

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій


Кафедра математики та інформатики

Шацький Ігор Анатолійович

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ НА
ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ З МАТЕМАТИКИ В 8-9 КЛАСАХ**

**кваліфікаційна робота
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня
освітньої програми «Математика»
за спеціальністю 014.04 Середня освіта (Математика)**

Особистий підпис  Ігор ШАЦЬКИЙ

Науковий керівник  Валерій ХМЕЛЬ,
кандидат педагогічних наук, доцент
кафедри математики та інформатики

В.о. завідувача кафедри _____ Юрій КОЗУБ,
доктор технічних наук, професор
кафедри математики та інформатики

АНОТАЦІЯ

Шацький Ігор Анатолійович

Тема: Розв'язування рівнянь вищих степенів на факультативних заняттях з математики в 8-9 класах.

Спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)».

Установа: ЛНУ імені Тараса Шевченка, 2026р.

Магістерська робота містить: 95 с., 2 рис., 3 таб., 42 джерела.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики учнів 8–9 класів у закладах загальної середньої освіти.

Предметом дослідження є методика навчання розв'язування рівнянь вищих степенів на факультативних заняттях з математики в 8–9 класах.

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати та розробити факультативний курс для учнів 8 або 9 класів на тему «Нестандартні методи розв'язування деяких рівнянь вищих степенів», спрямованого на розвиток математичного мислення та підвищення рівня навчальних досягнень учнів.

Результати роботи – в процесі виконання магістерської роботи теоретично обґрунтовано педагогічну доцільність вивчення методів розв'язування рівнянь вищих степенів у 8–9 класах саме у формі факультативних занять. Доведено, що це сприяє розвитку абстрактного мислення та відповідає віковим можливостям учнів основної школи. Встановлено, що чинна шкільна програма з алгебри не забезпечує достатнього рівня оволодіння методами розв'язування рівнянь степеня $n > 2$, що створює прогалину в математичній підготовці учнів, орієнтованих на поглиблене вивчення точних наук. Систематизовано та адаптовано для учнів 8–9 класів загальні (теорема Безу, схема Горнера, метод невизначених коефіцієнтів) та спеціальні (для симетричних, однорідних, зворотних рівнянь) методи розв'язування. Розроблено структуру та зміст факультативного курсу «Нестандартні методи розв'язування деяких рівнянь вищих степенів», що включає пояснювальну записку, розподіл навчальних тем та методичні рекомендації для вчителя, спрямовані на формування в учнів навичок пошукової діяльності.

Ключові слова: РІВНЯННЯ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ, ФАКУЛЬТАТИВНІ ЗАНЯТТЯ, МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ, ПОЗАКЛАСНА РОБОТА, 8–9 КЛАСИ, ТЕОРЕМА БЕЗУ, СХЕМА ГОРНЕРА, МЕТОД ЗАМІНИ ЗМІННОЇ, ЗВОРОТНІ РІВНЯННЯ, МАТЕМАТИЧНА КОМПЕТЕНТНІСТЬ.

ANNOTATION

Shatskyi Ihor Anatoliiovych

Theme Use of Solving higher-order equations in optional mathematics classes in grades 8-9.

Speciality: 014.04 "Secondary Education (Mathematics)".

Institution: Luhansk Taras Shevchenko National University (LTSNU), 2026 year.

Master's work of: 95 p., 2 im, 42 sources.

Object of research – the process of teaching mathematics to students in grades 8–9 in secondary education institutions.

Purpose of work – Methodology for teaching solving higher-order equations in optional mathematics classes in grades 8–9.

Subject of research - to theoretically substantiate and develop an optional course for students in grades 8 or 9 on the topic "Non-standard methods for solving some higher-degree equations", aimed at developing mathematical thinking and increasing the level of students' academic achievements.

Results of work. In the process of completing the master's thesis, the pedagogical expediency of studying methods for solving equations of higher degrees in grades 8–9 in the form of optional classes was theoretically substantiated. It was proven that this contributes to the development of abstract thinking and corresponds to the age capabilities of primary school students. It was established that the current school algebra program does not provide a sufficient level of mastery of methods for solving equations of degree $n > 2$, which creates a gap in the mathematical preparation of students oriented to in-depth study of the exact sciences. General (Bezout theorem, Horner scheme, method of undetermined coefficients) and special (for symmetric, homogeneous, inverse equations) solution methods were systematized and adapted for students of grades 8–9. The structure and content of the optional course "Non-standard methods for solving some higher-degree equations" has been developed, which includes an explanatory note, a distribution of educational topics, and methodological recommendations for the teacher aimed at developing search skills in students.

Keywords: HIGHER DEGREE EQUATIONS, ELECTIVE CLASSES, METHODS OF TEACHING MATHEMATICS, EXTRACURRICULAR ACTIVITIES, 8–9TH GRADES, BEZOUT'S THEOREM, HORNER'S SCHEME, VARIABLE SUBSTITUTION METHOD, RECIPROCAL EQUATIONS, MATHEMATICAL COMPETENCE.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
1.1. Теоретичні засади організації позакласної роботи з математики.....	10
1.2. Психолого-педагогічні передумови позакласної роботи.....	15
1.3. Форми й методи організації позакласної роботи в школі.....	17
1.4. Факультативні заняття як форма позакласної роботи.....	24
1.5. Форми і методи роботи вчителя на факультативах з математики.....	25
1.6. Аналіз сучасного стану шкільної програми щодо проведення факультативних занять з математики	28
Висновки до розділу	32
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ.....	34
2.1. Історичні відомості про алгебраїчні рівняння вищих степенів.....	34
2.2. Властивості алгебраїчних рівнянь вищих степенів.....	39
2.3. Загальні методи розв'язання рівнянь вищих степенів.....	45
2.3.1. Застосування теореми Безу	45
2.3.2. Застосування схеми Горнера	47
2.3.3. Рівняння з раціональними коренями	48
2.3.4. Метод невизначених коефіцієнтів	49
2.4. Стандартні типи рівнянь та методи їх розв'язання.....	52
2.4.1. Двочленні рівняння.....	53
2.4.2. Тричленні рівняння.....	53
2.4.3. Зворотні рівняння.....	54
2.4.4. Кубічні рівняння	57
2.5. Штучні методи розв'язання рівнянь.....	60
2.5.1. Винесення спільного множника за дужки.....	60
2.5.2. Спосіб групування	61
2.5.3. Застосування формул скороченого множення.....	62
2.5.4. Різні структури рівнянь	65
2.5.5. Метод введення параметра	76

2.5.6. Метод заміни рівняння системою двох рівнянь з двома невідомими	78
Висновки до розділу	80
РОЗДІЛ 3. РОЗРОБКА ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСУ ДЛЯ УЧНІВ 8 АБО 9 КЛАСІВ НА ТЕМУ «НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ»	81
3.1. Пояснювальна записка	81
3.2. Зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів.....	82
3.3. Методичні рекомендації щодо викладання курсу	86
Висновки до розділу	89
ВИСНОВКИ	90
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	92
ДОДАТОК А.....	96

ВСТУП

Реформування сучасної системи загальної середньої освіти в Україні орієнтоване на підвищення якості математичної підготовки учнів, розвиток їхнього логічного, алгоритмічного та критичного мислення, а також формування здатності до самостійного здобуття знань і застосування їх у різноманітних навчальних і життєвих ситуаціях. У цьому контексті особливої актуальності набуває проблема організації навчання математики, спрямованого на розвиток творчого потенціалу учнів і їх готовності до розв'язування задач підвищеної складності.

Одним із важливих розділів алгебри, що має значний розвивальний потенціал, є рівняння вищих степенів. Процес їх розв'язування сприяє формуванню в учнів умінь аналізувати структуру алгебраїчних виразів, встановлювати взаємозв'язки між різними способами розв'язування, узагальнювати та систематизувати знання, застосовувати елементи евристичного мислення. На відміну від стандартних квадратних рівнянь, рівняння вищих степенів, як правило, не мають універсального алгоритму розв'язування, що потребує від учнів гнучкості мислення, здатності до пошуку нестандартних підходів та комбінування відомих методів.

Водночас у чинних підручниках і навчальних програмах з алгебри для 8–9 класів закладів загальної середньої освіти цій темі приділяється недостатньо уваги. Зміст обов'язкового курсу здебільшого обмежується розглядом квадратних і біквадратних рівнянь, тоді як такі ефективні методи розв'язування рівнянь вищих степенів, як теорема Безу, схема Горнера, метод невизначених коефіцієнтів, введення нової змінної, або не вивчаються зовсім, або розглядаються фрагментарно.

Разом з тим задачі, що зводяться до розв'язування рівнянь вищих степенів, широко представлені в олімпіадній математиці, у завданнях підвищеного рівня складності, а також є важливою основою для подальшого вивчення математичного аналізу у старшій школі та у вищих навчальних

зкладах. Це зумовлює необхідність цілеспрямованого та систематичного формування відповідних умінь уже на етапі основної школи.

Обмежені можливості вивчення рівнянь вищих степенів у межах обов'язкового курсу алгебри 8–9 класів зумовлюють потребу використання факультативних занять як ефективної форми поглиблення знань та розвитку математичних здібностей учнів. Факультативні заняття з математики створюють сприятливі умови для реалізації диференційованого й особистісно орієнтованого підходів до навчання, урізноманітнення методів і форм роботи, залучення учнів до розв'язування нестандартних задач, дослідницької та пошукової діяльності.

Саме в межах факультативних занять доцільно систематизувати та розширювати знання учнів щодо методів розв'язування рівнянь вищих степенів, формувати вміння обґрунтовано обирати спосіб розв'язання та аналізувати отримані результати, а також розвивати стійкий інтерес до вивчення математики. Незважаючи на наявність значної кількості науково-методичних праць, присвячених викладанню алгебри та розвитку математичного мислення школярів, питання методики навчання розв'язування рівнянь вищих степенів на факультативних заняттях у 8–9 класах залишається недостатньо розробленим і потребує подальшого теоретичного обґрунтування та практичного опрацювання.

Отже, розробка та впровадження ефективної методики вивчення рівнянь вищих степенів у 8–9 класах на факультативних заняттях є актуальною педагогічною проблемою, що зумовила вибір теми даного магістерського дослідження.

Об'єкт дослідження: процес навчання математики учнів 8–9 класів у закладах загальної середньої освіти.

Предмет дослідження: методика навчання розв'язування рівнянь вищих степенів на факультативних заняттях з математики в 8–9 класах.

Мета дослідження: теоретично обґрунтувати та розробити факультативний курс для учнів 8 або 9 класів на тему «Нестандартні методи

розв'язування деяких рівнянь вищих степенів», спрямованого на розвиток математичного мислення та підвищення рівня навчальних досягнень учнів.

Для досягнення поставленої мети в роботі передбачено розв'язання таких завдань:

1. Здійснити аналіз науково-методичної літератури та інформаційних джерел щодо особливостей планування й організації факультативних занять
2. Дослідити зміст чинних навчальних програм і підручників з алгебри для 8–9 класів щодо вивчення рівнянь вищих степенів.
3. Систематизувати основні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів, які є доступними для сприйняття учнями 8–9 класів для використання на факультативних заняттях
4. Розробити зміст, структуру та методичне забезпечення факультативного курсу для учнів 8 або 9 класів на тему «Нестандартні методи розв'язування деяких рівнянь вищих степенів».

Для реалізації поставлених завдань у магістерській роботі використано такі методи дослідження:

- **теоретичні методи:** аналіз, синтез, порівняння та узагальнення науково-практичної й методичної літератури, нормативних документів, навчальних програм і рекомендацій щодо організації факультативних занять з математики;
- **метод систематизації:** впорядкування та класифікація підходів до визначення змісту, структури та програмного забезпечення факультативних занять;
- **структурно-логічний аналіз:** визначення взаємозв'язків між цілями, змістом, формами й методами проведення факультативних занять.

Гіпотеза дослідження ґрунтується на припущенні, що ефективність навчання розв'язування рівнянь вищих степенів у 8–9 класах значно підвищиться, якщо:

- навчання здійснюватиметься в межах спеціально розробленого факультативного курсу;
- зміст навчального матеріалу буде систематизовано відповідно до типів рівнянь та методів їх розв'язування;
- у процесі навчання застосовуватимуться проблемні, пошукові та евристичні методи навчання;
- буде забезпечено диференційований підхід і активну пізнавальну діяльність учнів.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у теоретичному обґрунтуванні доцільності введення пропедевтики методів розв'язування рівнянь n -го степеня ($n > 2$) саме у 8–9 класах через систему факультативних занять, а також у вдосконаленні методики застосування схеми Горнера та теореми Безу для учнів цієї вікової категорії.

Практичне значення дослідження визначається тим, що розроблені методичні рекомендації, система задач та плани-конспекти факультативних занять можуть бути використані вчителями математики для організації гурткової та факультативної роботи, а також студентами педагогічних закладів вищої освіти під час педагогічної практики.

РОЗДІЛ 1.

МІСЦЕ ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Теоретичні засади організації позакласної роботи з математики

Математика має широкі можливості для інтелектуального розвитку особистості, впершу чергу, розвитку логічного мислення, просторових уявлень та уяви, алгоритмічної культури, формування вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати твердження, моделювати ситуації та ін. Математика є засобом вивчення фізики, хімії, інформатики та обчислювальної техніки, астрономії, біології, загально технічних і спеціальних дисциплін, мовою техніки, а розвинуте логічне мислення сприяє засвоєнню гуманітарних предметів. Математичне моделювання широко використовується для розв'язування задач різних галузей науки, економіки, виробництва. Практичні вміння і навички з математики необхідні для майбутньої трудової діяльності школярів.

Аналізуючи психолого-педагогічну, методичну та наукову літературу, можна зробити висновок, що позакласна робота має важливе значення при формуванні математичної культури учнів. Саме ж поняття «позакласна робота» трактується по-різному:

За І. Подласовим «Допоміжні форми організації навчальної роботи – це різноманітні заняття, що доповнюють і розвивають класно-урочну діяльність учнів» [26, с. 535].

І. Харламов стверджує, що «... поряд з обов'язковими навчальними заняттями, поза рамками навчального дня в школах та інших навчальних закладах використовуються різноманітні форми навчальної роботи, які носять для учнів добровільний характер і покликані задовольняти їх різноманітні пізнавальні та творчі запити. Ці форми добровільних навчальних занять називаються позакласними або позаурочними» [33, с.163].

Ще Л. Виготський говорив про провідну роль навчання в розвитку. Над цією ідеєю працювали П. Гальперін, В. Давидов, Д. Ельконін, Л. Занков, Г. Костюк, Н. Менчинська, Л. Обухова та ін. Внаслідок їхніх експериментів було видно, що зміни умов навчання призвели до змін в особливостях розумової діяльності дітей.

Добре організована й уміло поставлена позакласна робота – один з найефективніших засобів пробудження в учнів інтересу до математики. Вона сприяє підвищенню математичної культури учнів, розвитку їх мислення і взагалі тих якостей, сукупність яких називається математичними здібностями. Значну роль відіграє позакласна робота і для набування учнями організаторських навичок, ініціативності, самостійності.

Позакласна робота з математики становить нерозривну частину навчально-виховного процесу навчання математики, складного процесу впливу на свідомість і поведінку школярів, поглиблення і розширення їх знань і навиків, розвитку математичних здібностей. Тому вивчення математичних здібностей школярів і умов їх формування і розвитку вельми важливе для практики шкільного навчання.

Вважається, що позакласна робота з математики є найбільш природною і перевіреною формою, яка відповідає віковим особливостям і можливостям дітей будь-яких класів. Її організації в школі велику увагу приділяли І. Балк, С. Шварцбург, В. Труднев і багато інших. Вони стверджували, що починати проводити позакласні заняття з дітьми з математики треба якомога раніше, щоб у одних дітей пробудити, а у інших – зміцнити інтерес до математики і бажання нею займатися. Тому основними цілями позакласної роботи повинні стати розвиток в учнів інтересу до предмета, накопичення певного запасу математичних фактів і відомостей, умінь і навиків, що доповнюють та поглиблюють знання, набуті в основному курсі [9]. На жаль, поки ще немає досить узагальненого досвіду організації позакласної роботи з математики зі школярами; дуже мало сучасних посібників, адресованих вчителям, які

враховували б зміни в навчальному плані, а ті, що є, не впроваджуються в шкільні програми.

Таким чином, позакласна робота з математики має таке значення:

- різні види цієї роботи сприяють розвитку пізнавальної діяльності учнів: сприйняття, уваги, пам'яті, мислення, мови, уяви;
- вона допомагає формуванню творчих здібностей учнів, елементи яких виявляються в процесі вибору найбільш раціональних способів рішення задач, в математичній або логічній кмітливості;
- деякі види позакласної роботи дозволяють дітям глибше зрозуміти роль математики в житті;
- позакласна робота сприяє вихованню товариства і взаємодопомоги при роботі в групах, участі в грі;
- внаслідок такої роботи відбувається виховання культури почуттів, а так само розвиток і таких інтелектуальних почуттів, як справедливості, честі, боргу, відповідальності.

Але, все-таки, головне значення позакласної роботи з математики в тому, що вона сприяє розвитку математичних здібностей школярів.

Хоча дана форма роботи не регламентована державною навчальною програмою, однак матеріал під час занять потрібно подавати у відповідності зі знаннями та вміннями учнів.

Розрізняють два види позакласних робіт:

1. Робота з учнями, котрі відстають від інших у вивченні програмного матеріалу.
2. Робота з учнями, які виявляють до вивчення математики підвищений, в порівнянні з іншими, інтерес і здібності.

Відзначимо основну мету та положення кожного з напрямів. Робота з учнями, які відстають ефективна, якщо:

- 1) додаткові заняття проводяться з групою 3-4 учні: вони повинні бути однорідними;
- 2) потрібно максимально індивідуалізувати такі заняття;

- 3) заняття проводять не рідше одного разу на тиждень, поєднуючи їх з домашніми завданнями.
- 4) після повторного вивчення того чи іншого розділу на додаткових заняттях доцільно провести підсумковий контроль з виставленням оцінок з теми;
- 5) заняття мають "навчальний" характер;
- 6) потрібно використовувати відповідні завдання з "дидактичних матеріалів";
- 7) вчитель математики повинен аналізувати причини відставання учня при вивченні тем, виділяти та аналізувати типові помилки.

Робота з учнями, які виявляють до вивчення математики підвищений інтерес, відповідає таким основним цілям:

1. Пробудження і розвиток стійкого інтересу учнів до математики і її застосування.
2. Розширення та поглиблення знань учнів з програмного матеріалу.
3. Оптимальний розвиток математичних здібностей в учнів і прищеплення учням певних навичок науково-дослідного характеру.
4. Виховання культури математичного мислення.
5. Розвиток в учня вміння самостійно і творчо працювати з навчальною та науково-популярною літературою, Інтернетом.
6. Розширення і поглиблення уявлень учнів про практичне значення математики в техніці, житті загалом.
7. Розширення і поглиблення уявлень учнів про культурно-історичні цінності математики, про провідну роль математичних шкіл.

Слід пам'ятати, що позакласна робота не повинна дублювати навчальну роботу, інакше вона перетвориться на звичайні додаткові заняття.

Традиційна тематика позакласних занять обмежувалася зазвичай розглядом таких питань, які хоч і виходили за рамки офіційної програми, але

мали багато точок дотику з розглянутими в ній питаннями. Наприклад: ознаки подільності чисел (5-6 кл.); розв'язування геометричних задач на побудову за допомогою циркуля і лінійки; історичний матеріал; завдання підвищеної складності і т.п.

Виходячи зі сказаного, можна стверджувати, що значення позакласної роботи з математики полягає в такому:

1. Різноманітні види цієї роботи в їхній сукупності сприяють розвитку пізнавальної діяльності учнів: сприйняття, уваги, пам'яті, мислення, мови, уяви. «Жоден наставник не повинний забувати», – говорив К. Ушинський, – «що його найголовніший обов'язок полягає в привчанні вихованців до розумової праці і що цей обов'язок більш важливий, ніж передача самого предмету» [34, с. 81].
2. Вона допомагає формуванню творчих здібностей учнів, елементи яких виявляються в процесі вибору найбільш раціональних способів розв'язання задач, в математичній та логічній вигадливості, під час проведення на позакласних заняттях відповідних ігор, в конструюванні різноманітних геометричних фігур, в організації колективу своїх товаришів, щоб з найбільшою ефективністю виконати якусь роботу або провести пізнавальну гру і т. д.
3. Деякі види позакласної роботи дозволяють дітям більш глибоко зрозуміти роль математики в житті: під час відбору числових даних на екскурсії на виробництво, в полі під час збору врожаю, на тваринницьку ферму і т. д., під час складання задач на основі зібраного числового матеріалу, при безпосередньому вимірюванні площі ділянок під сільсько - господарськими культурами, під час спостереження за зважуванням зібраного врожаю, обліку надою молока.

4. Позакласна робота з математики сприяє вихованню колективізму та товариськості (у зв'язку з спільною роботою з випуску стінгазет, організації командних змагань на заняттях, в процесі клубної роботи і т. д.), накопиченню спостережень за працею та відношенню до неї дорослих і у зв'язку з цим вихованню любові до праці.
5. Різноманітні види позакласної роботи сприяють вихованню у дітей культури почуттів, адже діти в своїх вчинках зазвичай керуються насамперед не логічними міркуваннями, а почуттями. При цьому мова йде головним чином про виховання таких почуттів, котрі пов'язані з розумовою діяльністю, – так званих інтелектуальних почуттів (почуття справедливості, честі, обов'язку, відповідальності та задоволення чи незадоволення, радості або скорботи, гордості або засмучення та ін.).
6. Головне ж значення різноманітних видів позакласної роботи полягає в тому, що вона допомагає посилити цікавість учнів до математики, сприяє розвитку математичних здібностей школярів.

Для реалізації вищенаведених положень необхідно реалізувати певний комплекс навчально-виховних заходів, здійснити певні форми організації уроку та позаурочного часу. Це треба робити з максимальним урахуванням індивідуальних особливостей кожної дитини, її рівня підготовки та здібностей.

1.2. Психолого-педагогічні передумови позакласної роботи

Позакласна робота з математики є невід'ємною складовою навчально-виховного процесу та спрямована на поглиблення знань і формування математичних здібностей учнів, розвиток їхнього логічного мислення, творчого підходу до розв'язування задач та пізнавальної активності (Виготський, 1978; Ельконін, 1976). Вона проводиться в позаурочний час і

ґрунтується на добровільній участі, що створює умови для внутрішньої мотивації учнів та розвитку самостійності.

З погляду психолого-педагогічних передумов, ефективність позакласної роботи визначають такі фактори:

Мотиваційна спрямованість діяльності учнів. Добровільна участь у факультативних заняттях стимулює пізнавальний інтерес, формує стійке бажання розв'язувати складні математичні задачі, зокрема рівняння вищих степенів. Мотивація до поглибленого вивчення математики сприяє засвоєнню абстрактних понять і розвитку алгоритмічного мислення (Давидов, 1990; Костюк, 2003).

Розвиток самостійності та ініціативності. Позакласна діяльність створює умови для прояву творчої активності, формування умінь планувати власну роботу, обирати способи розв'язання задач, проводити дослідження з використанням навчальної та науково-популярної літератури. Особливо це важливо при роботі з розв'язуванням рівнянь вищих степенів, які потребують глибокого розуміння алгоритмів та комбінаторного мислення (Гальперін, 1969).

Зв'язок з навчальною діяльністю. Позакласна робота повинна логічно продовжувати і поглиблювати знання, отримані на уроках. Так, факультативні заняття з теми «Рівняння вищих степенів» дозволяють розширити програмні знання учнів, застосувати їх у практичних і творчих завданнях, провести дослідницькі проєкти або математичні експерименти.

Педагогічна підтримка розвитку когнітивних здібностей. Важливо враховувати вікові особливості учнів 8–9 класів: формування абстрактного мислення, здатності до аналізу, порівняння та узагальнення. Позакласна робота допомагає перевести знання в практичну діяльність, що сприяє кращому засвоєнню складних понять, зокрема властивостей многочленів, коренів рівнянь та алгоритмів їх розв'язування (Ельконін, 1976; Занков, 1980).

