

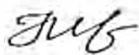
Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»
Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій
Кафедра математики та інформатики

Щербина Наталія Михайлівна

**«ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ЇХ
ЗАСТОСУВАННЯ»**

кваліфікаційна робота
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня
освітньої програми «Математика»
за спеціальністю 014.04. Середня освіта (Математика)

Особистий підпис



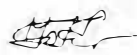
Наталія ЩЕРБИНА

Науковий керівник



Валерій ХМЕЛЬ,
кандидат педагогічних наук, доцент
кафедри математики та інформатики
Юрій КОЗУБ,
доктор технічних наук, професор
кафедри математики та інформатики

В.о. завідувача кафедри



Лубни – 2026

ЗМІСТ

АНОТАЦІЯ	3
ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. НАУКОВО ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ	12
1.1. З історії виникнення послідовностей та прогресій	12
1.2. Поняття числової послідовності	14
1.3. Арифметична та геометрична прогресії. Їх основні властивості та застосування	19
Висновки до розділу 1	25
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ »	26
2.1. Аналіз змістової лінії «Числові послідовності» у програмах шкільного курсу математики	26
2.2. Особливості вивчення числових послідовностей за шкільними підручниками 9, 10 класів	27
2.3. Властивості числових послідовностей та їх застосування	35
2.4. Методичні вказівки до вивчення теми «Числові послідовності, їх властивості та застосування»	38
2.5. Тестові завдання з теми дослідження в системі математичної підготовки школярів	46
2.6. Деякі випадки застосування числових послідовностей при розв'язуванні олімпіадних задач	48
2.7. Задачі на числову послідовність у завданнях НМТ	51
2.8. Педагогічні засоби подолання освітніх втрат і збереження якості освіти в умовах воєнного стану та повоєнного відновлення України	58
Висновки до розділу 2	63

РОЗДІЛ 3. ДИДАКТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПО ТЕМІ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ» ПРИ ДИСТАНЦІЙНОМУ НАВЧАННІ	65
3.1 Дидактичне забезпечення. Організація дистанційного навчання математики	65
3.2 Підготовка та методика створення відеоуроків з математики	78
3.3 Classtime як допомога вчителю математики для дистанційного навчання при вивченні теми «Числові послідовності»	91
3.4 Практична перевірка результатів дослідження	96
Висновки до розділу 3	97
ВИСНОВКИ	99
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	101
ДОДАТКИ	107

АНОТАЦІЯ

Щербина Н. М.

Тема: «Властивості числових послідовностей та їх застосування»

Спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)».

Установа: ЛНУ імені Тараса Шевченка, 2026 р.

Магістерська робота містить: 112 с., 38 рис., 37 джерел.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики учнів середньої школи.

Предметом дослідження є методичні особливості вивчення властивостей числових послідовностей та їх застосування у шкільному курсі математики.

Мета роботи полягає в дослідженні у виявленні методичних особливостей вивчення властивостей числових послідовностей та їх застосувань у шкільному курсі математики.

Результати роботи – Узагальнено вивчення властивостей числових послідовностей у шкільному курсі математики. Розроблено таблиці, алгоритми та програми з теми дослідження. Забезпечено теоретичним внеском у розвиток математичного апарату. Застосування перетворює ці теоретичні знання на корисні інструменти для вирішення практичних проблем та виходить далеко за межі чистої математики, охоплюючи фінанси, програмування та моделювання природних процесів.

Ключові слова: ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ, ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ, ЗБІЖНІСТЬ, РЕКУРЕНТНІ СПІВВІДНОШЕННЯ, ЧИСЛА ФІБОНАЧЧІ, ІТЕРАЦІЙНІ МЕТОДИ, МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ.

ANNOTATION

Shcherbina N. M.

Topic: "Property of numerical diseases and their application"

Specialty: 014.04 "Secondary education (Mathematics)".

Institution: Taras Shevchenko National University of Lviv, 2026

Master's thesis contains: 112 p., 38 figures, 37 sources.

The object of the study is the process of teaching mathematics to high school students.

The subject of the study is the methodological features of studying the properties of numerical sequences and their application in the school mathematics course.

The purpose of the study is to determine the methodological features of studying the properties of numerical sequences and their application in the school mathematics course.

Results of the work – The study of the properties of numerical sequences in the school mathematics curriculum has been summarized. Tables, algorithms, and programs related to the research topic have been developed. A theoretical contribution to the development of the mathematical framework has been provided. Its application transforms this theoretical knowledge into useful tools for solving practical problems and extends far beyond pure mathematics, encompassing finance, programming, and the modeling of natural processes.

