодинамічне співвідношення:

$$dF + Sdt + w^* dt = \delta W \quad (3.13)$$

Представляючи відповідно до [39] ентропію як похідну від вільної енергії за температурою,

$$S = -\frac{dF}{dT}$$

отримуємо з основного термодинамічного співвідношення вираз для функції розсіювання енергії:

$$w = \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{dF}{dT} - \dot{F} , \quad (3.14)$$

де точкою позначено похідну за часом.

Потужність джерела теплоутворення зазвичай обраховують за один період коливань

$$w_0 = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} w dt . \quad (3.15)$$

Сумісний розв'язок рівнянь (3.4) та (3.5) дозволяє оцінити термонапружений стан тіла та температуру нагріву конструкції

На основі отриманих результатів можна прогнозувати довговічність конструкції.

Одним зі підходів при прогнозуванні довговічності еластомерних елементів конструкцій є використання енергетичного критерію [29]

$$\Delta U_p^* = \int_0^{t^*} (\sigma^{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{\chi} - \dot{q}) dt, \quad (3.16)$$

де  $\Delta U_p^*$  – граничне (критичне) значення густини енергії, що йде на руйнування гуми;

$\dot{q}$  – тепловий потік;

$\dot{\chi}$  – енергія зовнішнього агресивного середовища;

$t^* = \frac{2\pi}{\omega} N^*$  – час до локального руйнування;

$N^*$  – число циклів до локального руйнування.

При циклічних коливаннях температура дисипативного розігріву є сталою. Нехтуючи дією агресивного середовища, отримаємо співвідношення для локальної довговічності:



$$N^* = \frac{2\Delta U_p^*}{\sigma^{ij}\epsilon_{ij}\psi\eta_p} \quad (3.17)$$

де  $\psi$  – коефіцієнт дисипації енергії;

$\eta_p$  – коефіцієнт витрати дисипірованої енергії на руйнування.

Якщо параметри матеріалу залежать від часу навантаження, тобто матеріалу притаманне суттєве старіння, то вираз (3.17) має вигляд:

$$N^* = \frac{2\Delta U_p^*}{\int_0^{t^*} C^{ijkl}(t)\epsilon_{kl}\epsilon_{ij}\psi(t)\eta_p(t)dt} \quad (3.18)$$

На підставі експериментальних даних [29] функціональна залежність від часу для умовно-рівноважного і динамічного модулів пружності, що визначають вид пружних констант  $C^{ijkl}$ , а також коефіцієнта поглинання мають вигляд:

$$E_\infty = E_\infty^k + (E_\infty^0 - E_\infty^k)e^{(-k_\epsilon t)},$$

$$E_\partial = E_\partial^k + (E_\partial^0 - E_\partial^k)e^{(-k_\epsilon t)},$$

$$\psi = \psi_0 - k_\psi t.$$

Після інтегрування маємо співвідношення для локальної довговічності для лінійного розтягу:

$$E_{\text{д}}^k \psi_0 t^* - 0,5 E_{\text{д}}^k k_{\psi} t^{*2} = \frac{4\pi}{\varepsilon^2 \omega \eta_p} \Delta U_p^*. \quad (3.19)$$

Розглянемо прогнозування довговічності циліндричного віброізолятора типу ВРМ903М з гуми 2959 при наступних параметрах:  $\psi_0 = 0,31$ ;  $\eta_p = 0,52$ ;  $E_{\text{д}} = 8,16$  МПа;  $E_{\text{д}}^k = 4,8$  МПа;  $k_{\psi} = 0,083 \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}$ ;  $\Delta U_p^* = 0,6 \cdot 10^{12} \text{ Дж/м}^3$ ;  $\varepsilon = 0,3 \cdot 10^{-6} \text{ м}$ , параметри ядра Работнова  $\alpha = -0,6$ ,  $\beta = 1,06$ . Розміри еластомерного елементу:

$D = 180 \text{ мм}$ ,  $H = 100 \text{ мм}$ . Частота навантаження – 14 Гц.