Соціально-педагогічний аспект. Робота в групах, математичних клубах або наукових гуртках сприяє розвитку комунікативних навичок, колективної

взаємодії, вміння працювати над спільним проєктом та підтримувати партнерів, що важливо для формування відповідальності та культури наукового мислення.

Творчий підхід і дослідницька активність. Позакласні заняття дають можливість застосувати знання в нестандартних ситуаціях, пропонують завдання пошукового характеру, формують в учнів уміння моделювати математичні процеси, створювати власні задачі та знаходити нестандартні способи розв'язування рівнянь вищих степенів.

Таким чином, психолого-педагогічні передумови ефективної позакласної роботи можна визначити як сукупність умов, що сприяють:

- розвитку внутрішньої мотивації і пізнавального інтересу до математики;
- формуванню самостійності, алгоритмічної і дослідницької компетентності;
- розвитку творчого і критичного мислення;
- поглибленому засвоєнню складних тем шкільного курсу (зокрема рівнянь вищих степенів);
- формуванню соціальних та комунікативних компетентностей у процесі колективної роботи.

Отже, факультативні заняття з математики є оптимальною формою організації позакласної діяльності, що забезпечує реалізацію психолого-педагогічних передумов розвитку математичних здібностей учнів, стимулює їх пізнавальний інтерес і сприяє успішному засвоєнню складного матеріалу, такого як розв'язування рівнянь вищих степенів у 8–9 класах.

1.3. Форми й методи організації позакласної роботи в школі

Позакласна робота сприяє поглибленню знань, здобутих учнями на уроках, формуванню навичок практичного застосування цих знань, розвитку моральних якостей: волі, наполегливості, критичного ставлення до власної роботи, а також інтересу до предмету. Вона відрізняється від навчальних

занять за часом, організацією та методами проведення і визначається характером, віком учнів та метою конкретної діяльності.

3. Слєпкань виділяє такі форми позакласної роботи:

- позакласна робота в школі;
- позакласна робота в дитячих будинках творчості, літніх таборах відпочинку тощо;
- робота заочних математичних шкіл різних рівнів. [12]

У межах кожної з цих форм, у свою чергу, існують різні форми позакласної роботи: математичний гурток, тиждень або місячник математики, математичні вечори, математичні ранки, клуби веселих і кмітливих математиків, шкільні олімпіади, математична преса (класна і шкільна математичні газети, бюлетені, стенди тощо) математичні екскурсії, шкільні наукові конференції, підготовка учнями доповідей, рефератів, виготовлення математичних моделей тощо.

Названі форми позакласної роботи часто перетинаються, і тому їх складно чітко розмежувати. Традиційними і найбільш поширеними формами позакласної роботи з математики є:

- математичні гуртки;
- математичні вікторини, конкурси та олімпіади;
- інтелектуальні ігри;
- випуск математичних газет, стінгазет, електронних газет;
- математичні вечори;
- математичні екскурсії;
- позакласне читання математичної літератури;
- математичні реферати;
- факультативи;
- тиждень математики [1].

Ці форми роботи опрацьовані в кожній школі, але зараз, щоб активізувати позакласну роботу, вчителі шукають і знаходять нові форми позакласної роботи з математики:

- конкурс "Нумо, математико";
- гра "Математичний бій";
- математична вікторина "Що, де, чому?";
- математичний хокей;
- математичний цирк;
- подорож з математикою;
- математичний ярмарок;
- "Брейн - ринг";
- гра "Поле чудес";
- гра "О, щасливчик!", тощо.

Одним із основних форм позакласної роботи є математичні гуртки. Саме вони дають змогу задовольнити інтереси учнів, які виходять за рамки навчальної програми. Тут поглиблюють набуті знання, розглядають задачі – головоломки, більш розширено опрацьовують теми, на які було виділено мало часу на уроках (задачі на побудову, обрахунки на комп'ютерах з використанням елементів програмування, задачі на кмітливість, математичні ігри і фокуси, розвиток поняття про число, геометричні побудови за допомогою лінійки, циркуля, циркуля та лінійки, поняття чотиривимірного простору та інші), навчаються самостійно опрацьовувати математичну літературу.

При раціональній побудові та організації роботи гуртка не лише розвивається логічне мислення, а й пригадується учнями все, що раніше вивчалось, що допоможе закріпити пройдений матеріал.

Організація гуртків – це засіб, який дозволяє задовольнити дитячу цікавість. Але це тільки одна з причин, що викликають необхідність організації гуртків. Математичний гурток в процесі своєї роботи допомагає розширенню світогляду учнів в різних областях елементарної математики.

Створювати гурток слід тоді, коли у вчителя розроблено план конкретних заходів, до виконання яких можна залучити школярів. Для дітей привабливо не стільки те, що вони почують, дізнаються нового в гуртку, а те,

що нового вони будуть робити самостійно. Звідси випливає, що до підготовки чергового заняття необхідно залучати самих учнів. На заняттях гуртка можуть бути присутні не лише його члени, але й усі бажаючі. Методи проведення занять в гуртку можуть бути такі: короткі повідомлення членів гуртка або виклад у формі інсценування, ребусів, загадок, задач підвищеної складності, розв'язання логічних вправ, екскурсії, спостереження за трудовою діяльністю дорослих у зв'язку з екскурсіями на виробництво, виготовлення наочних посібників, випуск газет, дидактичні ігри і т.д.

Математичні фокуси зацікавлюють учнів до позакласних занять, самостійного пошуку цікавих новинок. Велике значення має залучення дітей до історичних задач та відомостей про математиків, адже на уроках для цих тем виділено лише декілька хвилин.

Така форма позакласної роботи як математичні твори дозволяє охопити великий обсяг матеріалу, спонукає учнів до самостійності та творчості. Це відбувається завдяки вчителю, який добре продумує ряд тем, підбирає літературу до кожної з них та дає учням різні теми і відповідні матеріали. Класу пропонується написати твори залежно від змісту навчального матеріалу за четверть. В кінці проводиться математичний вечір, на якому учні виступають зі своїми доповідями та звітують про виконану роботу.

Також на математичних вечорах проводять математичні вікторини. Вони приваблюють вчителів тим, щоб на їхню підготовку можна залучати учнів і не витрачати багато часу. У них можуть брати участь усі бажаючі учні, оскільки завдання даються різного рівня і кожний може себе виявити як індивідуальність.

Вікторини проводять з метою підвищення інтересу учнів до математики, розкриттю творчого потенціалу, свободи вибору способів розв'язування завдань. Окрім того вікторини сприяють виявленню любителів математики з послідовним залученням їх до математичних гуртків, де можуть розкрити свої здібності, переваги, бажання.

Вікторина може включати:

1. Завдання для повторення однієї певної теми.
2. Завдання для повторення основних розділів із всіх вивчених тем.
3. Завдання, взяті з основних розділів вивчених тем, з включенням елементів нестандартності.

Наприкінці навчального року одноразово в школі проводять олімпіаду з метою збільшення інтересу дітей до математики, що сприяє розширенню їх кругозору, виявляє найбільш здібних і підготовлених учнів, підводить підсумки роботи математичних гуртків або клубу юних математиків. Олімпіади спонукають учнів до організованості, зміцненню волі до перемоги, виробляють самостійність та чіткість мислення.

Такий вид позакласної роботи дає змогу позмагатись не лише учням однієї школи, а й в межах району, міста, області, що розширює спілкування учнів з однолітками, порівнювати свої знання й уміння з іншими [2].

Математичні екскурсії – це також один із видів позакласної роботи, коли вчитель з учнями виходить на вулицю, природу, виробництво. Мета екскурсії: познайомити учнів з різними видами вимірювання на місцевості, з приладами вимірювання, роботою обчислювальних центрів. Під час екскурсій можна виміряти середню довжину кроку; навчитись визначати довжину на око, а потім перевірити, хто дав більш правильну відповідь за допомогою приладів; виміряти ширину ріки, не перепливаючи на інший бік; виміряти висоту башти; виконати складні обчислення на комп'ютері. Перед екскурсією вчитель обов'язково повинен сам відвідати місце, на яке він планує відвести своїх учнів, спланувати екскурсію як навчальну роботу з математики.

Математичні газети в паперовому та електронному видах є найбільш ефективним масовим позакласним заходом, так як привертають увагу більшості учнів. Їх видає комітет математичного гуртка з певною періодичністю. У них висвітлюють роботу гуртка, розміщують доповіді гуртківців у скороченому вигляді на різні теми, відомості про важливі відкриття в житті математики, питання з історії даного предмету, задачі, які склали учні, доведення теорем чи формул членами гуртка. Також на сторінках

газети можна оголосити конкурс на розв'язування цікавих і складних задач, розмістити вправи для підготовки до участі в олімпіаді або завдання першого туру олімпіади.

У наступному номері газети оголошують результати проведених конкурсів та олімпіад, прізвища їх переможців, відповіді до раніше запропонованих задач. Приклади їх розв'язання.

На сторінках газети також можна розміщувати математичні кросворди, ребуси, фокуси, задачі-жарти, головоломки та інше.

У деяких школах практикується випуск, крім періодичних газет, математичних фотогазет, в яких розміщують фотографії видатних математиків, найкращих учнів-математиків школи, переможців конкурсів, олімпіад, старовинних книг тощо. До кожної фотографії додають короткий опис, пояснення. Також у такій роботі можна розмістити зображення перерізів многогранників та тіл обертання.

Математичні газети завжди привертають увагу більшості учнів, а тому є найбільш ефективним масовим популяризатором математичних знань серед школярів. Газета може мати такі розділи:

- передова;
- науковий відділ;
- історичний відділ;
- математичні проблеми;
- різні задачі (на конкурс, до олімпіад та ін);
- нова література з математики;
- запитання і відповіді;
- висловлювання про математику [9].

На сьогодні більшість шкіл мають можливість користуватись Інтернетом, мають свої сайти, на котрих розміщується інформація, в тому числі і про роботу математичного гуртка у вигляді електронної газети. Такий вид газети досить популярний серед користувачів не тільки в межах школи, а й у більш широкій аудиторії. Зокрема формується певна спільнота учнів, що

цікавляться математикою. Електронна газета практично ліквідує інформаційні межі і робить навчальну роботу гуртку відкритою для суспільства.

Інтелектуальні ігри – це також один з видів позакласної роботи. Вони дають можливість задовольнити інтереси та запити учнів. Інтелектуальна гра спрямована на розвиток пізнавального інтересу, дає можливість краще проявити свої здібності. Головною умовою такого виду позакласної роботи є виявлення переможців, нагородження їх грамотами та призами, що стимулює учнів до зацікавлення та поглиблення своїх знань та вмінь у математиці.

Давно встановлено, що окремі вправи з цікавої математики, математичні ігри можуть давати дітям таке ж задоволення та бути засобом розумного відпочинку, як і елементи цікавого матеріалу, пов'язаного зі спортом, літературою та іншими областями науки, мистецтва. Треба лише вміло добирати математичні завдання, щоб вони викликали цікавість у школярів, адже пробудити інтерес до математики – найголовніша мета, до якої прагне вчитель у зв'язку з завданням підвищення рівня процесу навчання математиці [12; 18].

Доцільно використовувати хвилини цікавої математики. З них звичайно і зароджується інтерес дітей до позакласних занять з математики, бажання брати участь в роботі гуртка, у випуску газети та інших видах роботи з математики. Коли, в яких умовах вчитель може проводити хвилини цікавої математики? Для цього можуть бути використані відпочинок в групі подовженого дня, окремі моменти під час прогулянок з групою учнів, деякі класні збори, хвилини відпочинку під час екскурсій в природу і т. ін.

Оскільки мова йде про хвилини цікавої математики, то для поживлення і підтримання інтересу до завдань останні повинні задовольняти таким умовам:

- 1) бути несхожими на звичайні математичні завдання, пропоновані на уроках;
- 2) зміст завдань має бути зрозумілим дітям;
- 3) розв'язання завдань доступне кожному з присутніх дітей;

- 4) відповіді повинні отримуватися швидко; якщо необхідні обчислення, то вони повинні виконуватись лише усно.

Хвилини цікавої математики проводяться епізодично. Вони можуть плануватись учителем у зв'язку з поставленою метою, наприклад, викликати у дітей інтерес до організації математичного гуртка, до випуску газети і т.д.

Одним із основних видів позакласної роботи є факультативні заняття. Їх основна мета полягає в тому, щоб, враховуючи інтереси і нахили учнів, розширити і поглибити вивчення програмного матеріалу; ознайомити учнів з деякими загальними математичними ідеями і методами; розвивати математичні здібності учнів; прищеплювати учням зацікавленість та смак до самостійних занять з математики; виховувати і розвивати ініціативу та творчість, показати застосування математики на практиці.

1.4. Факультативні заняття як форма позакласної роботи

Факультативи займають особливе місце серед позакласних форм, оскільки спрямовані на поглиблення знань, розвиток логічного мислення, допитливості та кмітливості, закріплення інтересу до математичної науки [4; 6]. Вони дозволяють залучити як талановитих учнів, так і тих, хто пасивно проявляє себе на уроках, і навіть учнів, далеких від предмету, поступово формуючи інтерес до математики.

Історично факультативи були впроваджені в середню освіту для створення умов індивідуалізації навчання та диференціації змісту освіти. У середині 1960-х років, у зв'язку зі стрімким розвитком науки і техніки, виникла потреба поглибленого вивчення фізико-математичних, природничих та гуманітарних дисциплін. Постановою ЦК КПРС і Ради Міністрів СРСР від 10 листопада 1966 р. у навчальний план були впроваджені факультативні заняття за вибором [25]. Це дозволило поєднати «ядро» знань, обов'язкових для всіх учнів, та «оболонку» додаткових знань, що сприяло розвитку пізнавальних можливостей і інтересів учнів [15; 31].

Методи факультативних занять включають лекції, семінари, дискусії, розв'язування задач, підготовку рефератів та доповідей. Важливо, що

факультативи формують профорієнтаційні навички, знайомлять учнів із прикладними методами математики, зокрема використанням ЕОМ, та стимулюють самостійне вивчення нових тем [11].

Сьогодні факультативи проводяться за спеціальними програмами (МОН або авторськими), за добровільним вибором учнів, з урахуванням їхніх інтересів та нахилів. Вони можуть бути:

- з поглибленого вивчення навчальних предметів;
- з додаткових дисциплін;
- міжпредметними;
- з отриманням спеціальності.

Факультативи забезпечують взаємозв'язок між змістом і методами навчання, активне використання знань на уроках та ефективний розвиток пізнавальних і творчих здібностей учнів.

1.5. Форми і методи роботи вчителя на факультативах з математики

При виборі форм організації навчального процесу і методів роботи на факультативних заняттях необхідно враховувати зміст факультативного курсу, рівень розвитку і підготовленості учнів, інтерес учнів до визначених розділів предмета.

Одна з найголовніших вимог до методів полягає в тому, щоб вони стимулювали активну роботу думки учнів, розвивали самостійність їхнього мислення, сприяли творчій різнобічній діяльності.

Залежно від дидактичної мети факультативи поділяються на:

- а) теоретичні;
- б) практичні;
- с) комбіновані.

Теоретичні факультативні заняття проводяться у формі лекцій, семінарських занять, науково-теоретичних конференцій.

Практичні - у формі практичних занять із формування пошукових навичок та вмінь, необхідних для розв'язування технічних задач, самого розв'язку їх, обговорення шляхів розв'язку та результатів, підбиття підсумків.

Комбіновані - у формі науково-практичних конференцій і такого ж характеру уроків. Їхня структура визначається довільністю. Найчастіше має такий вигляд:

- 1) самостійне висвітлення учнями необхідних теоретичних питань;
- 2) індивідуальне виконання дослідження;
- 3) підведення підсумків заняття.

На факультативних заняттях можуть бути використані наступні методи навчання: лекції, бесіди, дискусії, самостійні роботи як практичного характеру, так і роботи з додатковою літературою.

Застосовуючи кожний з методів, можна одержати різні результати. Зупинимось на деяких методах, що найбільше часто застосовуються на факультативних заняттях даного профілю.

Лекції. На факультативних заняттях можна частину матеріалу викладати лекційно, особливо питання, що вимагають розкриття широких закономірностей явищ природи, а також матеріал узагальнюючого характеру. Лекція повинна бути побудована так, щоб викликати інтерес до її змісту, збудити творчу думку, привести до пошуків відповіді на багато питань. Такі знання діючі. Не можна перетворювати лекцію в зведення готових наукових істин, які можна тільки зрозуміти і запам'ятати без підкріплення їх загальними ідеями і без показу перспектив розвитку науки. Такі знання малоефективні .у тому розумінні, що вони не ведуть до творчої діяльності і наукових пошуків, а отже, і не розвивають.

Відомий психолог Л. Виготський з цього приводу писав: « ...тільки те навчання є гарним, котре забігає вперед розвитку» [10, с.65], тобто стимулює перехід до наступного його етапу. Відсутність цієї важливої умови негативно позначається на формуванні особистості. Ця думка з усією визначеністю висловлюється в тій же роботі. Особливе значення для успішної роботи учнів на лекції має правильне виокремлення основних питань і активізація пізнавальної діяльності школярів. Завдання необхідно формулювати так, щоб воно було зрозумілим, цікавим і вимагало відомої напруги думки при рішенні.

Завдання повинне бути посильним і в той же час не дуже легким. Те ж відноситься і до бесіди. Вона повинна базуватися на відомому матеріалі й одночасно з цим включати інформацію, що повідомляє нові факти.

Самостійна робота. При організації учнів для самостійної роботи можуть бути застосовані різні форми навчання: індивідуальні, групові, фронтальні. Фронтально розглянувши теоретичний матеріал і роз'яснивши суть самостійної роботи, вчитель організує робочі групи. Як правило, число робочих груп і завдання цим групам визначаються наявністю матеріалу й устаткування, інтересами учнів і рівнем їхньої самостійності. Різні групи одержують різні завдання. Тут зручно користатися письмовими інструкціями, що оформляються у вигляді інструктивної картки.

В умовах факультативних занять школярі виявляють підвищену цікавість до навчальної роботи, тому варто забезпечити роботою всіх учнів, особливе виконання експериментальної частини завдання всіма членами групи.

Самостійна робота на факультативних заняттях повинна займати більше місце, ніж на всіх інших навчальних заняттях, але і трохи відрізнятися від самостійної роботи з обов'язкового курсу середньої школи.

При виборі методів і прийомів навчання на факультативних заняттях необхідно враховувати зміст факультативного курсу, рівень розвитку і підготовленості учнів, їх інтерес до тих чи інших розділів програми [20].

Як і в роботі з математичними класами, на факультативах можна використовувати різні форми і методи проведення занять.

Часто факультативні заняття проводять за таким планом:

1. Знайомство з матеріалом (доповідає вчитель чи хтось з учнів).
2. Самостійна робота учнів із завданнями теоретичного та практичного характеру (завдання даються всім однакові).
3. Колективне обговорення розв'язків задач, порівняння способів розв'язків, узагальнення пошуку нових шляхів, перенесення засвоєних прийомів та методів на інший навчальний матеріал

програмного чи факультативного курсу з математики або суміжних предметів.

4. Розв'язування задач підвищеної складності.

При цьому вчителю дозволено працювати за будь-якою з указаних програм, змінювати зміст факультативних занять, міняти порядок вивчення тем або скласти програму самостійно, але треба пам'ятати, що зміст факультативу повинен поглиблювати та доповнювати основний курс.

І, як на звичайних уроках, на факультативних заняттях треба не лише дбати про знання і навички учнів, а й про виховання наукового світогляду, культури поведінки, мислення, та культури спілкування.

1.6. Аналіз сучасного стану шкільної програми щодо проведення факультативних занять з математики

Ще в ХУІІ ст. відомий англійський філософ Френсіс Бекон підкреслював: «...у природі існує багато такого, чого не можна ні досить глибоко зрозуміти, переконливо довести, ні досить уміло й надійно використати на практиці без допомоги математики» [32, с. 94]. Але математичні знання потрібні не лише тим, хто в майбутньому буде займатися дослідженнями в галузі математики, фізики чи інженерної справи, а й тим, хто стане юристом, агрономом менеджером виробництва, біологом чи лікарем, а також кваліфікованим робітником.

Як зазначено в «Національній доктрині розвитку освіти України ХХІ ст.», важливим завданням сучасної навчально-виховної системи є формування гармонійної, всебічно розвиненої, соціально адаптованої та здатної до самореалізації у суспільстві особистості. На сучасному етапі особливо актуальним стає питання творчого її розвитку.

Вивчення математики у 2024 - 2025 н.р. має забезпечувати реалізацію Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти, затвердженого постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. № 1392. Виконання вимог державного стандарту є обов'язковим для всіх закладів загальної середньої освіти незалежно від підпорядкування, типів і

форми власності. Заклади загальної середньої освіти II ступеня реалізують освітні програми на основі Типової освітньої програми (Наказ МОН України №405 від 20.04 2018 р. “Про затвердження типової освітньої програми закладів загальної середньої освіти II ступеня”), а заклади загальної середньої освіти III ступеня - на основі «Типова освітня програма закладів загальної середньої освіти III ступеня», затвердженої наказом МОН України від 20.04.2018 №408 (у редакції наказу МОН України від 28.11.2019 №1493). Дані документи окреслюють рекомендовані підходи до планування й організації у школах єдиного комплексу освітніх компонентів.

Навчання математики у загальноосвітніх навчальних закладах реалізується за програмами [21]:

- 5-9 класи – «Математика. Навчальна програма для учнів 5-9 класів загальноосвітніх навчальних закладів» ;
- 8-9 клас (з поглибленим вивченням математики) – «Навчальна програма для поглибленого вивчення математики у 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів» ;
- 10-11 класи – Навчальні програми для 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Математика.

Ознайомитись із програмами можна на сайті Міністерства освіти і науки України. Програми позбавлені жорсткого поурочного поділу, вчителі можуть обирати послідовність розкриття навчального матеріалу в межах окремої теми, але так, щоб не порушувалась логіка його викладу. Обласні, районні та міські методичні кабінети (об'єднання) не можуть втручатися в такі питання, оскільки це винятково компетенція вчителя. Навчальні програми укладено на компетентнісній основі. Акцент зроблено на формування практичних навичок для подальшого їх застосування у реальному житті. Навчання математики в основній та старшій школі передбачає формування предметної математичної компетентності, сутнісний опис якої подано у розділі «Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності» програми. Крім того, навчання математики має зробити певний внесок у формування ключових

компетентностей.

Найактуальніше на сьогодні завдання шкільної методики математики – відбір змісту освіти, який враховував би соціальні потреби суспільства і цілі, які воно ставить перед вивченням цього предмета. Особливого тут значення набуває проблема цілісності змісту: правильне відображення компонентів математичної науки в підручниках і психолого - дидактичне обґрунтування цього відображення, спільні наукові підходи до трактування понятійного апарату, дотримання концентричного розвитку змістовно-методичних ліній і забезпечення їх наступності на різних ступенях навчання та ін.

Сьогодні гостро постало питання розвитку самостійності і творчої активності учнів у позаурочній роботі на основі диференційного навчання та індивідуального підходу, а так само підготовки і проведення різних видів позакласної діяльності: вікторин, конкурсів, математичних ранків і вечорів, математичних тижнів.

Індивідуальний підхід до учнів на уроках, практика позакласної роботи сприяють розвитку і становленню особистості в умовах єдиної школи, підвищенню рівня навчання.

Сама участь учня в факультативі, у гуртковій роботі, в математичних змаганнях і олімпіадах вже є диференціацією навчання в школі. Тим не менше і до цієї категорії школярів доцільно для максимального розвитку їхніх індивідуальних здібностей та інтересів, задоволення потреб широко застосовувати диференціацію навчання на факультативних і гурткових заняттях та індивідуальний підхід в організації і керівництві їх самонавчання.