Keywords: NUMERICAL SEQUENCES, SEQUENCE LIMIT, CONVERGENCE, RECURRENCE RELATIONS, FIBONACCI NUMBERS, ITERATIVE METHODS, MATHEMATICAL MODELING.

ВСТУП

Актуальність теми.

Нова українська школа – важлива реформа МОН. Головна мета – створити школу, яка дає змогу учням вчитися із задоволенням, не тільки надавати учням знання, а й надавати можливості застосовувати їх у житті [23, С. 38-40].

Математика займає особливе місце в системі знань, накопиченої в історії розвитку людства за сотні років, тому що вона є потужним методом універсального пізнання та вивчення світу. Однією з важливих цілей освіти є забезпечення дітей необхідним рівнем математичної підготовки, яка потрібна для успішного саморозвитку в соціальному середовищі, а також подальший відбір і розвиток спеціальностей, які потребують відповідних математичних знань, умінь і передових математичних засобів, щоб встановити і вивчити реальні закономірності та процеси.

Основне вивчення та розгляд властивостей числових послідовностей та їх застосування в українській шкільній програмі з алгебри відбувається переважно в 9-му класі.

У 10 класі (рівень стандарту або профільний рівень) тема «Числові послідовності» не вивчається як самостійна нова тема. Натомість, знання та властивості числових послідовностей, зокрема границя послідовності (на профільному рівні), використовуються для:

- Вивчення границі функції та неперервності функції.
- Поглиблення розуміння математичного аналізу, зокрема при введенні похідної (як границі відношення приросту функції до приросту аргументу) та інтеграла (як границі інтегральних сум).

Числові послідовності широко використовуються в прикладних областях, таких як фізика, економіка, комп'ютерні науки і багато інших. Розуміння

принципів числових послідовностей може бути важливим для розв'язання проблем та задач у різних галузях.

Дослідження властивостей та закономірностей числових послідовностей сприяє розвитку логічного мислення учнів. Розв'язання вправ з цієї теми вимагає аналітичного підходу та вміння застосовувати математичні концепції для розв'язання завдань. Вивчення числових послідовностей допомагає учням розвивати абстрактне мислення, оскільки вони працюють з абстрактними концепціями та структурами даних. Розвиток мислення школярів – це завдання всіх предметів у школі, але навчальна програма з математики відіграє дуже важливу роль завдяки своїм особливостям. Фактично, під час вивчення високоабстрактних предметних понять буде формуватися ідея математичного моделювання, систематично та послідовно впроваджуватись аргументація, чіткі логічні міркування, точність, лаконічність та мовна інформація.

Одним з найважливіших понять у шкільній навчальній програмі з математики є поняття функції. Числова послідовність є однією з найважливіших класів числових функцій, яка з'явилася і розвивалася задовго до створення теорії функцій і була об'єктом незалежного дослідження [5, С. 70].

Проблема числової послідовності, тобто арифметичної прогресії та геометричної прогресії, вперше виникла зі спостереження за природними явищами. Навіть давньоруська збірка «Руська правда» містить інформацію про розведення великої рогатої худоби та бджіл за певний період, про кількість зерна, зібраного з певної ділянки землі тощо.

Дидактичне забезпечення до вивчення числових послідовностей є **актуальним**, оскільки в порівнянні з традиційними методами навчання, яке організовується на основі самостійної роботи, таблиць та використання нових інформаційних технологій для вдосконалення навичок, сприятиме розвитку особистості та формуванню стійкого інтересу до предмета. На перший погляд,

важливість цієї невеликої частини шкільної програми полягає в її надзвичайно широких сферах застосування:

- прогресії у медицині («Пацієнти приймають ліки згідно з такою схемою: прийом 5 крапель ліків у перший день, а кожного наступного – на 5 крапель більше, ніж попереднього дня. Він приймає 40 крапель ліків, потім випиває 40 крапель протягом 3 днів, а потім зменшує прийом на 5 крапель щодня, поки його прийом не становитиме 5 крапель. Якщо кожен флакон містить 20 мл ліків (тобто 250 крапель), скільки пляшечок ліків повинен купити пацієнт)?»);
- в спорті (На змаганні по стрільбі за кожен промах з 25 пострілів поспіль в спортсмена будуть відніматись штрафні очки: перший промах – це одне штрафне очко, а кожен наступний – на 0,5 очка більше попереднього. Скільки разів спортсмен влучив у ціль, якщо він отримав 7 штрафних очок?);
- в банківських розрахунках («Уявіть, що ви відкрили банківський депозит у сумі a грн. Під m % річних на t років. У вас є два варіанти поведінки: або в кінці кожного року зберігання вкладу знімати відсотки за вкладом, або приходити до банку один раз наприкінці періоду депозиту. Який дохід ви отримаєте в обох випадках?» Щоб дати відповідь на це запитання, ви повинні розв'язувати задачу на геометричну прогресію.);
- в природі (Інтенсивність розмноження всіх організмів - це геометрична прогресія. Як ми всі знаємо, бактерії розмножуються шляхом поділу: одна бактерія поділяється на дві; ці дві діляться на дві, в результаті отримаємо чотири бактерії; з цих чотирьох шляхом поділу будемо мати вісім бактерій і т. д.). Отже, вивчення числових послідовностей не лише є важливим етапом у математичній освіті, але й надає інструменти для розвитку різних аспектів їхнього когнітивного потенціалу та підготовки до подальшого вивчення математики та її застосувань.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Числовими послідовностями як об'єктом дослідження і як предметом вивчення властивостей найпростіших рекурентних співвідношень цікавляться як математики-науковці так і педагоги.

Так дослідженню числових послідовностей, зокрема арифметичної і геометричної прогресій присвячені роботи Лунга К.Н. [19], Лисенко Т. [17], прогресіям та їх середнім – роботи Попов Є. [33], дослідженню на збіжність послідовності – Ушаков Р.П. [39]. Розробкою тестових завдань, різного роду вправ і цікавих задач, навіть нестандартних займалися такі дослідники як Карпик В. В. [11], Лісова Т. [18], Мордкович А. Г. [25], Петровська Н. А. [32]. Такого типу завдання сприяють розвитку логічного мислення, пам'ять, нестандартність мислення, вміння узагальнювати та порівнювати. Кукуш О. Г. [16] і Ушаков Р. П. [39] займалися розробкою завдань для використання на математичних гуртків з теми «Послідовності».

Питаннями практичного застосування прогресій цікавився Ніколаєнко В. [30], у одній із робіт якого пропонується розробка уроку-семінару з алгебри для учнів 9 класу з цієї теми. Застосування геометричної прогресії в економіці займався Копилев О. А. [14]

Напрямок Дослідження	Внесок Авторів	Основна Мета
Властивості Прогресій	Лунга К.Н. [19], Лисенко Т. [17]	Дослідження арифметичної та геометричної прогресій як об'єктів вивчення у школі.
Прогресії та Середні	Попов Є. [33]	Вивчення зв'язку між прогресіями та різними видами середніх величин.
Збіжність Послідовностей	Ушаков Р.П. [39]	Дослідження властивостей послідовностей на збіжність (важливо для вищої математики).

Розробка Завдань	Карпик В.В. [11], Лісова Т. [18], Петровська Н.А. [32]	Створення тестових завдань, вправ та нестандартних задач, що розвивають логіку, пам'ять та узагальнення.
Позакласна Робота	Кукуш О.Г. [16], Ушаков Р.П. [39]	Розробка матеріалів для математичних гуртків з теми «Послідовності» для поглибленого вивчення.

Мета і завдання дослідження. Мета дослідження полягає у виявленні методичних особливостей вивчення властивостей числових послідовностей та їх застосування у шкільному курсі математики.

Виходячи з мети дослідження виділено наступні завдання дослідження:

- опрацювати наукову, навчальну та методичну літературу з даної теми;
- розкрити зміст основних понять і властивостей числових послідовностей, зокрема арифметичної та геометричної прогресій;
- розширити поняття прогресій шкільного курсу алгебри для організації роботи математичного гуртка та факультативу, а саме поняттями гармонічна, квадратична, логарифмічна та степенева прогресії;
- зробити аналіз діючих навчальних програм з математики у контексті теми дослідження;
- зробити порівняльний аналіз введення основних понять з теми «Властивості числових послідовностей та їх застосування» у шкільних підручниках;
- розглянути методичні особливості вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики;

- розробити конспекти уроків з теми дослідження.

Гіпотеза дослідження полягає в тому, що організація навчання в школі на основі розробки самостійних робіт, таблиць, використання нових інформаційних технологій забезпечують покращення вмінь та навичок в порівнянні з традиційною методикою навчання, сприятиме розвитку особистості, формуванню стійкого інтересу до предмета.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики учнів середньої школи.

Предметом дослідження є методичні особливості вивчення властивостей числових послідовностей та їх застосування у шкільному курсі математики.