Довговічність становить  $N^* = 9,1 \cdot 10^9$  циклів.

Така довговічність не суперечить раніше отриманими експериментальними даними для гуми 2959 [29].

Деформування конструкцій з еластомерів під дією динамічних навантажень супроводжується суттєвою дисипацією енергії, яка в свою чергу супроводжується саморозігрівом. Джерелами теплоутворення служать напруження  $\sigma^{ij}(t)$  і швидкості деформацій  $\dot{\varepsilon}_{ii}(t)$ .

Модель в'язкопружного середовища визначається включеними в неї пружними і в'язкими компонентами. Ускладнюючи структуру моделі, можна отримати стійкий зв'язок між напруженнями і деформаціями у часі. При цьому взагалі можна розглядати моделі з нескінченною кількістю пружних і в'язких елементів, що підвищує порядок диференціальних операторів і ускладнює їх застосування при розв'язанні практичних завдань. Зв'язок між напруженнями і деформаціями можна встановити і за допомогою інтегральних рівнянь стану.

Пропорційність між приростом деформацій і напружень в інтегральних рівняннях встановлюється за допомогою функції, яка називається ядром рівняння. Найбільшого поширення при розрахунку еластомерів отримало ядро релаксації Ю.М. Работнова.

Беремо до розгляду трьохелементну модель в'язкопружного середовища (рис. 3.6).

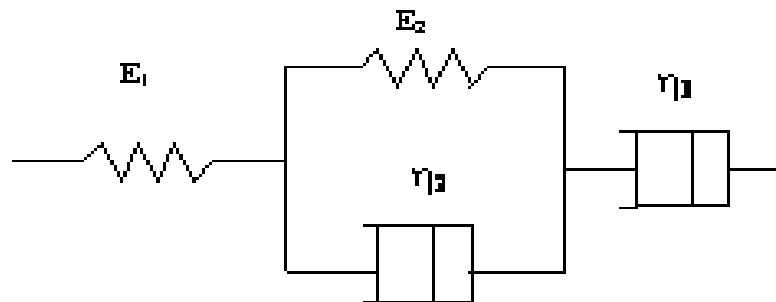


Рис. 3.6. Модель в'язкопружного середовища

Розглядаючи поведінку старіючого матеріалу на основі наведеної схеми, для її третього елемента маємо:

$$\sigma(t) = \eta_3(t) \dot{\epsilon}^p(t),$$

звідки

$$\dot{\epsilon}^p(t) = \frac{\sigma(t)}{\eta_3(t)}.$$

Функцію  $\eta_3(t)$  представимо у вигляді

$$\eta_3(t) = \eta_3(0)\phi$$

де  $\phi$  – функція старіння, відповідає кривій зміни в часі  $E = E(t)$  – модуля пружності,  $\eta_3(0)$  – коефіцієнт в'язкості в початковий момент часу. Для розрахунку довговічності необхідно мати аналітичне подання даної функції. Загальною апроксимацією експериментальних даних для еластомерів є експоненціальна залежність [26]:

$$\phi(t) = \frac{E(t)}{E(0)} = \exp \left[ \left( k_1 - k_2 \int_0^t W(t) dt \right) t \right],$$

де  $k_1, k_2$  – коефіцієнти апроксимації;

$W(t)$  – функція, пропорційна накопиченій за час  $t$  енергії деформації.

Для розв'язання завдання про динамічну рівновагу еластомерного елемента конструкції слід спочатку вирішити задачу про вільні коливання.