У системі освіти математика втратила роль бар'єру для подальшого навчання, доступу до керівництва та відповідальних посад для тих, хто зовсім не хочуть і не можуть вчитись, не вміють думати, не здатні приймати раціональні рішення. Це значно знижує якість управління, стратегічного планування, прийняття рішень, експертної оцінки - на особистому, і на державному рівні. Результатом цього є в тому числі й неякісне будівництво, і масова участь населення у різних фінансових аферах. На керівному та

експертному рівні виявляється відомий ефект Данніга-Крюгера, коли некомпетентні люди твердо впевнені у своїй компетентності, приймають нераціональні та безвідповідальні рішення, просувають інших некомпетентних людей та принижують компетентних, репродукують та культивують невігластво на наступних рівнях та в наступних поколіннях.

Нині в умовах світового співробітництва, інтеграції економіки, виробництва, наукових досліджень розвинуті країни всього світу, у тому числі й держава Україна, прагнуть до підвищення свого інтелектуального потенціалу. Тому потрібний високий рівень математичної підготовки.

У зв'язку з цим підвищується відповідальність і роль вчителя математики, посилюються вимоги до його власної математичної й методичної підготовки. Перебудова шкільного курсу математики й методики його навчання здійснюється під впливом сучасних соціальних вимог суспільства в напрямку гуманізації й диференціації навчально-виховного процесу, гуманітаризації змісту навчання.

На мою думку, завдяки факультативним заняттям були створені реальні передумови для більш динамічного і продуктивного розвитку інтересів і нахилів учнів, диференційованого підходу до формування їхніх творчих здібностей і обдарувань.

Таким чином, сьогодні статус факультативних занять істотно підвищився. Вони покликані забезпечувати:

- підготовку обдарованих старшокурників до централізованого тестування;
- підготовку обдарованих учнів до олімпіад та конкурсів;
- загальнокультурний розвиток учнів;
- залучення учнів до дослідницької діяльності;
- корекцію прогалин у знаннях і вміннях учнів.

Висновки до розділу

Аналіз теоретичних джерел, психолого-педагогічних передумов та практичних аспектів організації позакласної роботи з математики дозволяє зробити кілька важливих висновків.

По-перше, позакласна робота з математики є важливою складовою навчально-виховного процесу, оскільки сприяє розвитку логічного мислення, просторових уявлень, алгоритмічної культури, математичних здібностей, а також формує вміння встановлювати причинно-наслідкові зв'язки, обґрунтовувати рішення та моделювати різні ситуації. Вона доповнює уроки, поглиблює знання, стимулює інтерес до предмета та формує в учнів творчі та організаторські навички.

По-друге, ефективність позакласної роботи визначається психолого-педагогічними факторами: внутрішньою мотивацією та пізнавальним інтересом учнів, розвитком самостійності та ініціативності, зв'язком із навчальною діяльністю, педагогічною підтримкою когнітивного розвитку, соціально-педагогічними аспектами колективної роботи та формуванням творчого підходу до розв'язування математичних задач.

По-третє, розмаїття форм позакласної роботи (математичні гуртки, факультативи, вікторини, інтелектуальні ігри, математичні газети, екскурсії, олімпіади та ін.) дозволяє враховувати інтереси та здібності учнів різного рівня. Факультативи, як особлива форма позакласної роботи, забезпечують поглиблене вивчення навчального матеріалу, розвиток логічного та алгоритмічного мислення, стимулюють дослідницьку активність і самостійне навчання, а також формують профорієнтаційні навички.

Таким чином, позакласна робота з математики виступає ефективним засобом розвитку математичних здібностей, творчого і критичного мислення, пізнавальної активності та соціальних компетентностей учнів. Вона створює умови для індивідуалізації навчання, підвищення мотивації та зацікавленості школярів, а також сприяє формуванню гармонійно розвиненої особистості, готової до застосування математичних знань у практичній діяльності та

подальшому навчанні.

РОЗДІЛ 2.

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ

2.1. Історичні відомості про алгебраїчні рівняння вищих степенів

Квадратні рівняння в Давньому Вавилоні

Необхідність розв'язувати рівняння ще в давнину була викликана потребою розв'язувати задачі, пов'язані із знаходженням площі земельних ділянок і з земельними роботами військового характеру, а також із розвитком астрономії і самої математики. Рівняння вміли розв'язувати близько 2000 років до н.е. вавилоняни. Використовуючи сучасний алгебраїчний запис, можна говорити, що в їх клинописних текстах зустрічаються, крім неповних, і такі, наприклад, повні квадратні рівняння:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}, \quad x^2 - x = 14\frac{1}{2}$$

Правило розв'язування цих рівнянь, викладене у вавилонських текстах, співпадає суттєво із сучасним, хоча невідомо, яким чином дійшли вавилоняни до цього правила. Майже всі знайдені до цього часу клинописні тексти наводять лише завдання з розв'язками, викладеними у вигляді рецептів, без вказівок відносно того, яким чином вони були знайдені.

Зустрічаються задачі, що зводяться до рівнянь 3-го і 4-го степеня та системи трьох і більше рівнянь[24].

Рівняння в Індії

Задачі на квадратні рівняння зустрічаються вже в астрономічному тракті. "Аріабхаттіам", що був складений в 499 році індійським математиком і астрономом Аріабхаттою. Інший індійський вчений Брахмагупта (VII ст.) виклав загальне правило розв'язування квадратних рівнянь, зведених до єдиної канонічної форми:

$$ax^2 + bx = c, \quad a > 0$$

У рівнянні коефіцієнти, крім «а», можуть бути і від'ємними. Правило Брахмагупти суттєво співпадає з теперішнім[24].

Рівняння в Італії

XVI ст. в Італії характеризувалося специфічними звичаями в науковому житті. Право на професорську посаду та пріоритети різного роду відкриттів тоді захищалися на публічних наукових диспутах, які часто перетворювалися на азартні турніри. За цих умов деякі вчені довгий час тримали в таємниці свої відкриття. Найбільша суперечка того часу виникла між італійськими математиками Н. Тарталья і Д. Кардано за пріоритет відкриття правила розв'язання кубічного рівняння.

Вперше емпіричний спосіб розв'язування рівняння 3-го степеня знайшов професор Болонського університету Сципйон дель Ферро.

$$x^3 + px = q, \text{ де } p, q - \text{додатні числа.}$$

Він не опублікував це правило, а розповів його своєму учню Антоніо Марі Фіаре. На 22 лютого призначили диспут (1553р.) між Н. Тарталья і А. Фіаре, на якому вони в присутності нотаріуса Мали обмінятися тридцятьма задачами, а через 50 днів подати розв'язання. Ще до турніру Тарталья дізнався, що Фіаре знає правило розв'язання кубічних рівнянь виду (1.1.2), а тому, імовірно, запропонує розв'язати саме такі. Це послужило стимулом для інтенсивної роботи Тартальї у розв'язанні кубічних рівнянь. За 9 днів до строку він знайшов способи розв'язання трьох видів кубічних рівнянь. Це й принесло йому перемогу над Фіаре, який не зміг розв'язати жодної запропонованої задачі.

У результаті диспуту Н. Тарталья став відомим і отримав можливість займатися улюбленою справою. Але таємницю свого відкриття приховував.

Одночасно з Н. Тарталья розв'язуванням кубічних рівнянь займався Дж. Кардано. Ознайомившись з результатами Тартальї, він опублікував їх у своїй роботі "Велике мистецтво або про правило алгебри" (1545 р.). В цій книжці подавалося і розв'язання в радикалах рівнянь 4-го степеня. Частина цього відкриття Кардано приписував своєму учню Л. Феррарі.

Як бачимо, кожен з трьох математиків зробив свій внесок у розв'язання кубічних рівнянь в радикалах, а тому формулу, що зараз носить ім'я Кардано, справедливо було б назвати формулою Феррарі-Тарталья-Кардано.

Розв'язування рівнянь 4-го степеня методом Феррарі зводилося до знаходження кореня допоміжного кубічного рівняння і коренів рівняння 2-го степеня. Цей підхід і використав Дж. Кардано.

Кардано систематизував методи розв'язування рівнянь степеня не вище 4-го, детально розглянув різні окремі випадки; показав можливість зведення рівнянь 3-го і 4-го степенів до виду, що не містить членів відповідно 2-го і 3-го степенів; вказав на залежність між коренями і коефіцієнтами рівняння, а також на подільність многочлена на вираз $x - a$, де a – його корінь.

Останнім значним італійським алгебраїстом того періоду був Рафаель Бомбеллі. Він розглядав рівняння вищих степенів лише з додатними коефіцієнтами, але досить винахідливо маніпулював коренями з від'ємних чисел.

Рівняння у Європі XIII – XVIII ст.

Формули розв'язування квадратних рівнянь, побудовані за зразком аль-Харезмі, уперше в Європі були викладені в «Книзі абака», написаній у 1202 році італійським математиком Леонардо Фібоначчі. Задачі з цього твору згодом увійшли майже до всіх європейських підручників XVI–XVII століть і частково використовувалися в навчальній літературі XVIII століття.

Загальне правило розв'язування квадратних рівнянь, зведених до єдиного канонічного вигляду $x^2 + bx + c$, при будь-яких комбінаціях знаків коефіцієнтів b, c було сформульовано у Європі лише в 1544 р. М. Штифелем.

Виведення формули розв'язання квадратного рівняння загального вигляду було у Вієта, хоча Вієт визнавав лише додатні корені. Італійські математики Тарталья, Кардано, Бомбеллі серед перших в XVI ст. враховують, крім того, від'ємні корені. Лише в XVII ст., дякуючи працям Жирара, Декарта, Ньютона, спосіб розв'язування рівнянь приймає сучасний вигляд.

Ще одну цікаву задачу алгебри розглядав Р. Декарт у своїй "Геометрії". Це задача представлення многочлена з цілими коефіцієнтами у вигляді добутку многочленів нижчих степенів. Він також встановив, що корені рівняння 3-го степеня з цілими коефіцієнтами і старшим коефіцієнтом, що дорівнює одиниці, можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Тобто рівняння можна розв'язати в квадратних радикалах тоді, і тільки тоді, коли ліву частину його можна представити у вигляді добутку множників 1-го і 2-го степеня, вказувалась і умова розв'язності в радикалах 4-го степеня.

Загальний метод розв'язування рівнянь у Р. Декарта полягає в побудові їх коренів як координат належним чином обраних алгебраїчних кривих. Ці криві виражаються алгебраїчними рівняннями з двома біжучими координатами. В кінці третьої книги Декарт графічно розв'язує рівняння 3-го, 4-го, 5-го і 6-го степенів і вказує, що кількість дійсних коренів збігається з кількістю спільних точок кривих.

Наприклад, щоб розв'язати рівняння 4-го степеня $z^4 = pz^2 - qz + r$, він покладав $z^2 = x$ і отримував рівняння кола $x^2 + z^2 - (p+1)x + qz - r = 0$, яке можна накреслити. Абсциси точок перетину кола з параболою $z^2 = x$ - корені заданого рівняння.

У XVIII ст. в алгебрі основні зусилля математиків були спрямовані на розв'язання трьох проблем: 1) доведення основної теореми алгебри; 2) розв'язування в радикалах алгебраїчних рівнянь степеня вищого за 4-й; 3) розв'язування систем алгебраїчних рівнянь з кількома невідомими.

Зупинюся на другій проблемі - розв'язуванні в радикалах алгебраїчних рівнянь вищих степенів. В кінці XVIII ст. від пошуків необхідних форм ірраціональностей вчені перейшли до пошуків спростування самої можливості розв'язування рівнянь вищих степенів у радикалах.

Ж. Лагранж показував, що всі розглянуті ним існуючі методи зводяться до встановлення залежності розв'язку запропонованого рівняння від розв'язку

деякого допоміжного рівняння, корені якого y_k є лінійною комбінацією коренів x_n даного рівняння і степенів кореня n -го степеня з одиниці.

Розв'язування рівняння можна спростити, якщо степінь допоміжного рівняння менший степеня вихідного рівняння. А для степенів більших за 4, допоміжне рівняння має степінь більший від степеня вихідного рівняння, тому пониження не відбувається. Він прийшов до такого висновку: "Якщо алгебраїчне розв'язання рівняння степеня більшого за 4 можливе, то воно повинно залежати від деяких функцій коренів, відмінних від тих, які розглядалися раніше". Запропонований Лагранжем метод не давав можливості розв'язувати рівняння степеня $n \geq 5$, але сприяв розумінню того, що розглянуті групи підстановок коренів рівняння є "шляхом до розв'язання". Бо на цьому шляху він знайшов розв'язки рівнянь з циклічною групою підстановок.

Оскільки розв'язати рівняння алгебраїчно означає виразити його корені у вигляді алгебраїчних функцій його коефіцієнтів, Н. Абель шукав загальний вигляд алгебраїчних функцій, класифікуючи їх у відповідності з кількістю радикалів, які вони містять та їх розташуванням у виразі. Потім він досліджував, яким умовам має відповідати розв'язане алгебраїчне рівняння, тобто рівняння, корені якого є алгебраїчними функціями, раніше визначеними і класифікованими.

Н. Абель дійшов висновку, що завжди можна надати кореню таку форму, щоб усі алгебраїчні функції, з яких він складається, можна було виразити як раціональні функції від коренів даного рівняння. Свої міркування він закінчив доведенням того, що будь-який раціональний вираз від 5 змінних, що приймає 5 різних значень, повинні мати вигляд: $r_0 + r_1x + r_2x^2 + r_3x^3 + r_4x^4 + r_5x^5$, де r_i - симетричний вираз від 5 величин, а x — одна з них. Після цього він зміг зробити висновок про нерозв'язність у радикалах рівняння 5-го степеня загального вигляду.

Н. Абель не встиг повністю завершити свої дослідження, а тому не зміг дати загальний критерій розв'язності рівнянь з числовими коефіцієнтами в

радикалах. Це здійснив французький математик Е. Галуа. Відомий критерій Галуа розв'язності рівняння в радикалах сьогодні можна сформулювати так: "Рівняння $f(x)=0$ розв'язане тоді, і тільки тоді, якщо його група Галуа є розв'язною групою".

Таким чином, Е. Галуа не лише поставив крапку в розв'язанні у радикалах рівнянь n -го степеня, а й започаткував нові напрями розвитку алгебри. З цього приводу видавці Галуа писали: "Його думка була не з тих, від яких відштовхуються, але з тих, до яких ще потрібно дорости"[24].

2.2. Властивості алгебраїчних рівнянь вищих степенів

Алгебраїчне рівняння вищого порядку має такий загальний вигляд:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0 \quad (2.2.1)$$

де $a_0 \neq 0$; x - невідоме; a_0, a_1, \dots, a_n будемо вважати дійсними числами; $n > 2$ – натуральне число.

Якщо $a_0 = 1$, то рівняння називається зведеним. Коренем рівняння є таке значення змінної x , підстановка якого в рівняння робить його тотожною рівністю.

Ліва частина рівняння (2.2.1) – це многочлен n -го степеня відносно x . У загальному вигляді многочлен позначається так:

$$f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_0 \neq 0. \quad (2.2.2)$$

Значення многочлена (2.2.2) при $x = c$, тобто $f(c) = a_0c^n + a_1c^{n-1} + \dots + a_{n-1}c + a_n$, називається частковим значенням многочлена.

Якщо $f(c) = 0$, тобто многочлен $f(x)$ обертається в нуль при підстановці в нього числа c замість x , то c називають коренем многочлена $f(x)$ (або рівняння $f(x)=0$). Тому розглядаючи властивості лівої частини рівняння (2.2.1), тобто властивості многочлена $f(x)$, ми тим самим розглянемо властивості алгебраїчного рівняння вищих степенів[16].

Існує, багато різних типів раціональних рівнянь (Рисунок 2.1) і тому також існує багато методів розв'язування цілих раціональних рівнянь (Рисунок 2.2).

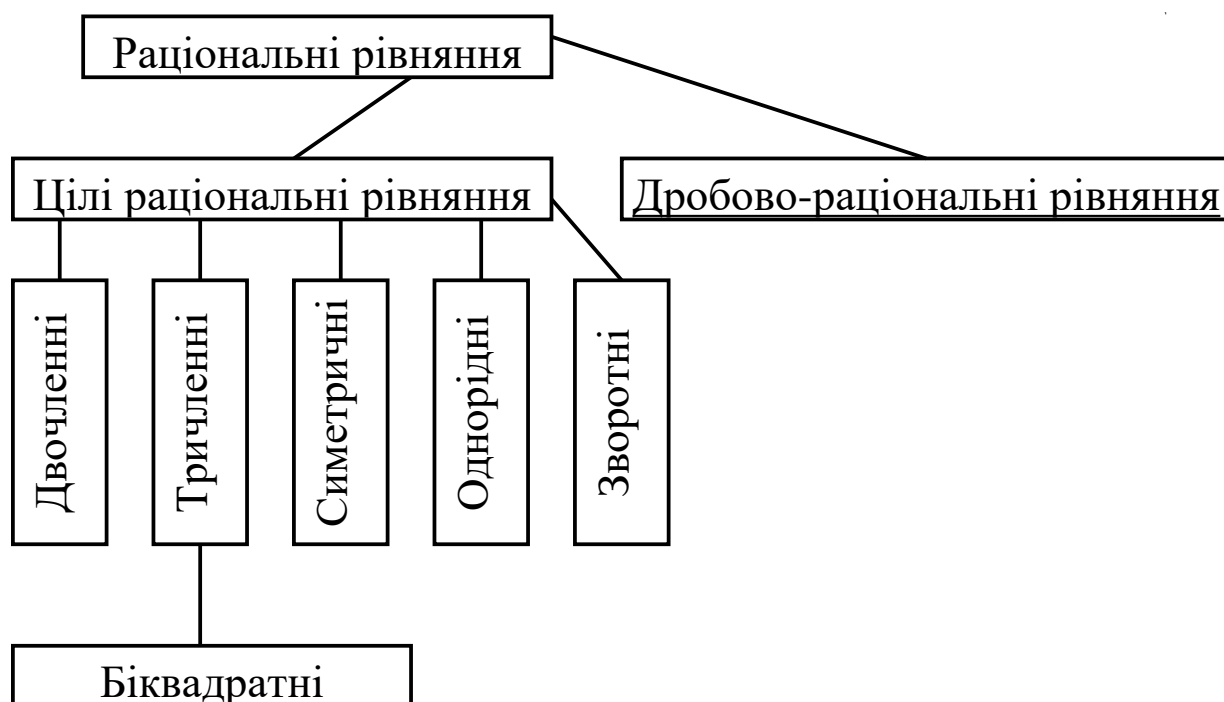


Рис. 2.1. Раціональні рівняння

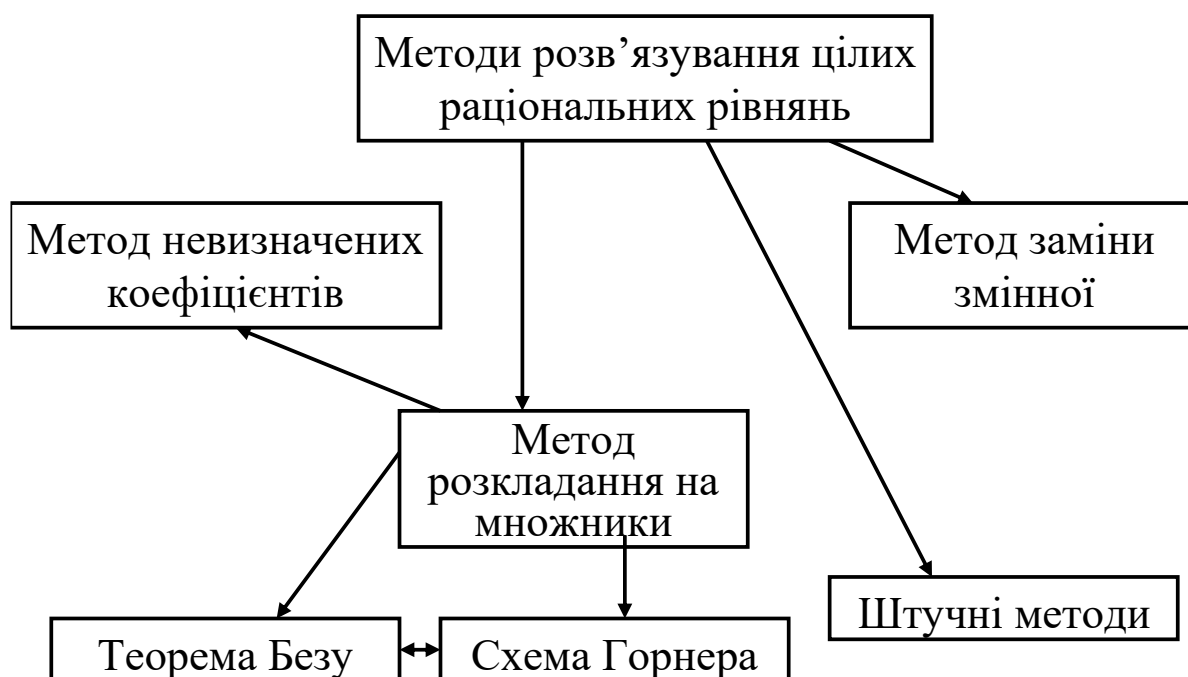


Рис. 2.2. Методи розв'язування цілих раціональних рівнянь

Властивості рівнянь вищих степенів.

1. Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $(x-a)$ дорівнює значенням цього многочлена при $x = a$.

Доведення:

Нехай $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ – даний многочлен степеня n , двочлен $(x - a)$ – його дільник, $Q_{n-1}(x)$ – частка від ділення $P_n(x)$ на $x - a$ (многочлен степеня $n - 1$), R – остача від ділення (R не містить змінної x).

Доведення: Відповідно до правила ділення многочленів із остачею можна записати: $P_n(x) = (x - a) Q_{n-1}(x) + R$.

Звідси при $x = a$: $P_n(a) = (a - a)Q_{n-1}(a) + R = 0 \cdot Q_{n-1}(a) + R = R$.

Отже, $R = P_n(a)$, тобто остача від ділення многочлена на $(x - a)$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = a$, що й потрібно було довести.

З теореми Безу випливають такі наслідки:

Наслідок 1: Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на двочлен $ax + b$ дорівнює значенню цього многочлена при $x = -b/a$, тобто $R = P_n(-b/a)$.

Доведення:

Відповідно до правила ділення многочленів:

$$P_n(x) = (ax + b) \cdot Q_{n-1}(x) + R.$$

При $x = -b/a$:

$$P_n(-b/a) = (a \cdot (-b/a) + b) \cdot Q_{n-1}(-b/a) + R = (-b + b) \cdot Q_{n-1}(-b/a) + R = R.$$

Отже, $R = P_n(-b/a)$, що й потрібно було довести.

Наслідок 2: Якщо число a є коренем многочлена $P(x)$, то цей многочлен ділиться на $(x - a)$ без остачі.

Доведення:

За теоремою Безу остача від ділення многочлена $P(x)$ на $x - a$ дорівнює $P(a)$, а за умовою a є коренем $P(x)$, а це означає, що $P(a) = 0$, що й потрібно було довести.

З цього наслідку теореми Безу видно, що задача розв'язування рівняння $P(x) = 0$ рівносильна задачі виділення дільників многочлена P , маючих перший степінь (лінійні дільники).

Наслідок 3: Якщо многочлен $P(x)$ має попарно різні корені a_1, a_2, \dots, a_n , то він ділиться на добуток $(x - a_1) \dots (x - a_n)$ без остачі.

Доведення:

Проведемо доведення за допомогою математичної індукції за кількістю коренів. При $n=1$ твердження доведено у наслідку 2. Нехай воно доведено для випадку, коли кількість коренів дорівнює k , це означає, що $P(x)$ ділиться без остачі на $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_k)$, де a_1, a_2, \dots, a_k – його корені.

Нехай $P(x)$ має $k+1$ попарно різних коренів. За припущенням індукції $a_1, a_2, a_k \dots, a_{k+1}$, є коренями многочлена, а, отже, многочлен ділиться на добуток $(x - a_1) \dots (x - a_k)$, звідки виходить, що $P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k)Q(x)$.

При цьому a_{k+1} – корінь многочлена $P(x)$, тобто $P(a_{k+1}) = 0$. Отже, підставляючи замість $x - a_{k+1}$, отримуємо правильну рівність:

$$P(a_{k+1}) = (a_{k+1} - a_1) \dots (a_{k+1} - a_k)Q(a_{k+1}) = 0.$$

Але a_{k+1} відмінне від чисел a_1, a_2, \dots, a_k , і тому жоден з чисел $a_{k+1} - a_1, \dots, a_{k+1} - a_k$ не дорівнює 0. Отже, нулю дорівнює $Q(a_{k+1})$, тобто a_{k+1} – корінь многочлена $Q(x)$. А з наслідку 2 виходить, що $Q(x)$ ділиться на $x - a_{k+1}$ без остачі.

$$Q(x) = (x - a_{k+1})Q_1(x), \text{ і тому } P(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k)Q(x) = (x - a_1) \dots (x - a_k)(x - a_{k+1})Q_1(x).$$

Це означає, що $P(x)$ ділиться на $(x - a_1) \dots (x - a_{k+1})$ без остачі.

Отже, доведено, що теорема правильна при $k = 1$, та з її справедливості при $n=k$ випливає, що правильна і при $n = k + 1$. Отже, теорема правильна незалежно від кількості коренів, що й потрібно було довести.

Наслідок 4: Многочлен ступеня n має не більш n різних коренів.

Доведення:

Скористаємося методом від супротивного: якщо би многочлен $P_n(x)$ степеня n мав би більш, ніж n коренів – $n+k$ (a_1, a_2, \dots, a_{n+k} – його корені), тоді за раніше доведеним наслідком 3 він би ділився на добуток $(x - a_1) \dots (x - a_{n+k})$, має степінь $n+k$, що неможливо. Ми отримали протиріччя, отже наше припущення не вірне і многочлен степеня n не може мати більш, ніж n коренів, що й потрібно було довести.

Наслідок 5: Для будь-якого многочлена $P(x)$ і числа a різниця $(P(x) - P(a))$ ділиться без остачі на двочлен $(x - a)$.

Доведення:

Нехай $P(x)$ – даний многочлен степеня n , a – будь-яке число. Многочлен $P_n(x)$ можна представити у вигляді:

$P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + R$, де $Q_{n-1}(x)$ – многочлен, частка від ділення $P_n(x)$ на $(x - a)$, R – остача від ділення $P_n(x)$ на $(x - a)$. Причому за теоремою Безу: $R = P_n(a)$, тобто $P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + P_n(a)$.

Звідси $P_n(x) - P_n(a) = (x - a)Q_{n-1}(x)$, але це і означає ділення без остачі $(P_n(x) - P_n(a))$ на $(x - a)$, що й потрібно було довести.

Наслідок 6: Число a є коренем многочлена $P(x)$ степеня не нижче першого тоді і тільки тоді, коли $P(x)$ ділиться на $(x - a)$ без залишку.

Доведення:

Щоб довести цю теорему потрібно розглянути необхідність, і достатність сформульованої умови.

Необхідність: Нехай a – корінь многочлена $P(x)$, тоді з наслідку 2 $P(x)$ ділиться на $(x - a)$ без остачі.

Таким чином, подільність $P(x)$ на $(x - a)$ є необхідною умовою для того, щоб a було коренем $P(x)$, так як є наслідком з цього.

Достатність: Нехай многочлен $P(x)$ ділиться без остачі на $(x - a)$, тоді $R = 0$, де R – остача від ділення $P(x)$ на $(x - a)$, але за теоремою Безу $R = P(a)$, звідки виходить, що $P(a) = 0$, а це означає, що a було коренем $P(x)$.

Отже, подільність $P(x)$ на $(x - a)$ є достатньою умовою того, щоб a є коренем $P(x)$.

Подільність $P(x)$ на $(x - a)$ є необхідною і достатньою умовою для того, щоб a було коренем $P(x)$, що й потрібно було довести.

Схема Горнера

При діленні многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ на двочлен $(x - a)$ для визначення коефіцієнтів частки застосовується схема, запропонована відомим англійським математиком Горнером. Спосіб обчислення за цією схемою ґрунтується на методі невизначених коефіцієнтів.

Нехай при діленні многочлена $A_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ на двочлен $(x - \alpha)$ дістали многочлен $B_{n-1}(x) = a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-1}$ степеня $n - 1$, з остачею r . За методом невизначених коефіцієнтів маємо:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = (a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1})(x - \alpha) + r,$$

тобто $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-2}x^2 + a_{n-1}x + a_n = a_0x^n + b_1x^{n-1} + b_2x^{n-2} + \dots + b_{n-1}x - a_0\alpha x^{n-1} - b_1\alpha x^{n-2} - \dots - b_{n-2}\alpha x - b_{n-1}\alpha + r$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах рівності, знаходимо:

$$a_1 = b_1 - \alpha a_0,$$

$$a_2 = b_2 - \alpha b_1,$$

$$\dots\dots\dots,$$

$$a_{n-1} = b_{n-1} - \alpha b_{n-2},$$

$$a_n = r - \alpha b_{n-1},$$

звідки дістанемо:

$$b_1 = a_1 + \alpha a_0,$$

$$b_2 = a_2 + \alpha b_1,$$

$$\dots\dots\dots$$

$$b_{n-1} = a_{n-1} + \alpha b_{n-2},$$

$$r = a_n + \alpha b_{n-1}.$$

Відповідний алгоритм обчислення коефіцієнтів частки $B_{n-1}(x)$ і остачі r зручно записати у вигляді схеми:

$$\begin{array}{r|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ & \downarrow & \alpha a_0 & \alpha b_1 & \dots & \alpha b_{n-2} & \alpha b_{n-1} \\ \alpha & a_0 & b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & r \end{array}$$

2. Основна теорема алгебри. Будь-який многочлен n -го степеня у множині комплексних чисел має n коренів, серед яких можуть бути і такі, що дорівнюють один одному (кратні).

3. Будь-який многочлен n -го степеня у множині комплексних чисел можна подати, причому єдиним способом, у вигляді добутку двочленів з точністю до порядку множників:

$$f(x) = a_0(x - x_1)^m(x - x_2)^p \cdots (x - x_k)^r, \text{ де } x_1, x_2, \dots, x_k - \text{ корені многочлена;}$$

 m, p, \dots, r - кратність коренів і $m + p + \dots + r = n$.

4. Якщо многочлен $f(x)$ має комплексний корінь $a + bi$, то він має й спряжений з ним корінь $a - bi$.

5. Будь-який многочлен непарного степеня з дійсними коефіцієнтами має принаймні один дійсний корінь.

6. Якщо зведений ($a_0 = 1$) многочлен $f(x)$ із цілими коефіцієнтами має цілі корені, то вони є дільниками вільного члена.

7. Якщо многочлен $f(x)$ з цілими коефіцієнтами й $a_0 \neq 1$ має корінь $x_0 = \frac{p}{q}$ ($q \neq 0$), де $\frac{p}{q}$ - нескоротний дріб, то p - дільник вільного члена a_n , а q - дільник старшого коефіцієнта a_0 .

Сформульовані властивості многочлена $f(x)$ використовуються при розв'язанні рівнянь вищих степенів[17].

Методи розв'язання алгебраїчних рівнянь вищих степенів базуються в основному на двох принципах:

а) розкладання лівої частини рівняння, права частина якого дорівнює нулю, на множники з наступною заміною вихідного рівняння еквівалентного йому сукупністю рівнянь меншого степеня;

б) послідовним пониженням степеня вихідного рівняння або, навіть, зведенням його до квадратного за допомогою вдало підібраної заміни змінних.

2.3. Загальні методи розв'язання рівнянь вищих степенів

2.3.1. Застосування теореми Безу

Теорема Безу дозволяє сформулювати практичне правило розкладання на множники лівої частини рівняння з цілими коефіцієнтами:

- 1) якщо зведене рівняння з цілими коефіцієнтами має цілі корені, то вони містяться серед дільників вільного члена, тому виписуємо дільники вільного члена;
- 2) перевіряємо, чи не перетворює якийсь дільник a ліву частину рівняння в нуль; якщо ліва частина дорівнює нулю, то цей дільник є коренем, тобто многочлен ділиться на $x - a$;
- 3) ділимо многочлен на $x - a$ і подаємо його у вигляді $f(x) = (x - a) \cdot Q(x)$, де $Q(x)$ - многочлен, степінь якого дорівнює $n - 1$;
- 4) аналогічно діємо з многочленом $Q(x)$. [13]

Приклад. Розв'язати рівняння $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$.

- 1) виписуємо дільники вільного члена: $6 : \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$ (символ ":" означає "ділиться на");
- 2) з'ясуємо по черзі, який дільник перетворює ліву частину рівняння в нуль: $f(-1) = (-1)^3 - 4(-1)^2 - 1 + 6 = -1 - 4 - 1 + 6 = 0$, $x_1 = -1$ – корінь рівняння;
- 3) ділимо ліву частину рівняння на $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 4x^2 + x + 6 & x + 1 \\
 - & \hline
 x^3 + x^2 & x^2 - 5x + 6 \\
 \hline
 -5x^2 + x & \\
 - & \\
 -5x^2 - 5x & \\
 \hline
 6x + 6 & \\
 - & \\
 6x + 6 & \\
 \hline
 0 &
 \end{array}$$

Отже, $x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$;

- 4) розв'язавши рівняння другого степеня $x^2 - 5x + 6 = 0$, знаходимо $x_2 = 2; x_3 = 3$.

Відповідь: -1; 2; 3.

2.3.2. Застосування схеми Горнера

Ділення многочлена $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ на лінійний двочлен $x - a$ можна виконувати за допомогою схеми Горнера, яка дозволяє знаходити коефіцієнти многочлена $(n - 1)$ степеня

Таблиця 2.1. Застосування схеми Горнера

	a_0	a_1	a_2	...	a_n
a	a_0	$b_1 = aa_0 + a_1$	$b_2 = ab_1 + a_2$...	$b_n = ab_{n-1} + a_n$
	Коефіцієнти многочлена $(n-1)$ степеня (частки)				Остача

У частці отримуємо многочлен $(n - 1)$ степеня

$a_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + b_2x^{n-3} + \dots + b_{n-2}x + b_{n-1}$ і остачу $b_n = ab_{n-1} + a_n$.

Таким чином, якщо остача $b_n=0$, то число a є коренем многочлена.[15]

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 8x + 32 = 0$

Випишемо дільники вільного члена: $\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 16; \pm 32$.

Перевіримо за допомогою схеми Горнера які з даних чисел є коренями рівняння.

Таблиця 2.2. Перевірка коренів рівнянь

	1	2	-12	-8	32
1	1	$1 \cdot 1 + 2 = 3$	$1 \cdot 3 + (-12) = -9$	$1 \cdot (-9) + (-8) = -17$	$1 \cdot (-17) + 32 = 15$
-1	1	$-1 \cdot 1 + 2 = 1$	$-1 \cdot 1 + (-12) = -13$	$-1 \cdot (-13) + (-8) = 5$	$-1 \cdot 5 + 32 = 27$
2	1	$2 \cdot 1 + 2 = 4$	$2 \cdot 4 + (-12) = -4$	$2 \cdot (-4) + (-8) = -16$	$2 \cdot (-16) + (-32) = 0$

Отже $x = 2$ це корінь рівняння.

Таким чином початкове рівняння можна представити у вигляді $x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 8x + 32 = (x - 2)(x^3 + 4x^2 - 4x - 16) = 0$

Тепер схему Горнера можна застосувати до многочлена третього степеня, виключивши з перевірки числа ± 1 . Число 2 потрібно перевірити ще раз оскільки воно може бути кратним коренем. В результаті отримаємо такі корені: -4; -2; 2.

Відповідь: 4; -2; 2

2.3.3. Рівняння з раціональними коренями

Якщо многочлен $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ з цілими коефіцієнтами і $a_0 \neq 1$ має корінь $x_0 = \frac{p}{q}$, де $\frac{p}{q}$ - нескоротний дріб, то p - дільник вільного члена a_n , а q - дільник старшого коефіцієнта a_0 .

Приклад. Розв'язати рівняння $12x^3 - 32x^2 + 25x - 6 = 0$.

1) корінь рівняння шукаємо у вигляді нескоротного раціонального дробу $\frac{p}{q}$, де p - дільник вільного члена: $6; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$; дільники старшого коефіцієнта: $12; \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12$. Тоді можливі корені слід шукати серед чисел:

$$\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{6}; \pm \frac{1}{12}; \pm \frac{2}{3}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{3}{4}$$

Перевірку коренів можна зробити за допомогою теореми Безу, але обчислення вимагають досить багато часу (особливо якщо це рівняння степеня більшого за третій). Дещо швидше це можна зробити за допомогою схеми Горнера. Але перед цим кількість чисел, серед яких знаходяться можливі корені, потрібно зменшити. Для цього скористаємось такою теоремою.

Теорема. Для того щоб нескоротний дріб $\frac{p}{q}$ був коренем рівняння

$f(x) = 0$, необхідно, щоб для довільного цілого числа m , число $f(m)$ ділилось на $(p-mq)$, якщо тільки $(p-mq) \neq 0$.

Розв'яжемо попередній приклад користуючись даною теоремою.

$$12x^3 - 32x^2 + 25x - 6 = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} = & \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{1}{3}; \pm \frac{1}{4}; \pm \frac{1}{6}; \\ & \pm \frac{1}{12}; \pm \frac{2}{3}; \pm \frac{3}{2}; \pm \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Нехай $m = \pm 1$, тоді

$$f(1) = 12 - 32 + 25 - 6 = -1$$

$$f(-1) = -12 - 32 - 25 - 6 = -75$$

Отже серед чисел (2.3.1) (крім ± 1) коренями можуть бути лише ті, для яких дріб $\frac{f(m)}{p-mq}$ є цілим числом. Тобто при $m=\pm 1$ числа $\frac{f(1)}{p-q}$ і $\frac{f(-1)}{p+q}$ повинні бути цілими одночасно.

Робимо перевірку (при перевірці від'ємних коренів знак "-" потрібно враховувати для p або q).

$$\frac{p}{q} = 2 \quad (p=2; q=1) \quad \frac{f(1)}{p-q} = \frac{-1}{2-1} = \frac{-1}{1} = -1 \text{ (ціле число),}$$

$$\frac{f(-1)}{p+q} = \frac{-75}{2+1} = \frac{-75}{3} = -25 \text{ (ціле число). Отже } \frac{p}{q} = 2 \text{ можливий корінь}$$

рівняння.

Перевіряємо наступні числа:

$$\frac{p}{q} = -2 \quad (p=-2; q=1) \quad \frac{f(1)}{p-q} = \frac{-1}{-2-1} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3} \text{ (не ціле число)}$$

Отже $\frac{p}{q} = -2$ не може бути коренем рівняння.

Таким самим чином перевіряються наступні можливі корені, причому перевірку досить легко робити усно. Наступна перевірка показує, що коренями можуть бути такі числа: $2; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}$. Тепер отримані числа значно швидше перевірити за допомогою схеми Горнера.

$$\text{Відповідь: } \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}.$$

2.3.4. Метод невизначених коефіцієнтів

Суть цього методу полягає в тому, що вигляд множників-многочленів, на які розкладається ліва частина рівняння, заздалегідь відомий.

Цей метод спирається на такі твердження:

- 1) два многочлени тотожно рівні тоді, й тільки тоді, коли рівні їхні коефіцієнти при однакових степенях x ;

2) будь-який многочлен третього степеня розкладається на добуток двох многочленів: многочлена першого і многочлена другого степеня;

3) будь-який многочлен четвертого степеня розкладається на добуток двох многочленів другого степеня.[18]

Приклад. Розв'язати рівняння $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$. (2.3.2)

Будемо шукати многочлени $\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3$ і $x - \alpha$ такі, щоб виконувались тотожність

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x - \alpha)(\beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3). \quad (2.3.3)$$

Розкривши дужки в правій частині тотожності (1.3.3) та звівши подібні члени, дістанемо:

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 + 4x - 2 &= \\ &= \beta_1 x^3 + (\beta_2 - \alpha\beta_1)x^2 + (\beta_3 - \alpha\beta_2)x - \alpha\beta_3. \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x у лівій і правій частинах нерівності (2.3.4), одержуємо систему рівнянь для знаходження α ; β_1 ; β_2 ; β_3 , тобто введених невизначених коефіцієнтів, які вважаються цілими числами.

$$\begin{cases} \beta_1 = 1; \\ \beta_2 - \alpha\beta_1 = -3; \\ \beta_3 - \alpha\beta_2 = 4; \\ \alpha\beta_3 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta_1 = 1 \\ \beta_2 = \alpha - 3 \\ \beta_3 = \alpha(\alpha - 3) + 4 \\ \alpha\beta_3 = 2 \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Оскільки α і β_3 цілі числа, то знайдемо всі можливі пари цих чисел:

$$\alpha\beta_3 = 2 \Rightarrow \begin{aligned} &\alpha = 1; \beta_3 = 2 \\ &\alpha = 2; \beta_3 = 1 \\ &\alpha = -1; \beta_3 = -2 \\ &\alpha = -2; \beta_3 = -1 \end{aligned}$$

Перевіряємо ці пари підставляючи в (2.3.5). Єдина пара, що задовольняє умові: $\alpha = 1; \beta_3 = 2$.

Розв'язуючи далі систему в цілих числах, дістанемо $\alpha = 1; \beta_1 = 1; \beta_2 = -2; \beta_3 = 2$.

Підставивши знайдені невизначені коефіцієнти в (2.3.3), дістанемо рівняння $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = (x-1)(x^2 + 2x + 2) = 0$, розв'язком якого є $x = 1$.

Відповідь: $x=1$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5 = 0$, (2.3.6)

якщо два його корені рівні за модулем, але протилежні за знаками.

Розв'язання: якщо два корені відповідають указаній умові, то маємо такий розклад рівняння (2.3.6) з невизначеними коефіцієнтами:

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5 &= (x^2 - a^2)(x^2 + bx + c) = \\ &= x^4 + bx^3 + (c - a^2)x^2 - a^2bx - a^2c. \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

Прирівнюючи коефіцієнти лівої і правої частин тотожності (2.3.7) при однакових степенях x , маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} b = 1; \\ a^2 - c = 4; \\ a^2b = 5; \\ a^2c = 5. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, знайдемо $a = \pm\sqrt{5}; b = 1; c = 1$.

$$\text{Отже, } x^4 + x^3 - 4x^2 - 5x - 5 = (x^2 - 5)(x^2 + x + 1) = 0.$$

$$\text{Звідки маємо } x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}.$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = \sqrt{5}; x_2 = -\sqrt{5}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 + x^3 - 7x^2 + 2x + 4 = 0$ (2.3.8)

За допомогою схеми Горнера легко переконатись, що жоден із дільників вільного члена не є коренем рівняння. Це означає, що рівняння не має раціональних коренів.

Рівняння (2.3.8) представимо у вигляді добутку двох квадратних тричленів із цілими коефіцієнтами:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = 0 \quad (2.3.9)$$

Розкриємо дужки і зведемо подібні доданки:
 $x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd = 0 \quad (2.3.10)$

Рівняння (2.3.8) і (2.3.10) тотожні, якщо коефіцієнти при однакових степенях x рівні. Прирівнюємо коефіцієнти і отримуємо систему:

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ ac + b + d = -7 \\ ad + bc = 2 \\ bd = 4 \end{cases}$$

Із $bd = 4$ отримаємо такі можливі пари чисел:

$$b = 1; d = 4$$

$$b = -1; d = -4$$

$$b = 4; d = 1$$

$$b = -4; d = -1$$

$$b = 2; d = 2$$

$$b = -2; d = -2$$

Підставляючи дані пари чисел в систему знаходимо коефіцієнти a і c .
 Отже маємо: $a = -1; b = -1; c = 2; d = -4$.

Тоді рівняння (2.3.8) запишемо у вигляді (2.3.9) із відомими коефіцієнтами: $(x^2 - x - 1)(x^2 + 2x - 4) = 0$.

Дане рівняння еквівалентне сукупності рівнянь: $\begin{cases} x^2 - x - 1 = 0 \\ x^2 + 2x - 4 = 0 \end{cases}$.

Розв'язавши їх отримаємо корені: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; -1 \pm \sqrt{5}$.

Відповідь: $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}; -1 \pm \sqrt{5}$.

2.4. Стандартні типи рівнянь та методи їх розв'язання

У багатьох випадках за допомогою заміни в рівнянні певного виразу, який залежить від x , через z або іншу змінну можна одержати рівняння, степінь якого нижча, ніж заданого, і ліву частину рівняння тоді можна легко розкласти на множники або звести рівняння до квадратного відносно z .

Розглянемо деякі типи рівнянь, структура яких дозволяє застосовувати стандартні прийоми пониження степеня або зводити їх до квадратних шляхом заміни змінних.[5]

2.4.1. Двочленні рівняння

Двочленними називаються рівняння виду $ax^m \pm b = 0$, де $a \neq 0$.

Поділивши обидві частини такого рівняння на a дістанемо зведене двочленне рівняння

$$x^m \pm q = 0, \text{ де } q = \frac{b}{a}.$$

Розв'язуючи двочленні рівняння, покладають $x = \sqrt[m]{q} \cdot z$ і зводять ці рівняння до простіших:

$$z^m - 1 = 0, \text{ або } z^m + 1 = 0.$$

Загальний спосіб розв'язування таких рівнянь полягає в розкладанні лівої частини рівняння на множники.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 - 16 = 0$.

$$\text{Розв'язання: } x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) = 0,$$

$$\text{звідси } x_{1,2} = \pm 2.$$

$$\text{Відповідь: } \pm 2.$$

2.4.2. Тричленні рівняння

Тричленним називають рівняння виду $ax^{2n} + bx^n + c = 0$ ($a \neq 0$).

Тричленне рівняння заміною $x^n = z$ зводиться до квадратного рівняння $az^2 + bz + c = 0$, звідки знаходимо z_1 і z_2 . Підставивши в рівняння $x^n = z$ замість z його значення z_1 і z_2 , дістанемо два двочленні рівняння n -го степеня.[8]

$$\text{Приклад. Розв'язати рівняння } x^6 - 9x^3 + 8 = 0. \quad (2.4.1)$$

$$\text{Розв'язання: вводим заміну } x^3 = z. \quad (2.4.2)$$

Підставляючи (2.4.2) в (2.4.1), одержуємо $z^2 - 9z + 8 = 0$ і $z_1 = 1$; $z_2 = 8$.
Значення z підставимо в (2.4.2) і одержуємо два двочленні рівняння $x^3 = 1$ і $x^3 = 8$.

Звідки остаточно маємо $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Рівняння четвертого степеня, до якого входять лише парні степені невідомого, називається біквдратним. Його записують так:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \quad (a \neq 0). \quad (2.4.3)$$

Як бачимо, біквдратне рівняння є частковим випадком тричленних рівнянь при $n=2$. Біквдратні рівняння зводяться до квадратних заміною $x^2 = z$. $(2.4.4)$

Підставивши (2.4.4) в (2.4.3), будемо мати: $az^2 + bz + c = 0$.

Формула розв'язку біквдратного рівняння має вигляд:

$$x = \pm \sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$. $(2.4.5)$

Розв'язання: вводимо заміну $x^2 = z$. $(2.4.6)$

Підставивши (2.4.6) в (2.4.5), будемо мати: $z^2 - 5z + 4 = 0$.

Звідки $z_1 = 1, z_2 = 4$. Значення z підставляємо в (2.4.6) і остаточно дістаємо $x_{1,2} = \pm 1; x_{3,4} = \pm 2$.

Відповідь: $\pm 1; \pm 2$.