Для більшості задач про вільні коливання пружно-спадкового тіла використовується рівняння у вигляді:

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0,$$

$$\omega^2 \varphi(t) = \omega_0^2 \left[ \varphi(t) - \int_0^t R(t-\tau) \varphi(\tau) d\tau \right].$$

Рекурентна формула для розв'язання характеристичного рівняння має вигляд:

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 \left[ 1 - R \left( \frac{1}{i\omega_n - 1} \right) \right].$$

Після проведення перетворень Фур'є отримаємо:

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 [1 - A(\omega_{n-1}) + iB(\omega_{n-1})],$$

де

$$A(\omega) = \int_0^\infty K(z) \cos \omega z dz = \operatorname{Re} K\left(\frac{1}{i\omega}\right);$$

$$B(\omega) = \int_0^\infty K(z) \sin \omega z dz = -\operatorname{Im} K\left(\frac{1}{i\omega}\right)$$

$$1 - A(\omega_0) = E(\omega_0)/E_0,$$

$$B(\omega_0) = \psi(\omega_0)/(2\pi);$$

$E_0$  – миттєвий модуль пружності;

$E_0(\omega_0)$  – динамічний модуль при  $\omega = \omega_0$ ;

$\psi(\omega_0)$  – технічний коефіцієнт поглинання при  $\omega = \omega_0$ .

Побудова розв'язальних рівнянь методу скінченних елементів для тривимірної задачі базується на використанні інтерполяційних функцій форми для опису полів переміщень, швидкостей та прискорень:

$$(u : \dot{u} : \ddot{u})_k = \sum_{s=1}^8 N_{(s)} (u : \dot{u} : \ddot{u})_k^{(s)},$$

де  $N(s)$  – степеневі функції форми для  $s$ -го вузла скінченного елемента;  
 $(u : \dot{u} : \ddot{u})_k$  – вектори переміщень, швидкостей і прискорень вузла  $s$  скінченного елемента у напрямку  $k$  в базисної системі координат.

Для забезпечення високої точності і ефективності процесу розв’язання широкого класу задач іноді доцільно підвищити ступінь апроксимуючих функцій.

Тоді рівняння руху можна записати у вигляді системи диференціальних рівнянь:

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Gu = f(t),$$

де  $M$  – матриця мас;

$C$  – матриця демпфірування;

$G$  – матриця жорсткості;

$f(t)$  – вектор вузлових сил.

Матрицю мас обчислюємо за формулою:

$$M = \int_V \{N\} \rho \{N\}^T dv$$

Визначення матриці демпфірування за допомогою матриць, що описують властивості скінченних елементів не представляється можливим. Тому найчастіше її приблизно обчислюють у вигляді лінійної комбінації матриць жорсткості і мас.

Якщо відомі  $n$  коефіцієнтів демпфірування відповідних форм власних коливань, матрицю демпфірування можна приблизно обчислити за формулою:

$$C = M \sum_{i=0}^{n-1} a_i (M^{-1}G)^i$$

де коефіцієнти  $a_i$  визначаються з розв'язання рівнянь:

$$h_i = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (a_{k-1} \omega_i^{2k-3})$$

Для  $n=2$  вираз приводиться до формули релєївського демпфірування.

Для прямого інтегрування рівнянь динамічного деформування найчастіше використовується метод Ньюмарка.

Проте імпульсний режим навантаження, на відміну від циклічного режиму, не призводить до суттєвого саморозігріву.

Найбільший вплив на довговічність еластомерів надають механічні напруження і температура. Якщо відомі  $n$  точок конструкції з різними значеннями питомої потенційної енергії деформації  $U_1, U_2, U_3, \dots, U_n$  і різними температурами  $T_1, T_2, T_3, \dots, T_n$ , розрахунок довговічності проводиться для всіх  $n$  точок. У більшості випадків немає необхідності розраховувати довговічність для кожної точки конструкції. Розрахунок ведеться щодо небезпечної точки, тобто тієї, в якій руйнування починається в першу чергу.

Практично небезпечна точка визначається наступним чином: обираються дві точки  $O_1(U_1, T_1)$  і  $O_2(U_2, T_2)$ , причому в одній з точок  $U_1 = \max$ , а в іншій  $T_2 = \max$  і розрахунок проводиться для цих точок.

Розглянемо задачу про деформацію гумометалевого амортизатора опорного вузла тепловоза (рис. 3.7).

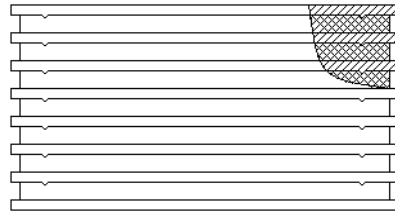


Рис.3.7. Гумометалевий амортизатор

Радіус армуючого металевого шару і гумового елемента 0,14 м, товщина гумового елемента 0,035 м, металевого шару - 0,004 м., Кількість елементів - 7.

Для зниження осадки використовуються металеві пластини з буртиком розміром 0,01 м, радіус по бурту 0,1 м. На рис. 3.8 наведено епюри напружень. Під час монтажу амортизатор отримує початкову деформацію 10%. Амплітуда коливань не перевищує 0,5%.

Розв'язання критеріального рівняння довговічності (3.17) дає оціночне значення терміну служби гумометалевих амортизатора при вібраційному навантаженні порядку 4,1 року.

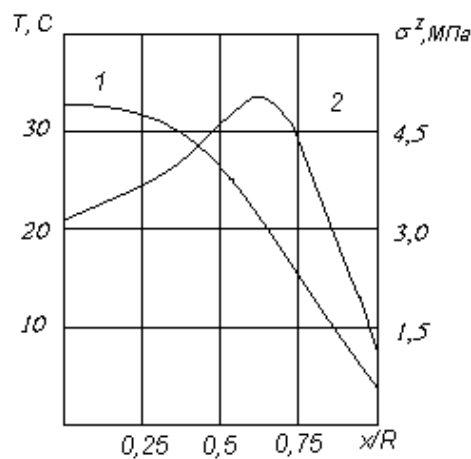


Рис. 3.8. Розподіл температур і нормальних напружень в гумовому елементі: 1 - температура; 2 - нормальні напруження в серединному перерізі гумового шару



## ВИСНОВКИ

Отримані результати і аналіз проведених досліджень для ненаповнених гум дозволяють зробити висновок, що до наповнення гум 45 мас.ч. технічного вуглецю з похибкою (8....10)%, що лежить в межах похибки експерименту, їх реологічну поведінку в діапазоні гармонійних режимів навантаження, описуються інтегральними операторами з експоненційною функцією релаксації Ю.М. Работнова. Поєднання ефектів фізичної та конструктивної нелінійності дозволяє управляти амплітудно-частотними характеристиками в широких межах, що може бути використано при синтезі машин (в тому числі і вібраційних) з заданими характеристиками.

Метод урахування нелінійної поведінки наповнених гум дозволив вперше встановити новий ефект нелінійного масштабування НДС, який може бути використаний для обчислення локальних значень параметрів напруженого стану та дисипації за розв'язанням відповідної лінійної задачі і значенням інтегральної характеристики нелінійного стану - коефіцієнту жорсткості.

Встановлений ефект локальних мінімумів на кривій довговічності, полягає в тому, що для наповнених нелінійних гум з ефектами Пейна (модуль втрат має дзвоноподібну форму) криві довговічності в залежності від деформації зсуву  $\gamma$  мають локальні мінімуми, що виявляються в тому випадку, коли спадаюча гілка в функції  $G''(\gamma)$  спадає швидше, ніж  $1/\gamma^2$ , може бути використаний при виборі матеріалів з оптимальними властивостями для захисних футерів і віброізоляторів машин.