2.4.3. Зворотні рівняння

Рівняння виду $a_0x^{2n} + a_1x^{2n-1} + a_2x^{2n-2} + \dots + a_{2n-2}x^2 + a_{2n-1}x + a_{2n} = 0$ де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}$ – довільні сталі числа, називається зворотнім рівнянням парного степеня, якщо виконуються умови:

$$\frac{a_{2n}}{a_0} = \lambda^n; \quad \frac{a_{2n-1}}{a_1} = \lambda^{n-1}; \quad \frac{a_{2n-2}}{a_2} = \lambda^{n-2} \dots \quad (2.4.7)$$

Дане рівняння розв'язується шляхом почленного ділення на x^n (оскільки $x^n \neq 0$). Після чого члени рівновіддалені від середини попарно групуються.

Далі робиться заміна $t = x + \frac{\lambda}{x}$ і всі члени рівняння виражаються через цю

заміну. Можна легко показати, що

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{\lambda^2}{x^2} &= t^2 - 2\lambda \\ x^3 + \frac{\lambda^3}{x^3} + t^3 - 3\lambda t & \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Після заміни отримуємо рівняння нижчого степеня.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 + 3x^3 - 8x^2 - 6x + 4 = 0$

Розв'язання: перевіряємо умови (2.4.7):

$$\begin{aligned} \frac{a_4}{a_0} &= \frac{4}{1} = 4 = \lambda^2 \\ \frac{a_3}{a_1} &= \frac{-6}{3} = -2 = \lambda \end{aligned}$$

Отже це зворотне рівняння четвертого степеня, де $\lambda = -2$.

Поділимо почленно ліву частину на $x^2 \neq 0$.

$$\begin{aligned} \frac{x^4}{x^2} + \frac{3x^3}{x^2} - \frac{8x^2}{x^2} - \frac{6x}{x^2} + \frac{4}{x^2} &= 0 \\ x^2 + 3x - 8 - \frac{6}{x} + \frac{4}{x^2} &= 0 \end{aligned}$$

Згрупуємо рівновіддалені від середини члени:

$$\left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right) + 3\left(x - \frac{2}{x}\right) - 8 = 0$$

Робимо заміну $x - \frac{2}{x} = t$, тоді враховуючи (2.4.8), маємо:

$$t^2 + 4 + 3t - 8 = 0$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -4 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Повертаємось до заміни:

$$\begin{cases} x - \frac{2}{x} = -4 \\ x - \frac{2}{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 4x - 2 = 0 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 - \sqrt{6} \\ x_2 = -2 + \sqrt{6} \\ x_3 = -1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

Відповідь: $-2 \pm \sqrt{6}; -1; 2$.

Рівняння виду

$$a_0 x^{2n+1} + a_1 x^{2n} + a_2 x^{2n-1} + \dots + a_{2n-1} x^2 + a_{2n} x + a_{2n+1} = 0 \text{ де}$$

$a_0, a_1, a_2, \dots, a_{2n}, a_{2n+1}$ – довільні сталі числа, називається зворотнім рівнянням непарного степеня, якщо виконуються умови:

$$\frac{a_{2n+1}}{a_0} = \lambda^{2n+1}; \quad \frac{a_{2n}}{a_1} = \lambda^{2n-1}; \quad \frac{a_{2n-1}}{a_2} = \lambda^{2n-3} \dots \quad (2.4.9)$$

Дане рівняння має корінь $x = -\lambda$

Після ділення лівої частини рівняння на $(x + \lambda)$ отримаємо зворотне рівняння парного степеня.

Приклад. Розв'язати рівняння $4x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + x + 4 = 0$.

Розв'язання: Перевіряємо умови (2.4.9):

$$\frac{a_5}{a_0} = \frac{4}{4} = 1 = \lambda^5$$

$$\frac{a_4}{a_1} = \frac{1}{1} = 1 = \lambda^3$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{-5}{-5} = 1 = \lambda$$

Отже це зворотне рівняння непарного степеня де $\lambda = 1$. Тоді один із коренів цього рівняння $x = -1$. За схемою Горнера можна поділити многочлен $4x^5 + x^4 - 5x^3 - 5x^2 + x + 4$ на $x + 1$ і отримаємо таке рівняння:

$$(x + 1)(4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 4) = 0$$

Прирівнявши другий множник до нуля отримаємо зворотне рівняння парного степеня.

Рівняння в яких коефіцієнти рівновіддалені від кінців рівні називаються симетричними. Симетричні рівняння є частковим випадком зворотних рівнянь при $\lambda = 1$. Вони мають такий загальний вигляд:
 $ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots + cx^2 + bx + a = 0$, де $a \neq 0$.

Наприклад, $x^7 + 2x^6 - 5x^5 - 13x^4 - 13x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = 0$.

Симетричне рівняння має таку властивість: якщо число x є його розв'язком, то обернене число $\frac{1}{x}$ також є розв'язком. [20]

Симетричне рівняння може бути як парного, так і непарного степеня. Симетричні рівняння непарного степеня завжди мають корінь -1 . Крім симетричних рівнянь також є кососиметричні, в яких коефіцієнти рівновіддалені від кінців і рівні за абсолютною величиною. Але при парних степенях x знаки цих коефіцієнтів однакові, а при непарних степенях x - протилежні. Наприклад, $2x^4 - 9x^3 + 9x + 2 = 0$ - кососиметричне рівняння.

Методи розв'язання симетричних та кососиметричних рівнянь збігаються з методами розв'язання зворотних рівнянь.

2.4.4. Кубічні рівняння

Розглянемо метод розв'язання кубічних рівнянь виду

$$x^3 + px + q = 0 \quad (2.4.11)$$

Звертаємо увагу на те, що це неповне кубічне рівняння, бо в ньому відсутній член зі змінною у квадраті. Для розв'язання таких рівнянь будемо користуватися підстановками: $\begin{cases} \alpha + \beta = x; & (2.4.12) \\ \alpha\beta = -\frac{p}{3}, & (2.4.13) \end{cases}$

Вираз (1.4.13) перепишемо інакше: $3\alpha\beta + p = 0$. (2.4.14)

Підставимо в (1.4.11) вираз (1.4.14) і дістанемо:

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 + p(\alpha + \beta) + q &= 0, \text{ або} \\ \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + p(\alpha + \beta) + q &= 0, \\ \alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + p(\alpha + \beta) + q &= 0, \\ \alpha^3 + \beta^3 + (\alpha + \beta)(3\alpha\beta + p) + q &= 0. \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

У рівнянні (5) згідно (4) вираз у других дужках дорівнює нулю.

Тому маємо: $\alpha^3 + \beta^3 = q$. (2.4.16)

З другого боку з (3) випливає $\alpha^3\beta^3 = -\frac{p^3}{27}$. (2.4.17)

Рівняння (2.4.16) і (2.4.17) показують, що числа α^3 і β^3 згідно з теоремою Вієта є коренями квадратного рівняння

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0, \quad (2.4.18)$$

звідки знаходимо z_1 і z_2 . Тоді маємо $z_1 = \alpha^3$, $z_2 = \beta^3$ і $\alpha = \sqrt[3]{z_1}$, $\beta = \sqrt[3]{z_2}$.

А тоді згідно з (2.4.12) $x = \sqrt[3]{z_1} + \sqrt[3]{z_2}$.

Приклад. Розв'язати рівняння: $2x^3 - 6x = -5$. (2.4.19)

Розв'язання: приведемо рівняння до стандартного вигляду: $x^3 - 3x = -\frac{5}{2}$.

Покладемо $\alpha^3 + \beta^3 = -\frac{5}{2}$, $\alpha\beta = 1$. Тоді $\alpha^3 + \beta^3 = 1$.

Складаємо квадратне рівняння відносно z : $z^2 + \frac{5}{2}z + 1 = 0$, або

$$2z^2 + 5z + 2 = 0,$$

звідки $z_1 = -2$; $z_2 = -\frac{1}{2}$.

Тоді $\alpha^3 = -2$; $\alpha = \sqrt[3]{-2}$; $\beta^3 = -\frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $x = -\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

Розглянемо метод розв'язання повних кубічних рівнянь.

Повним кубічним рівнянням називається рівняння виду

$$A_0x^3 + A_1x^2 + A_2x + A_3 = 0, \quad (2.4.20)$$

де кожний коефіцієнт не дорівнює нулю. Такі рівняння заміною $x = z + a$, (1.4.21) де a - дійсне число зводяться до неповних кубічних рівнянь, у яких відсутній член з x^2 , і далі розв'язуються відносно z так, як для кубічних рівнянь виду $x^3 + px + q = 0$. Підставляючи значення z у (2.4.21), знаходимо розв'язки рівняння (1.4.20).

Приклад. Розв'язати рівняння: $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$. (2.4.22)

Розв'язання: вводимо заміну $x = z + a$. (2.4.23)

Підставляємо значення x в (2.4.22) і виконуємо перетворення та згрупуємо члени з однаковими степенями z :

$$\begin{aligned}
(z+a)^3 - 3(z+a)^2 + 2(z+a) - 1 &= 0; \\
z^3 + 3az^2 + 3a^2z + a^3 - 3z^2 - 6az - 3a^2 + 2z + 2a - 1 &= 0; \quad (2.4.23) \\
z^3 + (3a-3)z^2 + (3a^2-6a+2)z + (a^3-3a^2+2a-1) &= 0.
\end{aligned}$$

Для того, щоб член із z^2 у рівнянні (2.4.23) зник, покладемо: $3a-3=0$
і $a=1$. (2.4.24)

Значення a з (2.4.24) підставимо в (2.4.23), дістанемо: $z^3 - z = 1$. (2.4.25)

Для розв'язання рівняння (2.4.25) вводимо підстановки:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = z; & (2.4.26) \\ \alpha\beta = \frac{1}{3}. \text{ або } 3\alpha\beta - 1 = 0 & (2.4.27) \end{cases}$$

Підставимо (2.4.26) в (2.4.25):

$$\begin{aligned}
(\alpha + \beta)^3 - (\alpha + \beta) &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) - (\alpha + \beta) &= 1 \\
\alpha^3 + \beta^3 + (\alpha + \beta)(3\alpha\beta - 1) &= 1 \quad (2.4.28)
\end{aligned}$$

Згідно з (2.4.27) друга дужка в рівнянні (2.4.28) дорівнює нулю, тому остаточно маємо

$$\alpha^3 + \beta^3 = 1. \quad (2.4.29)$$

$$\text{Враховуючи (2.4.27), тобто } \alpha\beta = \frac{1}{3}, \text{ а значить, } \alpha^3\beta^3 = \frac{1}{27}. \quad (2.4.30)$$

Умови (2.4.29) і (2.4.30) відповідають теоремі Вієта відносно того, що α^3 і β^3 є коренями квадратного рівняння $t^2 - t + \frac{1}{27} = 0$, або $27t^2 - 27t + 1 = 0$,

$$\text{звідки } t_1 = \frac{9 + \sqrt{69}}{18}; t_2 = \frac{9 - \sqrt{69}}{18}.$$

$$\text{Отже, } \alpha^3 = \frac{9 + \sqrt{69}}{18}, \alpha = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}}; \quad \beta^3 = \frac{9 - \sqrt{69}}{18}, \beta = \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}}.$$

$$\text{І згідно (6) } z = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{69}}{18}} + 1.$$

А врахувавши (2.4.22) і (2.4.24) знаходимо розв'язок рівняння (2.4.21).

$$x = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{169}}{18}} + 1.$$

$$\text{Відповідь: } x = \sqrt[3]{\frac{9 + \sqrt{69}}{18}} + \sqrt[3]{\frac{9 - \sqrt{169}}{18}} + 1$$

2.5. Штучні методи розв'язання рівнянь

2.5.1. Винесення спільного множника за дужки

Розглянемо метод розкладання лівої частини рівняння на множники методом винесення спільного множника за дужки.

Надалі будемо вважати, що ліва частина рівняння це многочлен n -го степеня відносно невідомої, а права частина дорівнює нулю.

Якщо всі члени лівої частини рівняння мають спільний множник, то можна розкласти ліву частину рівняння на множники, виносячи спільний множник за дужки і одержуючи після цього еквівалентну сукупність рівнянь.[14]

Приклад. Розв'язати рівняння $x^3 - 3x^2 - 4x = 0$. (2.5.1)

Розв'язання:

$$x^3 - 3x^2 - 4x = x(x^2 - 3x - 4) = 0.$$

Звідси маємо еквівалентну рівнянню (2.5.1) сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = 0; \\ x^2 - 3x - 4 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю сукупність знайдемо: $x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 4$.

Відповідь: -1; 0; 4.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^5 + 6x^4 - 16x^3 = 0$. (1.5.2)

$$\text{Розв'язання: } x^5 + 6x^4 - 16x^3 = x^3(x^2 + 6x - 16) = 0.$$

Звідси маємо еквівалентну рівнянню (1.5.2) сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} x = 0; \\ x^2 + 6x - 16 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши цю сукупність, знайдемо: $x_1 = -8; x_2 = 0; x_3 = 2$.

Відповідь:-8;0;2.

2.5.2. Спосіб групування

Наступний метод – розкладання лівої частини рівняння на множники за допомогою групування.

Цей спосіб застосовується найчастіше в поєднанні зі способом винесення за дужки спільного множника. Треба перегрупувати доданки так, щоб у кожній групі доданків утворився спільний вираз, який і виноситься за дужки.[19]

Приклад. Розв'язати рівняння $x^3 + x^2 - 5x - 5 = 0$. (2.5.3)

Розв'язання: згрупуємо попарно перші й останні члени і з кожної пари винесемо за дужки спільний множник.

$$\text{Одержимо: } x^2(x + 1) - 5(x + 1) = 0. \quad (2.5.4)$$

Тепер бачимо, що ліва частина рівняння (2.5.4) має спільний множник, який і винесемо за дужки: $(x + 1)(x^2 - 5) = 0$. (2.5.5)

Рівняння (2.5.5) розпадається на еквівалентну рівнянню (2.5.3) сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} x + 1 = 0; \\ x^2 - 5 = 0, \end{cases}$$

$$\text{звідси маємо: } x_1 = \sqrt{5}, x_2 = -\sqrt{5}, x_3 = -1.$$

$$\text{Відповідь: } \sqrt{5}; -\sqrt{5}; -1.$$

Іноді для того, щоб одержати спільний множник методом групування членів, попередньо додають і віднімають деякі вирази або розкладають коефіцієнти заданого рівняння на доданки.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 - 7x^2 - 4x + 20 = 0$.

Розв'язання: віднімемо і додамо x^2 , а 20 розкладемо на два доданки: 16 і 4. Тоді матимемо

$$\begin{aligned} x^4 - 7x^2 - 4x + 20 &= (x^4 - 8x^2 + 16) + (x^2 - 4x + 4) = \\ &= (x^2 - 4)^2 + (x - 2)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2 + (x - 2)^2 = \\ &= (x - 2)^2[(x + 2)^2 + 1] = 0. \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Рівняння (2.5.6) розкладається на еквівалентну рівнянню сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} (x-2)^2 = 0; \\ (x+2)^2 + 1 \neq 0, \end{cases}$$

звідси одержуємо: $x = 2$.

Відповідь: 2.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^8 - 6x^7 + 9x^6 - x^2 + 6x - 9 = 0$. (2.5.7)

Розв'язання: згрупуємо попарно члени рівняння біля яких містяться однакові коефіцієнти і з кожної пари винесемо за дужки спільний множник, одержимо

$$x^2 (x^6 - 1) - 6x (x^6 - 1) + 9 (x^6 - 1) = 0.$$

З одержаного рівняння винесемо за дужки спільний множник:

$$(x^6 - 1) (x^2 - 6x + 9) = 0.$$

Дане рівняння розкладається на еквівалентну рівнянню (2.5.7) сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^6 - 1 = 0; \\ x^2 - 6x + 9 = 0, \end{cases}$$

звідси маємо: $x_1 = 0; x_2 = 3$.

Відповідь: 0; 3.

2.5.3. Застосування формул скороченого множення

Часто ліву частину рівняння можна розкласти на множники, застосовуючи формули скороченого множення.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x^2 - 3x)^2 - (5x - 7)^2 = 0$. (2.5.8)

Розв'язання: розкладаючи на множники ліву частину рівняння (2.5.8) як різницю квадратів, одержимо $(x^2 - 8x + 7) (x^2 + 2x - 7) = 0$. (2.5.9)

Рівняння (2.5.9) розкладається на еквівалентну рівнянню (2.5.8) сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 - 8x + 7 = 0; \\ x^2 + 2x - 7 = 0, \end{cases}$$

звідси маємо: $x_{1,2} = -1 \pm 2\sqrt{2}; x_3 = 1; x_4 = 7$.

Відповідь: $-1 - \sqrt{2}; -1 + \sqrt{2}; 1; 7$.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x - 1)^3 + (2x + 3)^3 = 27x^3 + 8$. (2.5.10)

Розв'язання: розкладемо ліву і праву частини рівняння (1.5.10) за формулою суми кубів, потім перенесемо праву частину в ліву та винесемо спільний множник за дужки:

$$\begin{aligned} & (x - 1 + 2x + 3) [(x - 1)^2 - (x - 1)(2x + 3) + (2x + 3)^2] = \\ & = (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4); \\ & (3x^2 + 2)(3x^2 + 9x + 13) - (3x + 2)(9x^2 - 6x + 4) = 0; \\ & (3x + 2)(3x^2 + 9x + 13 - 9x^2 + 6x - 4) = 0, \\ & \text{або } (3x + 2)(-6x^2 + 15x + 9) = 0. \end{aligned}$$

Поділивши обидві частини рівняння на -3, будемо мати

$$(3x + 2)(2x^2 - 5x - 3) = 0. \quad (2.5.11)$$

Рівняння (2.5.11) розкладається на сукупність двох рівнянь, яка еквівалентна рівнянню (2.5.10)

$$\begin{cases} 3x + 2 = 0; \\ 2x^2 - 5x - 3 = 0. \end{cases} \quad (2.5.12)$$

Розв'язавши сукупність рівнянь (1.5.12), знаходимо розв'язки рівняння (1.5.11): $x_1 = -\frac{2}{3}; x_2 = -\frac{1}{2}; x_3 = 3$.

Відповідь: $-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}; 3$.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x - 1)^3 - (2x - 3)^3 = -x^3 + 8$. (2.5.13)

Розв'язання: розкладемо ліву і праву частини рівняння (2.5.13) за формулою різниці кубів, потім перенесемо праву частину в ліву та винесемо спільний множник за дужки:

$$\begin{aligned} & (x - 1 - 2x + 3) [(x - 1)^2 + (x - 1)(2x - 3) + (2x - 3)^2] = \\ & = (2 - x)(4 + 2x + x^2); \\ & (2 - x) [x^2 - 2x + 1 + 2x^2 - 5x + 3 + 4x^2 - 12x + 9] = \\ & = (2 - x)(x^2 + 2x + 4); \\ & (2 - x)(6x^2 - 21x + 9) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} 2 - x = 0; \\ 6x^2 - 21x + 9 = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши сукупність рівнянь, знаходимо розв'язки рівняння (2.5.13):

$$x_1 = \frac{1}{2}; x_2 = 2; x_3 = 3.$$

Відповідь: 0,5; 2; 3.

Іноді ліву частину рівняння можна розкласти на множники, попередньо виділивши квадрат або куб двочлена з подальшим застосуванням відповідних формул скороченого множення.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^4 + 16x - 12 = 0$. (2.5.14)

Розв'язання: виділимо в лівій частині рівняння (1.5.14) повні квадрати. З цією метою додамо і віднімемо в лівій частині рівняння вираз $(4x^2 + 4)$:

$$\begin{aligned} (x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2 - 16x - 16 &= (x^2 + 2)^2 - (4x^2 - 16x + 16) = \\ &= (x^2 + 2)^2 - (2x - 4)^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Розкладемо на множники ліву частину рівняння (2.5.15):

$$(x^2 + 2 - 2x + 4)(x^2 + 2 + 2x - 4) = (x^2 - 2x + 6)(x^2 + 2x - 2) = 0.$$

Одержане рівняння еквівалентне сукупності двох рівнянь:

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 2 = 0; \\ x^2 - 2x + 6 = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння сукупності має розв'язок $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Друге рівняння розв'язку не має, тому що $D < 0$.

Відповідь: $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $x^3 - x^2 - 3x - 3 = 0$. (2.5.16)

Розв'язання: щоб виділити куб двочлена, треба мати або чергування знаків членів куба, якщо виділяється куб різниці, або однакові знаки членів, якщо виділяється куб суми. Три останні члени рівняння (2.5.16) мають однакові знаки. Тому будемо виділяти куб суми. Для цього введемо заміну:

$$x = \frac{1}{z}.$$

Підставимо значення x в (2.5.16), позбавимося від знаменника і помножимо праву і ліву частини рівняння на мінус, після чого послідовно матимемо:

$$\frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} - \frac{3}{z} - 3 = 0, \quad -3z^3 - 3z^2 - z + 1 = 0,$$

$$\text{або } 3z^3 + 3z^2 + z - 1 = 0. \quad (2.5.17)$$

Тепер помножимо ліву і праву частини рівняння (2.5.17) на 9. Дістанемо:

$$27z^3 + 27z^2 + 9z - 9 = 0. \quad (2.5.18)$$

$$\text{Введемо заміну: } 3z = t, \text{ звідки } z = \frac{t}{3}. \quad (2.5.19)$$

Підставимо значення z в (2.5.18). Дістанемо:

$$27 \cdot \frac{t^3}{27} + 27 \cdot \frac{t^2}{9} + 9 \cdot \frac{t}{3} - 9 = 0, \text{ або } t^3 + 3t^2 + 3t - 9 = 0.$$

Додамо до лівої частини рівняння (2.5.16) та віднімемо 1:

$$t^3 + 3t^2 + 3t + 1 - 10 = 0. \quad (2.5.20)$$

Чотири перші члени рівняння (1.5.20) – це розгорнутий куб двочлена. Згорнемо його та перенесемо 10 у праву частину рівняння (2.5.20). Послідовно матимемо: $(t + 1)^3 = 10$, або $t + 1 = \sqrt[3]{10}$ і $t = \sqrt[3]{10} - 1$.

$$\text{Значення } t \text{ підставимо в (1.5.19) і знайдемо } z: z = \frac{\sqrt[3]{10} - 1}{3}.$$

$$\text{Тепер значення } z \text{ підставимо в заміну } x = \frac{1}{z}: \frac{1}{\frac{\sqrt[3]{10} - 1}{3}} = \frac{3}{\sqrt[3]{10} - 1}.$$

$$\text{Отже, } x = \frac{3}{\sqrt[3]{10}}.$$

$$\text{Відповідь: } x = \frac{3}{\sqrt[3]{10}}.$$

2.5.4. Різні структури рівнянь

Раніше були розглянуті стандартні рівняння, яким і відповідали стандартні заміни змінних.

Але структури рівнянь настільки різноманітні, що неможливо уніфікувати всі випадки заміни змінних. У кожному випадку вибір заміни обумовлюється будовою рівняння і вимагає певного досвіду і кмітливості.[6]

$$\mathbf{1. \text{ Рівняння виду } (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=A, \quad (2.5.21)}$$

де числа a, b, c, d такі, що $b - a = d - c$, заміною $z = \frac{x - a + x - b + x - c + x - d}{4}$

зводиться до бікватратного рівняння. Вказана заміна є середнім арифметичним усіх множників лівої частини рівняння (2.5.21).

Якщо ж ця заміна дає дробові коефіцієнти, то, щоб одержати цілі коефіцієнти, треба многочлени, які стоять в окремих дужках, попарно перемножити так, щоб одержати однаковий вираз, пов'язаний з невідомою. Приймаючи цей вираз за іншу змінну, одержують відносно цієї змінної квадратне рівняння або рівняння нижчого степеня відносно заданого рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння: $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 24$. (2.5.22)

Розв'язання: середнє арифметичне множників дає дробовий вираз. Тому попарно перемножимо множники рівняння (2.5.22) так, щоб вирази з невідомими збіглися. Перемножимо між собою середні й крайні множники.

$$\text{Дістанемо } (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 24. \quad (1.5.23)$$

$$\text{Позначимо } x^2 + 3x = z. \quad (2.5.24)$$

Тоді рівняння (1.5.23) перепишемо так: $z(z + 2) - 24 = 0$, або $z^2 + 2z - 24 = 0$
звідки $z = 4$; $z = -6$.