Для гум, використовуваних як конструкційний матеріал для виготовлення силових елементів (захисних футеровок, віброізоляторів, пружних ланок і т.д.) найбільш зручною для опису в'язкопружного поведінки є дробово-експоненціальна функція Работнова. Ядро, яке має чотири параметри  $\alpha, \beta, \lambda, \chi$  дозволяє найбільш повно врахувати частотні і амплітудні

залежності інформативних параметрів  $G$  та  $\psi$  в діапазоні частот  $10^{-4} \div 10^6$  Гц і величин відносної деформації  $\varepsilon < 0,45$ . Параметри ядра  $\alpha$  і  $\beta$  є структурно-чутливими величинами і відображають природу нестабільності фізико-механічних характеристик гум в часі (параметр  $\alpha$  визначається при цьому через пік релаксаційного спектра); параметр  $\lambda$  відображає зміну характеристик жорсткості гум в часі.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бартенев Г. М., Зуев Ю. В. Прочность и разрушение высокоэластических материалов. М.; Л.: *Химия*, 1964. 387 с.
2. Бартенев Г. М. Релаксационные свойства и структура эластомеров. *Механика эластомеров*: Научн. тр. Кубанского университета. Краснодар, 1977. Вып. 1. С. 7 – 21.
3. Карнаухов В. Г., Сичко В. М., Карпенюк А. С. Влияние физической нелинейности на резонансные колебания и диссипативный разогрев неупругих прямоугольных пластин. *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. 2008. 51, №3. С. 90 – 98.
4. Потураев В. Н., Круш И. И., Надутый В. П. Нелинейные эффекты в наполненных резинах защитных футеровок горных машин. Днепропетровск, 1974. 17 с. Деп. в ВИНТИ 02.07.74, № 305-74.
5. Потураев В. Н., Дырда В. И., Круш И. И. Прикладная механика резины. Киев: *Наук. думка*. 1980. 260 с.
6. Дырда В. И. Определение реологических параметров эластомерных материалов / В. И. Дырда, Ю. Г. Козуб, А. С. Кобец, А. П. Науменко, Т. Е. Твердохлеб, А. А. Яценко. *Геотехническая механика*: Межвед. сб. научн. тр. 2007. Вып. 70. С. 56 – 88.
7. Методика определения реологических параметров гумовых деталей при

- циклическом деформировании / Потураев В. Н., Круш И. И., Дырда В. И., Науменко Н. Н. Киев: *Наукова думка*, 1970. 27 с.
8. Payne A. R. Histeresis in Rubber Vulcanisates / J. Pol. Sci., Symp. 1974. P. 169 – 196.
  9. Лукомская А. И., Евстратов В. Ф. Основы прогнозирования механического поведения каучуков и резин. М.: *Химия*, 1975. 360 с.
  10. Дырда В. И., Твердохлеб Т. Е., Чижик Е. Ф. Реология упругонаследственных сред. *Геотехническая механика: Межвед. сб. научн. тр.* Днепропетровск. 1999. Вып. 11. С. 257 – 347.
  11. Роменский Е. И. Динамика деформирования упругой среды с начальными напряжениями и напряжениями / Е. И. Роменский, Е. В. Лысь, В. А. Чеверда, М. И. Эпов. *Прикладная механика и техническая физика*. 2017. № 5. С. 178 – 189.
  12. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интергродифференциальных уравнений. М.: *Наука*. Главная редакция физ.-мат. литературы, 1982. 302 с.
  13. Persoz B. Le prinzipe de superposition de Boltzman. *Cahiers Croupe transc. etudes rheol.* 1957. 2, N 1. P. 126 – 281.
  14. Leaderman H. Elastic and creep properties of filaments materials and other briqhpolimers. Washington: *Tecstill Foundation*, 1944. 289 p.
  15. Розовский М. И. Ползучесть и длительное разрушение материалов // *Журнал технической физики*. 1951. Т. 21, № 11. С. 29 – 37.
  16. Работнов Ю. Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: *Наука*, 1977. 384 с.
  17. Колтунов М. А. Ползучесть и релаксация. М.: Высшая школа, 1976. 277 с.
  18. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.; Л.: *Гостехиздат*, 1949. 267 с.
  19. Надутый В. П., Круш И. И. Определение реологических характеристик полимерных просеивающих поверхностей грохотов. Сб. научн. тр.

*Вибрационные эффекты в горных машин и технологиях.* Киев: Наук.думка, 1990. С. 94-98.