Значення z підставимо у (2.5.24) і дістанемо розв'язки рівняння (2.5.22):
 $x = 1$; $x = -4$.

Відповідь: 1; -4.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x + 1)(x + 2)(x + 4)(x + 5) = 40$.

$$\text{Робимо заміну } z = \frac{x + 1 + x + 2 + x + 4 + x + 5}{4} = x + 3.$$

$$\text{Тоді маємо: } (z - 2)(z - 1)(z + 1)(z + 2) = 40$$

$$(z^2 - 1)(z^2 - 4) = 40$$

$$\text{Робимо ще одну заміну: } t = z^2 - 1$$

$$t(t - 3) = 40 \Rightarrow t^2 - 3t - 40 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -5 \\ t_2 = 8 \end{cases}$$

Повертаємось до заміни: $\begin{cases} z^2 - 1 = -5 \\ z^2 - 1 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 = -4 \\ z^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z \in \emptyset \\ z = \pm 3 \end{cases}$

Повернувшись до початкової заміни остаточно маємо: $x = 0; x = -6$.

Відповідь: 0; -6.

2. Рівняння виду $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)(a_4x + b_4) = A$

Розділимо обидві частини рівняння на добуток $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$:

$$\left(x + \frac{b_1}{a_1}\right)\left(x + \frac{b_2}{a_2}\right)\left(x + \frac{b_3}{a_3}\right)\left(x + \frac{b_4}{a_4}\right) = \frac{A}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}.$$

Якщо $\left(\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2}\right) = \left(\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4}\right)$, то дане рівняння зводиться до

попереднього прикладу.

3. Рівняння виду $(ax^2 + b_1x + c)(ax^2 + b_2x + c) = Ax^2$, (2.5.25)

де $c \neq 0$; $A \neq 0$ і $x = 0$ не є коренями рівняння (2.5.25).

Поділивши рівняння (2.5.25) на x^2 , одержимо рівносильне йому рівняння $\left(ax + \frac{c}{x} + b_1\right)\left(ax + \frac{c}{x} + b_2\right) - A = 0$, яке після заміни $z = ax + \frac{c}{x}$ зводиться до квадратного.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$(2x^2 - 3x + 1)(2x^2 + 5x + 1) = 9x^2.$$

Розділимо обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$:

$$\left(2x - 3 + \frac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \frac{1}{x}\right) = 9$$

Робимо заміну $z = 2x + \frac{1}{x}$ і отримаємо:

$$(z-3)(z+5)=9 \Leftrightarrow z^2+2z-24=0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1=-6 \\ z_2=4 \end{cases}. \text{ Повернувшись до заміни}$$

$$\text{маємо таку сукупність рівнянь: } \begin{cases} 2x + \frac{1}{x} = -6 \\ 2x + \frac{1}{x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 + 6x + 1 = 0 \\ 2x^2 - 4x + 1 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язавши квадратні рівняння маємо такі розв'язки: $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$ і

$$x_{3,4} = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{2}.$$

4. Рівняння виду $(a_1x + b_1)(a_2x + b_2)(a_3x + b_3)(a_4x + b_4) = Ax^2$

Розділимо обидві частини рівняння на добуток $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4$:

$$\left(x + \frac{b_1}{a_1}\right)\left(x + \frac{b_2}{a_2}\right)\left(x + \frac{b_3}{a_3}\right)\left(x + \frac{b_4}{a_4}\right) = \frac{Ax^2}{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4}. \text{ Якщо } \frac{b_1}{a_1} \cdot \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} \cdot \frac{b_4}{a_4},$$

то після попарного перемноження відповідних множників рівняння зводиться до попереднього прикладу.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2.$$

Помічаємо, що $b_1b_4 = b_2b_3 = 24$, тому перемножуємо перший з четвертим і другий з третім множники: $(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$. Далі рівняння розв'язується подібно до попереднього прикладу.

5. Рівняння виду $a(cx^2 + p_1x + q)^2 + b(cx^2 + p_2x + q)^2 = Ax^2$, (2.5.26)

де $x \neq 0$ і кожне із вказаних чисел не дорівнює нулю, розв'язують за допомогою ділення обох частин рівняння на x^2 .

$$\text{Маємо: } a\left(cx + \frac{q}{x} + p_1\right)^2 + b\left(cx + \frac{q}{x} + p_2\right)^2 = A, \text{ яке після заміни } cx + \frac{q}{x} = z$$

зводиться до квадратного відносно z .

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$2(x^2 - x + 2)^2 - 3(x^2 + x + 2)^2 + 40x^2 = 0. \quad (2.5.27)$$

Розв'язання: поділимо обидві частини рівняння (2.5.27) на x^2 ($x \neq 0$).

$$\text{Дістанемо: } 2\left(x + \frac{2}{x} - 1\right)^2 - 3\left(x + \frac{2}{x} + 1\right)^2 + 40 = 0, \text{ і т.д.}$$

$$\mathbf{6. Рівняння виду } (x^2 + p_1x + q_1)(x^2 + p_2x + q_2) = A(x + a)^2, \quad (2.5.28)$$

де $A \neq 0$ і числа $p_1; p_2; q_1; q_2$ такі, що вираз $(p_2 - p_1)x + (q_2 - q_1)$ без остачі ділиться на двочлен $x + a$, який не дорівнює нулю, розв'язують шляхом виділення в других дужках рівняння (2.5.28) виразу, який дорівнює виразу в перших дужках. Після спрощення лівої частини рівняння (2.5.28) ділять обидві частини на квадрат двочлена $(x + a)^2$ з наступною заміною, яка приводить до квадратного рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$(x^2 + x + 1)^2 = x^2(3x^2 + x + 1). \quad (2.5.29)$$

Розв'язання: виділимо в дужках правої частини тричлен, який збігається з тричленом із лівої частини рівняння (2.5.29), і розкриємо дужки:

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)^2 &= x^2(x^2 + x + 1 + 2x^2) \\ (x^2 + x + 1)^2 &= x^2(x^2 + x + 1) + 2x^4 \quad | : (x^4) \quad (x \neq 0) \end{aligned} \quad (2.5.30)$$

$$\left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2}\right)^2 = \frac{x^2 + x + 1}{x^2} + 2. \quad (2.5.31)$$

$$\text{Вводимо заміну } \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = z. \quad (2.5.32)$$

Підставивши (2.5.32) у (2.5.31), матимемо квадратне рівняння $z^2 - z - 2 = 0$, розв'язком якого є $z = -1, z = 2$.

Значення z підставимо в (1.5.32) і одержимо сукупність двох рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = -1; \\ \frac{x^2 + x + 1}{x^2} = 2, \end{cases} \quad (2.5.33)$$

які еквівалентні рівнянню (2.5.29). Розв'язавши сукупність (2.5.33), одержимо розв'язки рівняння (2.5.29): $x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

$$\text{Відповідь: } x_{1,2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

7. Рівняння виду $(x-a)^{2n} + (x+b)^{2n} = c$, розв'язується наступним чином:

$$(x+a)^{2n} + (x+b)^{2n} = c \Rightarrow \begin{cases} x + \frac{a+b}{2} = t; \\ \left(t + \frac{a-b}{2}\right)^{2n} + \left(t - \frac{a-b}{2}\right)^{2n} = c. \end{cases}$$

Приклад. Розв'язати рівняння: $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

$$(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16 \Rightarrow \begin{cases} x+4=t \\ (t-1)^4 + (t+1)^4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+4=t \\ t^4 + 6t^2 - 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=t \\ t^2 = 1 \\ t^2 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=1 \\ x+4=-1 \end{cases}$$

Відповідь: -5; -3.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x-3)^4 + (x-5)^4 = 2$. (2.5.30)

Розв'язання: вводимо заміну $\frac{x-3+x-5}{2} = x-4 = z$, звідки $x = z+4$.

(2.5.31)

Підставимо значення x в (1.5.34) і одержимо $(z+1)^4 + (z-1)^4 = 2$;
(1.5.32)

$z^4 + 6z^2 = 0$, або $z^2(z^2 + 6) = 0$, звідки $z = 0$. Підставивши значення z у
(1.5.31), одержимо $x = 4$.

Відповідь: $x = 4$.

8. Рівняння виду $(ax+b)^2(cx+d)(x+e) = A$, (1.5.33)

де a, b, c, d, e, A - числа, які не дорівнюють нулю, розв'язується множенням рівняння (1.5.33) на таке число, щоб у другій та третій дужках коефіцієнти при $x = a$. А потім у другій та третій дужках виділяють двочлен $ax+b$, який приймають за z , що веде до спрощення рівняння (1.5.33).

Приклад. Розв'язати рівняння: $(8x+7)^2(4x+3)(x+1) = \frac{9}{2}$. (1.5.34)

Розв'язання: ліву і праву частини рівняння (1.5.34) помножимо на 16 з тим, щоб у кожній із дужок, коефіцієнти при $x = 8$:

$$\begin{aligned}(8x+7)^2(8x+6)(8x+8) &= 72; \\ (8x+7)^2[(8x+7)-1][(8x+7)+1] &= 72. \quad (1.5.35)\end{aligned}$$

Вводимо заміну $(8x+7)=z$. (1.5.36)

Підставимо (1.5.36) у (1.5.35) і одержимо: $z^2(z-1)(z+1)=72$, або $z^4 - z^2 - 72 = 0$. (1.5.37)

Розв'язуючи рівняння (2.5.35), знайдемо: $z_1 = 3$; $z_2 = -3$. Підставляючи ці значення z у (1.5.36) – знаходимо розв'язки рівняння (1.5.34): $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{5}{4}$.

Відповідь: $x_1 = -\frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{5}{4}$.

Приклад. Розв'язати рівняння: $(6x-5)^2(3x-2)(x-1) = 1$.

Розв'язання: ліву і праву частину рівняння помножимо на 12:

$$\begin{aligned}(6x-5)^2(6x-4)(6x-6) &= 12 \\ (6x-5)^2[(6x-5)+1][(6x-5)-1] &= 12\end{aligned}$$

Вводимо заміну: $z = 6x - 5$. Підставляємо в рівняння і маємо $z^2(z+1)(z-1) = 12$, або $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Розв'язавши рівняння отримаємо такі значення: $\begin{cases} z = 4 \\ z = -3 \end{cases}$. Повернувшись до заміни остаточно маємо: $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = \frac{7}{6}$.

Відповідь: $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{6}$.

9. Рівняння виду $A_0 f^{2n}(x) + A_1 f^n(x) Y^n(x) + A_2 Y^{2n}(x) = 0$, (2.5.38)

де A_0, A_1, A_2 числа, які не дорівнюють нулю, а $f(x); Y(x)$ - деякі вирази відносно x .

Такі рівняння розв'язуються діленням рівняння (2.5.38) на многочлен $Y^{2n}(x)$, або $f^{2n}(x)$ і одержують рівняння відносно виразу $\frac{f(x)}{Y(x)}$, або $\frac{Y(x)}{f(x)}$, де $Y(x); f(x)$ не є коренями рівняння (2.5.38).

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$2(x^2 + x + 1)^2 - 7(x - 1)^2 = 13(x^3 - 1). \quad (2.5.39)$$

Розв'язання: поділимо ліву і праву частини рівняння (1) на $(x-1)^2$ ($x \neq 1$)

і одержимо $2\left(\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}\right)^2 - 7 = 13\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$.

Вводимо заміну $\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = z$. (2.5.40)

Маємо $2z^2 - 13z - 7 = 0$, звідки $z_1 = -\frac{1}{2}$; $z_2 = 7$.

Підставивши значення z у (2.5.39), одержимо сукупність двох рівнянь

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = -\frac{1}{2} \quad \text{і} \quad \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = 7. \quad \text{Розв'язавши, одержимо всі розв'язки рівняння}$$

(2.5.39): $x_1 = -1$; $x_2 = -\frac{1}{2}$; $x_3 = 2$; $x_4 = 4$.

Відповідь: $-1; -0,5; 2; 4$.

10. Рівняння виду $\frac{Ax}{ax^2 + b_1x + c} + \frac{Bx}{ax^2 + b_2x + c} = D, \quad (1) \quad \text{де} \quad x \neq 0,$

розв'язуються діленням чисельника і знаменника кожного дробу на x , а потім, зробивши заміну $ax + \frac{c}{x} = z$, зведемо рівняння (1) до квадратного.

Приклад. Розв'язати рівняння: $\frac{8x}{x^2 + 3x + 4} + \frac{9x}{x^2 - 2x + 4} = 4. \quad (2.5.41)$

Розв'язання: поділимо чисельник і знаменник кожного дробу лівої частини рівняння на x ($x \neq 0$), тоді $\frac{8}{x + \frac{4}{x} + 3} + \frac{9}{x + \frac{4}{x} - 2} = 4. \quad (2.5.42)$

Вводимо заміну $x + \frac{4}{x} = z$. (2.5.43)

Підставивши (2.5.43) у (2.5.42), дістанемо рівняння $\frac{8}{z + 3} + \frac{9}{z - 2} = 4,$

розв'язком якого є $z_1 = 5$; $z_2 = -\frac{7}{4}$.

Підставивши значення z у (2.5.43), знайдемо еквівалентну рівнянню (2.5.42) сукупність двох рівнянь: $x + \frac{4}{x} = 5$; $x + \frac{4}{x} = -\frac{7}{5}$, розв'язавши яку, знайдемо розв'язки рівняння (1): $x_1 = 1$; $x_2 = 4$.

Відповідь: 1; 4.

11. Рівняння виду
$$\frac{ax^2 + b_1x + c}{ax^2 + b_2x + c} \pm \frac{ax^2 + b_3x + c}{ax^2 + b_4x + c} = A, \quad (2.5.44)$$

де $A \neq 2$ для "+" і $A \neq 0$ для "-";

де x і коефіцієнти рівняння не дорівнюють нулю, розв'язується діленням чисельника і знаменника дробів лівої частини на x . Утворяться однакові вирази відносно x , увівши заміни, зводять рівняння (2.5.44) до квадратного.

Приклад. Розв'язати рівняння:
$$\frac{x^2 + 10x + 15}{x^2 - 13x + 15} = \frac{x^2 + x + 15}{x^2 - 6x + 15}. \quad (2.5.45)$$

Нехай $x = 0$. Підставляємо в рівняння і отримуємо $\frac{15}{15} = \frac{15}{15}$. Отже один із коренів $x = 0$. Нехай тепер $x \neq 0$. Тоді щоб утворилися однакові вирази з невідомою, поділимо чисельник і знаменник лівої і правої частини на x тоді

$$\frac{x + 10 + \frac{15}{x}}{x - 3 + \frac{15}{x}} = \frac{x + 1 + \frac{15}{x}}{x - 6 + \frac{15}{x}}. \quad (2.5.46)$$

Вводимо заміну $x + \frac{15}{x} = z$. (2.5.47)

Підставивши z у (2.5.46), дістанемо $\frac{z + 10}{z - 3} = \frac{z + 1}{z - 6}$, звідки $z = \frac{19}{2}$.

Підставимо значення z у (2.5.47), дістанемо рівняння $x + \frac{15}{x} = \frac{19}{2}$, (2.5.48)

яке еквівалентне рівнянню (2.5.46).

Розв'язавши рівняння (2.5.48), знайдемо корені рівняння (2.5.46):

$$x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = \frac{15}{2}.$$

Відповідь: $x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = \frac{15}{2}$

12. Рівняння виду $x^2 + \left(\frac{ax}{x+a}\right)^2 = A$, де $A \neq 0, a \neq 0, x+a \neq 0$, розв'язують виділенням у лівій частині повного квадрата двочлена. Причому, якщо $a > 0$, то виділяється квадрат різниці двочлена, а якщо $a < 0$, то квадрат суми.

Приклад. Розв'язати рівняння: $x^2 + \left(\frac{4x}{x+4}\right)^2 = 9$. (2.5.49)

Розв'язання: у лівій частині рівняння (2.5.49) виділимо повний квадрат різниці двочлена:

$$x^2 - 2x \frac{4x}{x+4} + \left(\frac{4x}{x+4}\right)^2 = 9 - 2x \cdot \frac{4x}{x+4}, \text{ або}$$

$$\left(x - \frac{4x}{x+4}\right)^2 = 9 - 8 \cdot \frac{x^2}{x+4};$$

$$\left(\frac{x^2}{x+4}\right)^2 + 9 \cdot \frac{x^2}{x+4} - 9 = 0. \quad (2.5.50)$$

Вводимо заміну $\frac{x^2}{x+4} = z$. (2.5.51)

Підставивши (2.5.51) у (2.5.50), дістанемо рівняння $z^2 + 8z - 9 = 0$, розв'язками якого є $z_1 = 1; z_2 = -9$.

Підставивши значення z у (2.5.51), дістанемо сукупність двох рівнянь,

які еквівалентні рівнянню (1):
$$\begin{cases} \frac{x^2}{x+4} = 1 \\ \frac{x^2}{x+4} = -9 \end{cases} \quad (2.5.52)$$

Розв'язавши сукупність (2.5.51), знайдемо корені рівняння (2.5.49):

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

Відповідь: $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$.

Приклад. Розв'язати рівняння $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = \frac{45}{16}$. (2.5.53)

Розв'язання: виділимо в лівій частині рівняння (2.5.53) повний квадрат суми двочлена:

$$\begin{aligned} \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + 2\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x}{x-1} + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 &= \frac{45}{16} + 2\frac{x}{x+1} \cdot \frac{x}{x-1}; \\ \left(\frac{2x^2}{x^2-1}\right)^2 - \frac{2x^2}{x^2-1} - \frac{45}{16} &= 0. \end{aligned} \quad (2.5.54)$$

Вводимо заміну $\frac{2x^2}{x^2-1} = z$. (2.5.55)

Підставимо (2.5.55) у (2.5.54), звідки $z_1 = \frac{9}{4}; z_2 = -\frac{5}{4}$.

Значення z підставляємо у (2.5.55) і дістаємо сукупність двох рівнянь, еквівалентних рівнянню (2.5.54), розв'язавши яку, дістаємо розв'язки рівняння

(1.6.16): $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}; x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{5}{13}}$.

Відповідь: $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}; x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{5}{13}}$.

13. Рівняння виду $\frac{a_1x+b_1}{d_1x+c_1} + \frac{a_2x+b_2}{d_2x+c_2} + \dots + \frac{a_kx+b_k}{d_kx+c_k} = A$

розв'язують шляхом представлення кожного дробу в рівнянні у вигляді

$$\frac{ax+b}{dx+c} = m + \frac{n}{x+p}, \text{ де } m, n, p - \text{ деякі комбінації чисел } a, b, c, d, \text{ після чого}$$

рівняння спрощується.

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{2x-1}{x+1} + \frac{3x-1}{x+2} = \frac{x-7}{x-1} + 4$.

ОДЗ: $x \neq \pm 1; x \neq -2$.

$$\frac{2(x+1)-3}{x+1} + \frac{3(x+2)-7}{x+2} = \frac{(x-1)-6}{x-1} + 4$$

$$2 - \frac{3}{x+1} + 3 - \frac{7}{x+2} = 1 - \frac{6}{x-1} + 4$$

$$\frac{3}{x+1} - \frac{6}{x-1} + \frac{7}{x+2} = 0$$

$$4x^2 - 15x - 25 = 0$$

Розв'язавши квадратне рівняння отримаємо $x_1 = 5; x_2 = -\frac{5}{4}$.

Відповідь: $x_1 = 5; x_2 = -\frac{5}{4}$

2.5.5. Метод введення параметра

Це один із важливих методів розв'язування рівнянь третього і четвертого степенів. Параметр вводять як проміжну змінну, відносно якої розв'язують рівняння, що має степінь нижчий степеня основної невідомої. Розв'язавши рівняння відносно параметра, використовують знайдені його значення для знаходження розв'язків рівняння відносно невідомої. Розглянемо метод введення параметра на прикладах.

Метод введення параметра замість сталого коефіцієнта рівняння.

Приклад. Розв'язати рівняння: $x^3 - (\sqrt{3} + 1)x^2 + 3 = 0$. (2.5.56)

Розв'язання: введемо параметр: $\sqrt{3} = a$. Тоді рівняння (2.5.56) матиме вигляд: $x^3 - (a + 1)x^2 + a^2 = 0$. (2.5.57)

Розглянемо рівняння (2.5.57) відносно параметра a . Тоді маємо:
 $a^2 - ax^2 - x^2 + x^3 = 0$;

$$a_{1,2} = \frac{x^2 \pm \sqrt{x^4 - 4x^3 + 4x^2}}{2} = \frac{x^2 \pm \sqrt{(x^2 - 2x)^2}}{2} = \frac{x^2 \pm (x^2 - 2x)}{2};$$

$$a_1 = \frac{x^2 + x^2 - 2x}{2} = x^2 - x; \quad a_2 = \frac{x^2 - x^2 + 2x}{2} = x.$$

Підставивши замість a_1 і a_2 значення $a = \sqrt{3}$, знайдемо сукупність двох рівнянь: $x = \sqrt{3}; x^2 - x = \sqrt{3}$.

Ця сукупність еквівалентна рівнянню (2.5.56). Розв'язавши її, знайдемо розв'язки рівняння (2.5.56): $x_1 = \sqrt{3}; x_{2,3} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$.

Відповідь: $x_1 = \sqrt{3}; x_{2,3} = \frac{1 + \sqrt{1 + 4\sqrt{3}}}{2}$.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$x^4 - 2\sqrt{7}x^2 + x + 7 - \sqrt{7} = 0. \quad (2.5.58)$$

Розв'язання: нехай $\sqrt{7} = a$, тоді $a^2 = 7$ і рівняння (2.5.58) набуде вигляду $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$. Вважаючи тепер a основною невідомою, розв'яжемо рівняння відносно a : $a^2 - (2x+1)a + x^4 + x = 0$;

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x^2 + 1)^2 - 4(x^4 + x)}}{2} = \\ &= \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{2} = \frac{2x^2 + 1 \pm \sqrt{(2x - 1)^2}}{2} = \\ &= \frac{2x^2 + 1 \pm (2x - 1)}{2}, \end{aligned}$$

$$a_1 = x^2 + x; \quad a_2 = x^2 - x + 1.$$

Підставивши замість a_1 і a_2 значення $a = \sqrt{7}$, знайдемо сукупність двох рівнянь еквівалентну рівнянню (1.7.3): $x^2 + x - \sqrt{7} = 0$ і $x^2 - x - \sqrt{7} + 1 = 0$. (2.5.59)

Розв'язавши сукупність рівнянь (1.7.4), знайдемо розв'язки рівняння (2.5.58).

$$\text{Відповідь: } x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\sqrt{7}}}{2}; \quad x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{4\sqrt{7} - 3}}{2}.$$

Метод Феррарі.

Метод Феррарі дає можливість зводити розв'язок рівнянь четвертого степеня відносно основної невідомої до рівняння третього степеня відносно введеного параметра. Потім, використовуючи знайдені значення параметра, знаходять розв'язки вихідного рівняння. Розглянемо метод Феррарі на прикладах.

Приклад. Розв'язати рівняння: $x^4 - 8x^3 - 16 = 0$. (2.5.60)

Розв'язання: розв'яжемо рівняння вищевказаним методом. Суть цього методу полягає в наступному: за допомогою введеного параметра виділити повні квадрати, а потім розкласти ліву частину рівняння на множники як різницю квадратів.

Виділимо повний квадрат у лівій частині рівняння (2.5.60). Для цього додамо і віднімемо $16x^2$, тоді дістанемо:

$$x^4 - 2 \cdot 4x^3 + 16x^2 - 16x^2 - 16 = (x^2 - 4x)^2 - 16x - 16 = 0, \quad \text{або}$$

$$(x^2 - 4x)^2 = 16x^2 + 16. \quad (2.5.61)$$

Вводимо параметр a . Виділяємо повний квадрат різниці в якій 1 другим членом є a , а вираз у лівій частині рівняння (2.5.61) – за квадрат першого члена:

$$(x^2 - 4x)^2 - 2a(x^2 - 4x) + a^2 = 16x^2 + 16 - 2a(x^2 - 4x) + a^2;$$

$$(x^2 - 4x - a)^2 = (16 - 2a)x^2 + 8ax + a^2 + 16. \quad (2.5.62)$$

Підбираємо параметр a так, щоб у правій частині рівняння (2.5.62) був також повний квадрат.

У правій частині тричлен відносно x буде повним квадратом, якщо його дискримінант дорівнюватиме нулю. Тому $D = (8a)^2 - 4(16 - 2a)(a^2 + 16) = 0$.
 $a^3 + 16a - 128 = 0. \quad (2.5.63)$

Рівняння (2.5.63) розв'язуємо методом підбору. Одержимо: $a = 4$.

Підставимо значення a в рівняння (2.5.62):

$$(x^2 - 4x - 4)^2 = 8x^2 + 32x + 32, \text{ або}$$

$$(x^2 - 4x - 4)^2 - (2\sqrt{2}x + 4\sqrt{2})^2 = 0. \quad (5)$$

$$(x^2 - 4x - 4 - 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2})(x^2 - 4x - 4 + 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2}) = 0.$$

$$\begin{cases} x^2 - 2(2 + \sqrt{2})x - 4(1 + \sqrt{2}) = 0; \\ x^2 - 2(2 - \sqrt{2})x - 4(1 - \sqrt{2}) = 0. \end{cases}$$

$$x_{1,2} = 2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{10 + 8\sqrt{2}}.$$

$$\text{Відповідь: } x_{1,2} = 2 + \sqrt{2} \pm \sqrt{10 + 8\sqrt{2}}.$$

2.5.6. Метод заміни рівняння системою двох рівнянь з двома невідомими

Іноді процедуру розв'язання рівняння з однією невідомою спрощують заміною цього рівняння системою рівнянь з двома невідомими.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$(x^2 + 3x - 2)^2 + 3(x^2 + 3x - 2) - 2 = x. \quad (2.5.64)$$

Розв'язання: позначимо $x^2 + 3x - 2 = y$. (2.5.65)

Тоді маємо систему двох рівнянь:

$$\begin{cases} y^2 + 3y - 2 = x; & (2.5.66) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 2 = y. & (2.5.67) \end{cases}$$

Віднімемо (2.5.66) від (2.5.67):

$$(x^2 - y^2) + 3(x - y) + (x - y) = 0, \text{ або } (x - y)(x + y + 4) = 0.$$

$$\text{Звідки отримаємо: } \begin{cases} x - y = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$$

Об'єднавши кожне рівняння сукупності з рівнянням (2.5.67) маємо сукупність двох систем:

$$\begin{cases} \begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = y \end{cases} \\ \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ x^2 + 3x - 2 = y \end{cases} \end{cases}$$

Розв'язавши кожну з систем, дістанемо:

$$x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}; x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

$$\text{Відповідь: } x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}; x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{3}.$$

Приклад. Розв'язати рівняння $x \cdot \frac{19-x}{x+1} \left(x + \frac{19-x}{x+1} \right) = 84$.

$$\text{Нехай } x \cdot \frac{19-x}{x+1} = u, \quad x + \frac{19-x}{x+1} = v.$$

$$\text{Тоді маємо таку систему: } \begin{cases} u + v = 19 \\ u \cdot v = 84 \end{cases}$$

Дана система еквівалентна такій сукупності:

$$\begin{cases} \begin{cases} u = 12 \\ v = 7 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 7 \\ v = 12 \end{cases} \end{cases}$$

Враховавши заміни отримаємо таку сукупність:

$$\begin{cases} x^2 - 7x + 12 = 0 \\ x^2 - 12x + 7 = 0 \end{cases}$$

Розв'язавши рівняння отримаємо корені: $x_1 = 3; x_2 = 4; x_{3,4} = 6 \pm \sqrt{29}$.

Відповідь: $x_1 = 3; x_2 = 4; x_{3,4} = 6 \pm \sqrt{29}$

Висновки до розділу

На підставі аналізу математичної та методичної літератури було досліджено різні типи рівнянь вищих степенів і дібрано систему задач для їх розв'язування. Для кожного способу розв'язання подано алгоритмічну схему узагальненого характеру, яка дає змогу ефективно розв'язувати рівняння відповідного виду.

У ході дослідження здійснено теоретичне обґрунтування та впорядкування системи вивчення алгебраїчних рівнянь вищих степенів, зокрема:

- проаналізовано загальні відомості щодо рівнянь вищих степенів;
- визначено основні властивості алгебраїчних рівнянь;
- охарактеризовано провідні методи та прийоми розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів;
- продемонстровано загальний підхід і принципи розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів.

РОЗДІЛ 3.

РОЗРОБКА ФАКУЛЬТАТИВНОГО КУРСУ ДЛЯ УЧНІВ 8 АБО 9 КЛАСІВ НА ТЕМУ «НЕСТАНДАРТНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ДЕЯКИХ РІВНЯНЬ ВИЩИХ СТЕПЕНІВ»

3.1. Пояснювальна записка

У допрофільній підготовці учнів 8-9 класів особливого значення набувають факультативні курси, оскільки саме у цей освітній період учні повинні визначитися з профілем навчання у старшій школі. На факультативні курси покладаються два найважливіші завдання: допомогти учням реально оцінити свої можливості і зорієнтувати їх на подальший вибір профілю навчання. Зміст курсу має сприяти формуванню позитивної мотивації до опанування нових аспектів змісту та способів діяльності, стійкого інтересу до предмета, який буде профільним у майбутньому, розвивати здатність логічно мислити, аналізувати, порівнювати, зіставляти, систематизувати, узагальнювати, обґрунтовувати, шукати раціональні і нестандартні шляхи вирішення проблеми. Крім того, зміст факультативного курсу за вибором повинен не дублювати зміст підручника, а доповнювати його. Цим вимогам відповідає курс «Нестандартні методи розв'язування деяких видів рівнянь вищих степенів» для допрофільної підготовки учнів, присвячений розв'язуванню окремих видів рівнянь, що зводяться до квадратних, які майже не представлені в підручниках з алгебри для 8 класу загальноосвітніх навчальних закладів, проте вивчаються у класах з поглибленим вивченням математики.

Мета курсу:

- розширити і систематизувати знання учнів про види рівнянь та методи їх розв'язування;
- сформувати навички усного знаходження коренів квадратного рівняння за оберненою теоремою Вієта;

- створити міцне підґрунтя для подальшого навчання у тих профілях старшої школи, де математика вивчатиметься на академічному або профільному рівнях.

Курс призначений для учнів 8-9 класів тих профілів навчання, де математика не вивчається поглиблено, та класів універсального профілю і розрахований на 16 академічних годин. Його можна вивчати протягом IV чверті 8 класу паралельно з вивченням теми «Квадратні рівняння» або протягом I (II) чверті 9 класу за умови, що у навчальному плані загальноосвітнього навчального закладу на курси за вибором виділено не менше ніж 2 години на тиждень. В інших випадках курс доцільно опрацювати у 9 класі протягом одного семестру (1 година на тиждень). Розподіл годин між темами курсу може змінюватися залежно від рівня підготовки учнів, їхніх потреб і можливостей.

3.2. Зміст навчального матеріалу та вимоги до навчальних досягнень учнів

(2 год на тиждень протягом IV чверті у 8 класі або 1 год на тиждень протягом одного семестру у 9 класі, всього 16 год)

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
1	Вступ. Деякі відомості з історії розвитку теорії рівнянь. Розв'язування рівнянь вищих степенів способом розкладання на множники	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>володіє</i> поняттями «корінь рівняння», «розв'язати рівняння», «рівносильні рівняння», «ступінь рівняння»; • <i>знає</i> формули скороченого множення та способи розкладання на множники; • <i>уміє застосовувати</i> ці способи для розкладання многочленів на множники при розв'язуванні рівнянь.
1	Тема 1. Розв'язування квадратного рівняння за допомогою формули та усно за теоремою, оберненою до теореми Вієта	Учень (учениця): <ul style="list-style-type: none"> • <i>знає</i> теорему Вієта (пряму і обернену), умову існування коренів квадратного рівняння;

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
		<ul style="list-style-type: none"> • <i>уміє</i> усно розв'язувати зведене квадратне рівняння, що має цілі корені, та незведене квадратне рівняння, що має раціональні корені.
1	Тема 2. Застосування методу введення нової змінної для розв'язування біквадратних рівнянь та рівнянь, для яких заміна є очевидною (повторення за 8 клас)	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>знає</i> метод введення нової змінної; • <i>розпізнає</i> біквадратне рівняння; • <i>уміє</i> вводити заміну для розв'язування біквадратних рівнянь; • <i>розпізнає</i> рівняння, для яких заміна змінної є очевидною, і розв'язує їх.
1	Тема 3. Розв'язування рівнянь вигляду $x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=m$, де $a+b=c+d$	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> рівняння такого вигляду серед інших рівнянь; • <i>знає</i> спосіб підготовки рівняння до заміни, застосовує його та розв'язує рівняння.
1	Тема 4. Розв'язування симетричних рівнянь 3-го та 4-го степенів	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>знає</i>, що таке симетричне рівняння 3-го та 4-го степенів, <i>розпізнає</i> його серед інших рівнянь; • <i>уміє</i> зводити симетричне рівняння 4-го степеня до вигляду $a(x^2 + \frac{1}{x^2}) + b(x + \frac{1}{x}) + c = 0$, вводити нову змінну і правильно виконувати необхідні перетворення, щоб звести рівняння до квадратного, розв'язувати його та повертатися до вихідної змінної; • <i>знає</i>, що коренем симетричного рівняння 3-го степеня є число (-1);

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
		<ul style="list-style-type: none"> • <i>уміє</i> розв'язувати симетричне рівняння 3-го степеня шляхом розкладання його лівої частини на множники.
1	<p>Тема 5. Розв'язування зворотних рівнянь (вигляду $ax^4 + bx^4 + cx^4 + dx + e = 0,$² де $\frac{e}{a} = \frac{d}{b^2}$)</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Учень (учениця): • <i>розпізнає</i> зворотне рівняння серед інших рівнянь за властивістю його коефіцієнтів; • <i>уміє</i> зводити рівняння до вигляду $a(x^2 + \frac{d^2}{b^2x^2}) + b(x + \frac{d}{bx}) + c = 0$ • розв'язувати його та повертатися до вихідної змінної; • <i>знає</i>, що коренем зворотного рівняння непарного степеня є число (-1); • <i>уміє</i> розв'язувати зворотне рівняння 3-го степеня шляхом розкладання на множники.
1	<p>Тема 6. Розв'язування рівнянь вигляду $\frac{ax}{px^2 + nx + q} + \frac{bx}{px^2 + tx + q} = c$, та $\frac{px^2 + ax + q}{px^2 + nx + q} + \frac{px^2 + bx + q}{px^2 + tx + q} = c$</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> дані рівняння серед інших; • <i>знає</i> метод підготовки рівняння до введення нової змінної та розв'язування одержаного після заміни змінної рівняння; • <i>знає</i>, як повернутися до вихідної змінної та одержати корені вихідного рівняння.
1	<p>Тема 7. Розв'язування рівнянь вигляду $(px^2 + nx + q) \times (px^2 + tx + q) = ax^2$</p>	<p>Учень (учениця):</p> <ul style="list-style-type: none"> • <i>розпізнає</i> дане рівняння серед інших; • <i>знає</i> метод підготовки рівняння до заміни та

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
		застосовує його для розв'язування; • <i>обгрунтовує</i> , чому можна ділити обидві частини рівняння на x^2 .
1	Тема 8. Розв'язування рівнянь вигляду $x^2 + \frac{a^2 x^2}{(x + a)^2} = b$ та інших, що розв'язуються виділенням квадрата двочлена	Учень (учениця): • <i>розпізнає</i> дані рівняння серед інших; • <i>знає</i> , як доповнити ліву частину рівняння до квадрата суми або різниці • залежно від знака коефіцієнта a ; • <i>уміє</i> виконувати перетворення, що зводять рівняння до квадратного, розв'язувати одержане рівняння і повернутися до вихідної змінної.
1	Тема 9. Розв'язування рівнянь вигляду $(x + a)^2 + (x + b)^4 = c,$ $(x + a)^5 - (x + b)^5 = c$	Учень (учениця): • <i>розпізнає</i> дані рівняння серед інших; • <i>знає</i> , як ввести нову змінну; • <i>уміє</i> виконувати перетворення, що зводять рівняння до бікватратного, розв'язувати одержане бікватратне рівняння і повертатися до вихідної змінної.
1	Тема 10. Розв'язування однорідних рівнянь вигляду $af^2(x) + bf(x)g(x) + cg^2(x) = 0,$ де $f(x)$ і $g(x)$ - многочлени степенів m і n відповідно, $m \in N$, $n \in N$	Учень (учениця): • <i>розпізнає</i> однорідні рівняння й такі, що до них зводяться, серед інших; • <i>знає</i> спосіб підготовки рівняння до введення нової змінної; <i>вміє</i> його застосовувати; <i>знає</i> про можливість втрати коренів при застосуванні цього способу і <i>перевіряє</i> ті значення, які можуть бути втрачені, на належність до

К-сть годин	Зміст навчального матеріалу	Навчальні досягнення
		множини розв'язків рівняння; • <i>уміє</i> повертатися до вихідної змінної.
3	Тема 11. Розв'язування різних видів рівнянь та рівнянь підвищеної складності	Учень (учениця): • <i>класифікує</i> рівняння із запропонованого переліку залежно від їх виду та методу розв'язування; • <i>розв'язує</i> різні види рівнянь методом заміни змінної, в тому числі рівняння підвищеної складності
2	Резервний час	

3.3. Методичні рекомендації щодо викладання курсу

Цей курс можна викладати у 8 класі, коли вивчається тема «Квадратні рівняння» або у 9 класі.

При розв'язуванні рівнянь вищих степенів, що розглядаються у даному курсі, використовується метод введення нової (допоміжної) змінної або, іншими словами, заміна змінної. «Нестандартність» полягає не в самому методі, а в тому, що нестандартною є підготовка рівняння до використання цього методу. Тому процес підготовки рівняння до введення нової змінної доцільно називати нестандартним (або штучним) методом розв'язування рівняння. Загальний вигляд рівнянь подається за умови, що коефіцієнти рівнянь $a, b, c, d, e, f, k, m, n, p, q$ - деякі дійсні числа, відмінні від нуля.

Вступ - це своєрідний урок актуалізації знань, де рекомендується повторити означення таких понять, як «корінь рівняння», «рівносильні рівняння», «розв'язати рівняння», згадати всі вивчені у 7 класі способи розкладання многочленів на множники, формули скороченого множення та розв'язати декілька рівнянь вигляду $F(x) = 0$, ліва частина яких є многочленом з однією змінною, що розкладається на множники. Також можна повторити і спосіб розв'язування квадратного рівняння виділенням квадрата двочлена. Учні мають ознайомитися з розвитком теорії рівнянь на різних етапах

розвитку математики. Такий огляд можуть підготувати і самі учні (реферат, мультимедійна презентація).

Тема 1. На цьому етапі доцільно повторити теорему Вієта (пряму і обернену), з її допомогою усно розв'язати декілька зведених квадратних рівнянь, повторити формулу коренів квадратного рівняння, а також сформулювати вміння учнів застосовувати обернену теорему Вієта до розв'язування незведеного квадратного рівняння ([2], [5]).

Тема 2. Бажано повторити, що таке дробове раціональне рівняння і поняття ОДЗ.

Серед рівнянь, для яких заміна змінної є очевидною, обов'язково розглянути і такі, що є дробовими раціональними. Наприклад:

$$(2x-1)^4 + (2x-1)^2 - 2 = 0; \frac{x-3}{x+4} - \frac{x+4}{x-3} = \frac{1}{2}$$

Тема 3. Викладання цієї теми доцільно розпочати з розгляду рівняння типу $(x^2+8x)(x^2+8x+15)=100$ як пропедевтичного кроку до пошуку методу розв'язування рівнянь теми 3. Особливу увагу звернути на те, чому ділення обох частин рівняння на $x^2(x \neq 0)$ не призводить до втрати коренів. Наголосити на обов'язковості перевірки такого значення змінної на належність до множини розв'язків рівняння при використанні ділення обох частин на вираз зі змінною, якщо такі значення входять до ОДЗ цих рівнянь. Це стосуватиметься і рівнянь тем 4-7,10.

Тема 4. При вивченні цієї теми слід розглянути як рівняння 3-го, так і 4-го степенів, щоб учні зрозуміли принципову різницю між підходами до розв'язування кожного з розглядуваних рівнянь. Це стосується і рівнянь теми 5.

Тема 5. Необхідно акцентувати увагу учнів на залежності між коефіцієнтами рівняння, що дає змогу називати його зворотним. Якщо рівень математичної підготовки учнів, що вивчають даний курс, є високим, то можна розглянути і зворотне рівняння 6-го степеня $ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + k = 0$, для розв'язування якого обидві частини рівняння потрібно буде ділити вже на

x^3 , а залежність між його коефіцієнтами буде такою: $\left(\frac{a}{k}\right)^2 = \left(\frac{b}{f}\right)^3 = \left(\frac{c}{e}\right)^6$ ([5]).

Тема 7. Під час розгляду рівнянь теми 7 слід звернути особливу увагу на те, що праву частину ділимо на x^2 , при цьому кожний множник у лівій частині ділимо на x , що й означатиме, що ліва частина також поділена на x^2 . Зазвичай саме цей момент найважче сприймається учнями.

Тема 8. При розв'язуванні рівнянь цієї теми потрібно наголосити на залежності вибору виділення квадрата суми або різниці від знака коефіцієнта a , прийшовши до цього практичним шляхом під час розв'язування такого рівняння вперше. Це дасть змогу учням самим встановити, що при від'ємному y у лівій частині виділяємо квадрат суми, а при додатному a - квадрат різниці.

Тема 9. При розв'язуванні рівнянь теми 9 доцільно звернути особливу увагу на спосіб введення нової змінної, розглянути як рівняння 4-го, так і 5-го степенів.

Тема 10. Перед розглядом рівнянь теми 10 слід пояснити, що таке однорідний многочлен, степінь однорідності i , відповідно, що таке однорідне рівняння.

Години, що виділені наприкінці програми на розв'язування рівнянь, рекомендуємо використати для розв'язування рівнянь підвищеної складності, наприклад таких, що розв'язуються методом введення параметра, тощо.

Години резервного часу можна використати у тих темах, де, можливо, виділено замало часу на їх опрацювання, на питання історії розвитку теорії рівнянь або для групової роботи учнів, наприклад у вигляді командних змагань. Правила змагань можуть бути такими: кожна команда готує для супротивників по однаковій кількості рівнянь, подібних до вивчених, і записує кожне на окрему картку. Представники команд витягують картки, викладені зворотними сторонами на полі суперника, і розв'язують рівняння, зазначені на картках. Виграє команда, яка отримає найбільшу кількість балів. Бали нараховуються відповідно до кількості правильно розв'язаних членами команд рівнянь, кількості правильно знайдених способів розв'язування, а

також до кількості штрафних балів, що залежать від того, скільки разів представники команд вимушені будуть звернутися за підказкою до членів своєї команди. За необхідності результати такого змагання можуть бути зараховані як результат навчальних досягнень з даного курсу.

При вивченні нестандартних методів розв'язування рівнянь доцільно починаючи з теми 3 дати учням можливість піти стандартним шляхом (розкрити дужки або звести дроби до спільного знаменника, якщо рівняння дробове). Труднощі, з якими стикнуться учні, сприятимуть мотивації пошуку інших, штучних, методів розв'язування таких видів рівнянь. Також слід врахувати, що при використанні методу заміни змінної, навіть серед тих учнів, які добре засвоюють пропонований матеріал, часто трапляються випадки, коли після розв'язування допоміжного рівняння з новою змінною у відповідь записуються розв'язки саме допоміжного рівняння, тобто до вихідної змінної учні не повертаються. Тому потрібно давати можливість учневі самому знайти цю помилку шляхом-здійснення перевірки хоча б одного з коренів. Це допоможе учням уникати таких помилок у майбутньому.

Висновки до розділу

Було опрацьовано значний обсяг науково-методичної літератури з означеної проблематики. Проаналізовано відповідні збірники та сформовано систему задач практичного спрямування для використання на факультативних заняттях за темою «Нестандартні методи розв'язування деяких рівнянь вищих степенів». Розроблення факультативного курсу здійснювалося з урахуванням усіх дидактичних і психолого-педагогічних особливостей навчання математики школярів.

ВИСНОВКИ

У магістерській роботі здійснено теоретичне узагальнення та нове вирішення наукової проблеми, що полягає в обґрунтуванні та розробці методики навчання розв'язування рівнянь вищих степенів на факультативних заняттях у 8–9 класах. Результати проведеного дослідження дають підстави сформулювати такі висновки:

1. **На основі аналізу психолого-педагогічної та методичної літератури** з'ясовано, що факультативні заняття є однією з найбільш ефективних форм організації позакласної роботи з математики. Вони дозволяють реалізувати диференційований підхід до навчання та задовольнити пізнавальні інтереси учнів. Визначено, що вікова категорія учнів 8–9 класів характеризується сформованістю абстрактного мислення, необхідного для опанування складних алгебраїчних алгоритмів, що робить цей період сприятливим для вивчення методів розв'язування рівнянь вищих степенів.

2. **Аналіз чинних навчальних програм і підручників з алгебри** показав, що в межах обов'язкового шкільного курсу темі рівнянь вищих степенів приділяється недостатньо уваги. Програма здебільшого обмежується розв'язуванням квадратних рівнянь та окремих випадків біквадратних рівнянь. Більшість ефективних методів (теорема Безу, схема Горнера, метод невизначених коефіцієнтів) залишаються поза межами базового курсу, що створює розрив між шкільною підготовкою та вимогами олімпіадних завдань і майбутнього навчання у вищій школі.

3. **Систематизовано та адаптовано для сприйняття учнів 8–9 класів основні методи розв'язування алгебраїчних рівнянь вищих степенів.** У роботі детально розглянуто:

- *Загальні методи:* застосування теореми Безу та наслідків з неї, використання схеми Горнера для ділення многочленів, метод

пошуку цілих та раціональних коренів, метод невизначених коефіцієнтів.

- *Стандартні типи рівнянь:* двочленні, тричленні, зворотні (симетричні) та узагальнені зворотні рівняння.
- *Штучні методи:* метод групування, використання формул скороченого множення, метод введення допоміжної змінної, зведення рівняння до системи, а також методи, що базуються на аналізі структури рівняння.

4. Розроблено зміст, структуру та методичне забезпечення факультативного курсу «Нестандартні методи розв’язування деяких рівнянь вищих степенів» для учнів 8 або 9 класів.

- Створено пояснювальну записку, яка визначає мету та завдання курсу.
- Розроблено зміст навчального матеріалу, який логічно поєднує теоретичні відомості з практикою розв’язування задач.
- Запропоновано методичні рекомендації щодо викладання курсу, які акцентують увагу на формуванні в учнів евристичних прийомів пошуку розв’язку, розвитку алгоритмічної культури та дослідницьких навичок.