20. Шепери Р. Термомеханическое поведение вязкоупругих сред с переменными свойствами при циклическом нагружении. *Тр. Амер. о-ва инженеров-механиков. Прикл. механика.* 1965. № 3. С. 150 – 161.
21. Буткевич Н. Н., Бумило И. Д. Моделирование температурных напряжений в композиционных материалах методом фотоупругости. *Теоретическая и прикладная механика.* 1980. №7. С. 68 – 71.
22. Авраменко Л. Є., Шевченко В. П. Термопружність ортотропних оболонок під дією рухомого зосередженого джерела тепла. *Мат. методи та фіз.-мех. поля.* 2009. 52, №2. С. 138 – 151.
23. Бауэр С. М., Клец О. Г., Морозов Н. Ф. О поведении трансверсально-изотропных цилиндрических оболочек при динамическом приложении радиального давления. *Механика твердого тела.* 2008. №4. С. 19 – 25.
24. Белкин А. Е., Уляшкин А. В. Приближенное решение контактной задачи об обжатии шины на плоскую или цилиндрическую опорную поверхность. *Изв. Вузов Машиностроение.* 1993. №10. С. 14 – 21.
25. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: *Стройиздат*, 1968. 418 с.
26. Ферри Д. В'язкоопружні свойства полимеров. М.: *Изд-во иностр. лит.*, 1963. 536 с.
27. Кравчук А. С., Майборода В. П., Уржумцев Ю. С. Механика полимерных и композиционных материалов. Экспериментальные и численные методы. М.: *Наука*, 1985. 303 с.
28. Круш И. И. Интегро-операторный метод исследования демпфирующих свойств упруго-наследственных систем. *Изв. АН СССР.: Механика.* 1965. № 6. С. 90 – 94.
29. Дырда В. И. Прочность и разрушение эластомерных конструкций в экстремальных условиях нагружения. Киев: *Наук. думка*, 1988. 232 с.
30. Бухина М. Ф. Техническая физика эластомеров. М.: *Химия*, 1984. 224 с.

31. Температурно-частотное приведение динамических функций саженаполненных резин в нелинейной области / Г. В. Виноградов, В. И. Гарцман, Б. М. Горелик, А. Я Малкин. *Мех. полимеров*. 1973. № 4. С. 751 – 754.
32. Дырда В. И., Мазнецова А. В, Твердохлеб Т. Е. Расчет силовых гумотехнических изделий, используемых в горном машиностроении: Темат. обзор / *Производство гумотехнических и асбестотехнических изделий*. М.: ЦНИИТЭнефтехим. 1991. Вып. № 2. 62 с.
33. Уржумцев Ю. С., Максимов Р. Д. Прогностика деформативности полимерных материалов. Рига: *Зинатне*, 1975. 416 с.
34. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин оболочек. М.: *Наука*, 1987. 360 с.
35. Дырда В. И., Козуб Ю. Г., Сокол С. П. Экспериментальные исследования амортизаторов сложной формы для вибрационных машин. *Геотехническая механика*. 2014. Вып. 116. С. 130 – 136
36. Сипетов В. С., Демчук О. Н., Стародуб Р. А. Решение нестационарных задач термоупругого деформирования слоистых композитных конструкций методом конечных элементов. *Механика композитных материалов*. 1991. №2. С. 215 – 222.
37. Карнаухов В. Г., Киричок И. Ф. Связанные задачи теории вязкоупругости пластин и оболочек. К.: *Наукова думка*, 1986. 221 с.
38. Гузь А. Н. Неклассические проблемы механики разрушения: В 4 т. Под общ. ред. А. Н. Гузя; АН УССР. Ин-т механики. Киев: *Наук. думка*, 1991. Т. 2. Хрупкое разрушение материалов с начальными напряжениями. 288 с.
39. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» / В. В. Киричевский, Б .М. Дохняк, Ю. Г. Козуб и др. К.: *Наукова думка*, 2005. 402 с.