Отже, мета дослідження досягнута, поставлені завдання виконані. Матеріали магістерської роботи можуть бути використані вчителями математики закладів загальної середньої освіти для організації факультативної та гурткової роботи, а також під час підготовки учнів до математичних олімпіад.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Актуальні проблеми математики та методики її викладання: зб. наук. пр. / за ред. О. Ф. Геруса. Житомир : Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2009. С. 50–56.
2. Алгебра і початки аналізу. 10 клас : підручник для класів з поглибленим вивченням математики / А. Г. Мерзляк та ін. Харків: Гімназія, 2010. 415 с.
3. Бабенко С. П. Усі уроки алгебри і початків аналізу. 11 клас. II семестр. Академічний рівень. Харків : Основа, 2011. 253 с.
4. Бевз В. Г. Практикум з історії математики: навчальний посібник для студентів фіз.-мат. фак. пед. ун-тів. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2008. 312 с.
5. Бевз В. Г., Бурда М. І., Прокопенко Н. С. За лаштунками шкільної математики. *Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання. Ч. I. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором* / упоряд.: Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. Харків : Ранок, 2011. 320 с.
6. Бевз Г. П. Методика навчання математики : навч. посіб. для інститутів. Київ : Вища школа, 1989. 367 с.
7. Васильєва Д. В. Змішане навчання на уроках математики. *Математика в рідній школі*. 2019. № 1–2. С. 59–63.
8. Дубинчук О. С., Мальований Ю. І., Дичек Н. П. Методика викладання алгебри в 7–9 класах: посібник для вчителя. Київ : Радянська школа, 1991. 254 с.
9. Єргіна О., Єргін А. Розв'язування деяких рівнянь вищих степенів. *Математика*. 2006. № 14.
10. Жалдак М. І. Педагогічний потенціал комп'ютерно-орієнтованих систем навчання математики. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання*. Київ : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2003. Вип. 7. С. 2–15 (або С. 263).

11. Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Винниченко Є. Ф. Математика з комп'ютером: посібник для вчителів. Київ : РУНЦ «ДИНИТ», 2004. 251 с.
12. Збірник задач з математики для вступників до вузів / за ред. М. І. Сканаві. Київ : Вища школа, 1992. 445 с.
13. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання : у 2 ч. Ч. II. Профільне навчання / упоряд.: Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна. Харків : Ранок, 2011. 384 с. (Факультативи та курси за вибором).
14. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Петюренко А. В. Формування творчого мислення учнів при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. *Математика в школі*. 2005. Вип. 5. С. 35–40.
15. Кушнір В. А., Кушнір Г. А., Ріжняк Р. Я. Інноваційні методи навчання математики : науково-методичний посібник Кіровоград : РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 148 с.
16. Львов М. С., Сінько Ю. П. Про один підхід до побудови систем підтримки розв'язок математичних задач, конструйованих за умовою. *Комп'ютерно-орієнтовані системи навчання : збірник наукових праць НПУ ім. М. П. Драгоманова*. Київ, 2001. Вип. 4. С. 75–82.
17. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Збірник задач і завдань для тематичного оцінювання з алгебри для 8 класу. Харків : Гімназія, 2008. 96 с.
18. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра. 9 клас : підручник для класів з поглибленим вивченням математики. Харків : Гімназія, 2009. 379 с.
19. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра : підручник для 8 класу з поглибленим вивченням математики. Харків : Гімназія, 2008. 368 с.

20. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу : монографія. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. 320 с.
21. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях : навчальний посібник для учнів 7–11 класу Харків : Світ дитинства, 1998. 116 с.
22. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : дворівневий підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. 2-ге вид. Харків : Світ дитинства, 2006. 416 с.
23. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу : підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Харків : Гімназія, 2010. 415 с.
24. Освітній проект «На Урок» для вчителів : веб сайт. URL: <https://naurok.com.ua/> (дата звернення: 06.12.2025).
25. Офіційний сайт Міністерства освіти і науки України : веб сайт. URL: <https://mon.gov.ua/ua> (дата звернення: 04.12.2025).
26. Практикум розв'язування задач з математики / В. Г. Михайловський та ін. Київ : Вища школа, 1989. 423 с.
27. Репета В. Рівняння, нерівності та системи рівнянь, що містять знак абсолютної величини. *Математична газета*. 2006. Вип. 5. С. 27–32.
28. Роганін О. М., Каплун О. І. Математика : практичний довідник. Харків : ФОП Співак Т. К., 2009. 416 с.
29. Роєва Т. Г., Адруг Л. М., Карцан Л. П. Шкільна енциклопедія з алгебри. Харків : Країна мрій, 2008. 464 с.
30. Саушкін О. Ф. Рівняння вищих степенів : навчальний посібник. Київ : КНЕУ, 1999. 140 с.
31. Сипченко Т. С. Календарно-тематичний план з математики. 10–11 класи. 2-ге вид. Харків : Ранок, 2017. 128 с.
32. Системно-діяльнісне навчання як засіб реалізації інтегративного підходу (на прикладі вивчення курсів математики та інформатики) / Р. Я. Ріжняк та ін. *Нові технології навчання*. Київ : Науково-методичний центр вищої освіти, 2004. Вип. 39. С. 33–48.

- 33.Слепкань З. І. Методика навчання математики : підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закл. Київ : Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.
- 34.Титаренко О. М. 5770 задач з математики з відповідями. 2-ге вид. Харків : Торсінг Плюс, 2007. 336 с.
- 35.Титаренко О. М. Форсований курс шкільної математики : навчальний посібник. Харків : Торсінг, 2003. 368 с.
- 36.Український центр оцінювання якості освіти : вебсайт. URL: <https://testportal.gov.ua/> (дата звернення: 04.12.2025).
- 37.Ушаков Р. П. Повторювальний курс математики : посібник для учнів середніх закладів освіти / за ред. М. Й. Ядренка. 2-ге вид., випр. і доп. Київ : Техніка, 2003. 591 с.
- 38.Фурман М. С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. Харків : Основа, 2010. 159 с.
- 39.Харік О. Ю. Елементи математичного аналізу для школярів. Ч. 1. Харків : Основа, 2011. 111 с. (Б-ка журн. «Математика в школах України» ; вип. 10 (106)).
- 40.Шкіль М. І., Слепкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : підручник для 10 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2002. 272 с.
- 41.Шкіль М. І., Слепкань З. І., Дубинчук О. С. Алгебра і початки аналізу : підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Київ : Зодіак-ЕКО, 2002. 384 с.
- 42.Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язання. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2006. 208 с.

ДОДАТОК А

Розробка факультативних занять

Методи розв'язування рівнянь

I. Групування: шляхом групування доданків доданків, примінення формул скороченого множення звести (якщо це вдається) рівняння до вигляду, де зліва записано добуток декількох множників, а справа – нуль. Потім прирівнюємо до нуля кожний множник.

Приклади.

$$\begin{aligned}
 1). \quad & \underline{x^3 - (a+b+c)x^2 + (ab+ac+bc)x - abc = 0}, \\
 & x^3 - ax^2 - bx^2 - cx^2 + abx + acx + bcx - abc = 0, \\
 & \text{групуємо: } x^2(x-a) - bx(x-a) - cx(x-a) + bc(x-a) = \\
 & = (x-a)(x^2 - bx - cx + bc) = 0 \\
 & x-a=0 \quad \text{або} \quad x^2 - bx - cx + bc = 0, \\
 & x_1 = a \qquad x(x-b) - (x-b)c = 0, \\
 & \qquad \qquad (x-b)(x-c) = 0, \\
 & \qquad \qquad x-b=0 \qquad \text{або} \quad x-c=0 \\
 & \qquad \qquad x_2 = b \qquad \qquad x_3 = c
 \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 = a, x_2 = b, x_3 = c$

$$\begin{aligned}
 2). \quad & \underline{x^3 - 3x + 2 = 0}. \text{ Перепишемо рівняння, записавши } -3x = -x - 2x \\
 & \underline{x^3 - x - 2x + 2 = 0} \\
 & x(x^2 - 1) - 2(x-1) = 0, \\
 & (x-1)(x(x+1) - 2) = 0. \\
 & x-1=0, \qquad \qquad x^2 + x - 2 = 0 \\
 & x_1 = 1 \qquad \qquad x_2 = -2, x_3 = 1
 \end{aligned}$$

Відповідь: $x_1 = x_3 = 1; x_2 = -2$

II. Підстановки: шукаємо в рівнянні деякі вирази, що повторюються, які позначаємо новою змінною, тим самим спрощуємо вигляд рівняння. В деяких випадках видно, що позначити новою змінною, а в деяких треба

виконати спочатку тотожні перетворення. В інших випадках зручно підстановку робити знаючи „наперед”.

Приклади.

$$1). \quad \underline{(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680},$$

$$(x^2-11x+28)(x^2-11x+30)=1680.$$

Постачимо $x^2-11x+28=t$, тоді:

$$t(t+2)=1680. \quad t_1=-42, t_2=40. \text{ Звідси}$$

$$x^2-11x+28=-42 \quad \text{або} \quad x^2-11x+28=40$$

$$x^2-11x+70=0 \quad x^2-11x-12=0$$

$$x \in \emptyset \quad x_1=12, x_2=-1$$

Відповідь: $x_1=-1; x_2=12$

2). Симетричні рівняння (коефіцієнти членів, які знаходяться на однаковій відстані, рівні)

$$\underline{2x^4+3x^3-16x^2+3x+2=0}$$

Розділимо дві частини рівняння на $x^2 \neq 0$,

одержимо ~~$2x^2+3x-16+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}$~~

~~$$2x^2+\frac{1}{x^2}+3x+\frac{1}{x}-16,$$~~

позначимо $x+\frac{1}{x}=t$, тоді ~~$x^2+2x\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=t^2$~~ , звідси

~~$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2.$$~~

Одержимо:

$$2(t^2-2)+3t+(-16)=0,$$

$$2t^2+3t-20=0,$$

$$t_1=-4, t_2=\frac{5}{2}.$$

$$x+\frac{1}{x}=-4, \quad x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$$

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3} \quad x_3=2, x_4=\frac{1}{2}$$

Відповідь: $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{3}, x_3=2, x_4=\frac{1}{2}.$

3). $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$. Позначимо:

$$x^2+x=a, \quad \text{тоді маємо:}$$

$$(a+1)(a+2)=12$$

$$(a^2+3a-10=0$$

$$a_1=2, \quad a_2=-5$$

$$x^2+x=2, \quad \text{або} \quad x^2+x=-5,$$

$$x^2+x-2=0, \quad x^2+x+5=0$$

$$x_1=1, x_2=-2 \quad x \in \emptyset$$

Відповідь: -2, 1

4). $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$

Поділимо на $x^2 \neq 0$.

$$\frac{(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)}{x^2} = \frac{9x^2}{x^2}$$

$$(2-3\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})(2+5\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}) = 9 \quad \text{Замінімо } 2x+\frac{1}{x}=t$$

$$(t-3)(t+5)=9,$$

$$t^2+2t-24=0$$

$$t_1=4, t_2=-6 \quad \text{Тоді} \quad 2x+\frac{1}{x}=4 \quad \text{або} \quad 2x+\frac{1}{x}=-6$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2} \quad x_{3,4}=\frac{-6\pm\sqrt{28}}{4}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{2\pm\sqrt{2}}{2}; \frac{-6\pm\sqrt{28}}{4}$$

III. Підбір: при розв'язуванні рівнянь вищих степенів раціональні корені рівняння

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ шукаємо серед чисел виду $\frac{P}{Q}$, де P – дільник вільного члену, Q – дільник ст. коефіцієнта (a_n) P і Q взаємно прості, $P \in \mathbb{Z}$, $Q \in \mathbb{N}$.

Приклади.

$$1). \quad x^3 - x^2 - 8x + 6 = 0.$$

$a_n = 1, a_0 = 6$. Тому, якщо дане рівняння має корені, то їх слід шукати серед дільників числа 6: $\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6$. перевіркою переконуємося, що $x = 3$. Ділимо ліву і праву частину рівняння на $x - 3$.

$$\begin{array}{r} \underline{x^3 - x^2 - 8x + 6} \quad / \underline{x - 3} \\ \underline{x^3 - 3x^2} \\ \underline{2x^2 - 8x} \\ \underline{2x^2 - 6x} \\ \underline{-2x + 6} \\ \underline{-2x + 6} \\ 0 \end{array}$$

$$\text{Тоді} \quad x^3 - x^2 - 8x + 6 = (x - 3)(x^2 + 2x - 2) = 0$$

$$\text{Звідси} \quad x_1 = 3, \quad x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = 3, \quad x_{2,3} = -1 \pm \sqrt{3}$$

$$2). \quad 2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8 = 0$$

$a_n = 2, a_0 = 8$ Раціональні корені слід шукати серед чисел $\pm 1; \pm \frac{1}{2}; \pm 2; \pm 4; \pm 8$.

Перевіркою переконуємося, що $x = -1$ – корінь рівняння, тому

$$\begin{array}{r} \underline{2x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 6x + 8} \quad / \underline{x + 1} \\ \underline{2x^4 + 2x^3} \\ \underline{-5x^3 - 7x^2} \\ \underline{-5x^3 - 5x^2} \\ \underline{-2x^2 + 6x} \\ \underline{-2x^2 - 2x} \\ \underline{8x + 8} \\ \underline{8x + 8} \\ 0 \end{array}$$

Дане рівняння можна записати: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 6x + 8 = (x+1)(2x^3 - 5x^2 - 2x + 8) = 0$.

Аналогічно знаходимо корінь рівняння $2x^3 - 5x^2 - 2x + 8 = 0$, $x = 2$. Знову ділимо на $x-2$.

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 5x^2 - 2x + 8 \\ \underline{2x^3 - 4x^2} \\ -x^2 - 2x \\ \underline{-x^2 + 2x} \\ -4x + 8 \\ \underline{-4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

Тоді маємо: $2x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 6x + 8 = (x+1)(x-2)(2x^2 - x - 4) = 0$

Звідси $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$.

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$.

IV. Нестандартний.

Приклади.

1). $\frac{4}{x+3} + \frac{5}{x-5} = \frac{3}{2}$

Поділимо чисельник і знаменник дробу на $x \neq 0$

$$\frac{4}{x+3} + \frac{5}{x-5} = \frac{3}{2} \quad \text{Позначимо } x + \frac{3}{x} = t, \text{ одержимо:}$$

$$\frac{4}{t+1} + \frac{5}{t-5} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{8t-40+10t+10+(3t+3)(t-5)}{2(t+1)(t-5)} = 0, \quad t \neq -1, t \neq 5.$$

$$8t - 40 + 10t + 10 + (3t+3)(t-5) = 0,$$

$$3t^2 + 6t - 45 = 0,$$

$$t^2 + 2t - 15 = 0$$

$$t_1 = 3, t_2 = -5, \text{ звідси:}$$

$$x + \frac{3}{x} = 3,$$

$$x + \frac{3}{x} = -5$$

$$x \neq 0.$$

$$x \neq 0.$$

$$x^2 - 3x + 3 = 0$$

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$x \in 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

2). ~~$x^4 - 2x^3 + x - \frac{3}{4} = 0$~~ . Виділимо повний квадрат, додавши і віднявши в лівій частині рівняння x^2 .

~~$$x^4 - 2x^3 + x^2 - x^2 + x - \frac{3}{4} = 0, \quad (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - \frac{3}{4} = 0.$$~~ Нехай $x^2 - x = t$, тоді:

~~$$t^2 - t - \frac{3}{4} = 0$$~~

~~$$t_1 = -\frac{1}{2}, \quad t_2 = -\frac{3}{2}.$$~~ Вернемося до змінної x .

~~Маємо: $x^2 - x = \frac{1}{2}$ або $x^2 - x = \frac{3}{2}$~~

~~$$x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$$~~

~~$$x^2 - x - \frac{3}{2} = 0$$~~

~~$$x \neq 0.$$~~

~~$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$$~~

~~Відповідь: $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$~~

~~$$3). \quad (3x^2 + 7x - 2)^2 + 5x^2(3x^2 + 7x - 2) - 24x^4 = 0$$~~

Це „однорідне” рівняння, тобто рівняння виду $ay^{2\lambda} + by^{\lambda}z^{\lambda} + cz^{2\lambda} = 0$, де a, b, c, λ – задані числа відмінні від нуля; $y = y(x)$, $z = z(x)$ – деякі функції від x . Ділимо обидві частини рівняння на $z^{2\lambda} \neq 0$ (на функцію y вищому степені).

Одержимо:

~~$\frac{y^2}{z^2} + 5\frac{y}{z} - 24 = 0$~~ . Позначимо $\frac{y}{z} = t$, одержимо квадратне рівняння відносно t .

Поділимо на $x^4 \neq 0$, одержимо:

$$\frac{3x^2+7x-2}{x^2} = t, \text{ маємо:}$$

$$\text{Нехай } \frac{3x^2+7x-2}{x^2} = t, \text{ маємо:}$$

$$t^2+5t-24=0$$

$$t_1=3, t_2=-8 \text{ Тоді: а) } \frac{3x^2+7x-2}{x^2} = 3 \text{ або б) } \frac{3x^2+7x-2}{x^2} = -8$$

$$\text{а) } 3x^2-3x^2+7x-2=0$$

$$\text{б) } 3x^2+8x^2+7x-2=0$$

$$x_1 = \frac{2}{7}$$

$$11x^2+7x-2=0$$

$$D=49+88=137$$

$$x_{23} = \frac{-7 \pm \sqrt{137}}{22}$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = \frac{2}{7}; x_{23} = \frac{-7 \pm \sqrt{137}}{22}.$$

$$4). \quad x^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7$$

Користуючись формулою $a^2+b^2=(a-b)^2+2ab$, одержимо:

$$\frac{x^2}{(x+3)^2} + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7,$$

$$\left(\frac{x}{x+3}\right)^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7,$$

$$\left(\frac{x-3x}{x+3}\right)^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7,$$

$$\left(\frac{-2x}{x+3}\right)^2 + \frac{9x^2}{(x+3)^2} = 7.$$

$$\text{Нехай } \frac{x^2}{x+3} = a, \text{ тоді маємо: } a^2+6a-7=0.$$

$$a_1=1, a_2=-7$$

$$\frac{x^2}{x+3} = -7 \quad \text{або} \quad \frac{x^2}{x+3} = 1$$

$$\frac{x^2-7x-37}{x+3} = 0 \quad x \neq -3 \quad x^2-x-3=0, x \neq -3$$

$$x \in \emptyset \quad x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$\text{Відповідь: } x = \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$5). \quad \frac{2x-1}{x-1} + \frac{3x-1}{x-2} + \frac{x-7}{x-1} =$$

$$D(f): x \neq -1, x \neq -2, x \neq 1.$$

В прикладах, де ліва частина являє собою суму дробів, в кожному дробі виділяють цілу частину (ділять чисельник на знаменник).

$$\begin{array}{l} \frac{2x-1}{x-1} = \frac{2x+2}{x-1} - \frac{3}{x-1}, \quad \frac{3x-1}{x-2} = \frac{3x+6}{x-2} - \frac{7}{x-2}, \quad \frac{x-7}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} - \frac{6}{x-1} \\ \frac{2x+2}{x-1} - \frac{3}{x-1} + \frac{3x+6}{x-2} - \frac{7}{x-2} + \frac{x-1}{x-1} - \frac{6}{x-1} = \end{array}$$

$$\frac{2x+2}{x-1} - \frac{3}{x-1} + \frac{3x+6}{x-2} - \frac{7}{x-2} + \frac{x-1}{x-1} - \frac{6}{x-1} =$$

$$\frac{4x+3}{x-1} + \frac{7}{x-2} - \frac{6}{x-1} =$$

$$\frac{3}{x-1} + \frac{7}{x-2} - \frac{6}{x-1} =$$

$$4x^2 - 15x - 25 = 0$$

$$D = 625$$

$$x_1 = -1\frac{1}{4}; \quad x_2 = 5.$$

$$\text{Відповідь: } x_1 = -1\frac{1}{4}; \quad x_2 = 5.$$

V. Різні методи розв'язування.

Приклади.

$$1). \quad (x-1)x(x+1)(x+2) = 24,$$

$$(x-1)(x+2)x(x+1) = 24,$$

$$(x^2+x-2)(x^2+x) = 24.$$

Нехай $x^2+x=t$, тоді

$$t(t-2) = 24$$

$$t^2 - 2t - 24 = 0$$

$t_1 = -4, t_2 = 6$. Перевіримо для змінної x

$$x^2 + x = 6 \quad \text{або} \quad x^2 + x = -4$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \quad x^2 + x + 4 = 0$$

$$x_1 = -3, x_2 = 2 \quad x \in \emptyset$$

Відповідь: $x_1 = -3, x_2 = 2$

$$2). \quad (x+2)(x+3)(x+8)(x+12) = 4x^2,$$

$(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$ поділимо на $x^2 \neq 0$.

$$\frac{(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24)}{x^2} = \frac{4x^2}{x^2}$$

$$(x + 14 + \frac{24}{x})(x + 11 + \frac{24}{x}) = 4 \quad \text{Нехай } (x + \frac{24}{x}) = t$$

$$(t + 14)(t + 11) = 4,$$

$$t^2 + 25t + 150 = 0,$$

$$t_1 = -15, t_2 = -10. \quad \text{Тоді: } (x + \frac{24}{x}) = -15 \quad \text{або} \quad (x + \frac{24}{x}) = -10$$

$$x^2 + 10x + 24 = 0$$

$$x^2 + 15x + 24 = 0$$

$$x_1 = -6, x_2 = -4$$

$$x_{34} = \frac{15 \pm \sqrt{12}}{12}$$

Відповідь: $x_1 = -6; \quad x_2 = -4;$

$$x_{34} = \frac{15 \pm \sqrt{12}}{12}.$$

$$4). \quad \frac{2}{x^2 + 4} + \frac{3}{x^2 + 1} = \frac{5}{x^2 + 24}$$

Поділимо чисельник і знаменник дробу на $x \neq 0$

$$\frac{\frac{2}{x} + \frac{3}{x+1}}{\frac{x^2 + 4}{x} + \frac{x^2 + 1}{x}} = \frac{\frac{5}{x}}{\frac{x^2 + 24}{x}}$$

Нехай $x + \frac{2}{x} = y$, тоді $\frac{\frac{2}{y} + \frac{3}{y+1}}{y^2 + 4y + 1} = \frac{5}{4}; y \neq -1; y \neq 4$

$$4(2y+2)+4(3y-12)+5(y-4)(y+1)=0$$

$$5y^2+5y-60=0,$$

$$y^2+y-12=0$$

$$y_1=-4, y_2=3 \quad x+\frac{2}{x}=-4 \quad \text{або} \quad x+\frac{2}{x}=3$$

$$x^2+4x+2=0 \quad x^2-3x+2=0$$

$$x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2} \quad x_1=1, x_2=2$$

Відповідь: $x_{1,2}=-2\pm\sqrt{2}, 1, 2$.

$$5). \quad 4x^2 + \left(\frac{4x}{x-2}\right)^2 = 2$$

$$4x^2 + \frac{16x^2}{(x-2)^2} = 2$$

$$4x^2 + \frac{16x^2}{x^2-4x+4} = 2$$

$$\left(\frac{2x}{x-2}\right)^2 - 8\frac{x^2}{x-2} = 2$$

$$x \neq 2$$

Нехай $\frac{2x^2}{x-2} = y$

$$y^2 - 8y - 20 = 0$$

$$D = 144$$

$$y_1 = 10, y_2 = -2$$

Перейдемо до змінної x

$$\frac{2x^2}{x-2} = 10,$$

$$2x^2 - 10x + 20 = 0$$

$$D < 0, x \in \emptyset$$

$$\frac{2x^2}{x-2} = -2,$$

$$2x^2 - 2x + 4 = 0, \quad ,$$

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = -2, x_2 = 1$$

Відповідь: $x_1 = -2, x_2 = 1$

Опрацюй самостійно:

- 1). $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24 = 0$ В.: $-1; 2; -3; 4.$
- 2). $(x^2 + 5x)^2 - 2(x^2 + 5x) - 24 = 0$ В.: $\pm 1; -6; -4.$
- 3). $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) = 1680$ В.: $-1; 12.$
- 4). $x^2 + \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 8$ В.: $2 \pm 2\sqrt{2}.$
- 5). $\frac{x}{x^2 - 5x + 2} + \frac{1}{x-2} = 0$ В.: $x_1 = 2; x_2 = 0,75.$