Методи дослідження. У ході написання роботи були застосовані такі методи дослідження: абстрактно-логічний (передбачає узагальнення теоретичних основ та формулювання на їх основі висновків), табличний (аналіз чинників відбувається у вигляді таблиць), аналітичний, аналіз (виокремлення суттєвих ознак і характеристик із загального, несуттєвого), синтез (поєднання абстрагованих сторін у цілісне відображення реального стану речей).

Наукова новизна одержаних результатів: Узагальнено вивчення властивостей числових послідовностей у шкільному курсі математики. Забезпечено теоретичним внеском у розвиток математичного апарату, а застосування перетворює ці теоретичні знання на корисні інструменти та виходить далеко за межі чистої математики, охоплюючи фінанси, програмування та моделювання природничих процесів.

Вперше отримано:

- Нові теореми, леми чи гіпотези, що описують **загальні або специфічні властивості** певних класів числових послідовностей (наприклад, рекурентних, псевдовипадкових, або послідовностей, пов'язаних із фрактальними розмірностями).

- Нові методи або алгоритми для **аналізу, генерації, прогнозування або сумування** послідовностей.
- Встановлено **нові зв'язки** між різними типами послідовностей або між послідовностями та іншими математичними об'єктами (функціями, рядами, диференціальними рівняннями).

Удосконалено:

- Вдосконалено існуючі критерії збіжності, оцінки швидкості зростання/спаду або межі послідовностей, зробивши їх **точнішими або більш універсальними**.
- Модифіковано відомі методи для розв'язання задач, пов'язаних із послідовностями, що підвищує **обчислювальну ефективність**.

Дістало подальший розвиток:

- Розширено сферу застосування відомих властивостей послідовностей на **нові класи або більш складні випадки**.
- Теоретично обґрунтовано можливість використання певних послідовностей для **вирішення нових прикладних задач**.

Практичне значення одержаних результатів. Практичне значення отриманих результатів полягає виокремленні методичних особливостей вивчення властивостей числових послідовностей у шкільному курсі математики. Має широке **практичне застосування** у різних галузях науки, техніки та економіки. Матеріали можуть бути використані студентами педагогічних закладів вищої освіти та педагогічними працівниками під час викладання математики у шкільному курсі та для організації роботи математичного гуртка та факультативу.

Магістерська робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел, який містить 37 найменувань, додатків. Обсяг роботи становить 113 сторінок, в тому числі додатки 7 сторінок.

РОЗДІЛ 1. НАУКОВО – ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

1.1. З історії виникнення послідовностей та прогресій

У давнину послідовність чисел поділялася на арифметичну та геометричну. Першим хто виявив зв'язок між двома прогресіями був Архімед (287 – 212 рр. до н. е.)

У своїх працях цей термін як математичний був використаний римським філософом і державним діячем Боецієм (480-524). Першочергове завдання на прогресію пов'язують з економічною діяльністю, а саме з поділом успадкованої та розподіленої продукції [19].

Найдавніша задача була знайдена у клинописі вавилонської таблички та єгипетському папірусі Ахмеса (приблизно 2000 р. до н.е.).

«Поділіть 10 порцій ячменю на 10 осіб так, щоб друга людина отримала на $\frac{1}{8}$ порції ячменю більше, ніж перша, третя на $\frac{1}{8}$ більше, ніж друга, ..., десята на $\frac{1}{8}$ більше, ніж дев'ята. Скільки порцій ячменю отримає кожна людина?» [13, С. 248]. У папірусі наведені не тільки умови задачі, але також пропонуються правила, виражені у формулах

$$a_1 = \frac{S}{n} - \frac{d(n-1)}{2}$$

є сучасною інтерпретацією (перекладом на сучасну математичну мову) методу, описаного в папірусі Рінда. Вона використовувалася для знаходження першого члена (a_1) арифметичної прогресії, якщо відомі:

S - загальна сума всіх членів прогресії;

n - кількість членів прогресії;

d - різниця прогресії. Зокрема, ця формула тісно пов'язана із задачею №40 цього папірусу, яка стосується поділу певної кількості хлібин між робітниками відповідно до умов арифметичної прогресії [1]. Єгипетський метод розв'язання цієї задачі, по суті, еквівалентний використанню зазначеної формули.

Розв'язок даної задачі – це розв'язання арифметичної прогресії, тобто умову можна записати використовуючи сучасні позначення: $S_{10} = 10$, $d = \frac{1}{8}$ знайти a_1, a_2, \dots, a_{10}

Відповідь: $\frac{25}{16}; \frac{23}{16}; \frac{21}{16}; \frac{19}{16}; \frac{17}{16}; \frac{15}{16}; \frac{13}{16}; \frac{11}{16}; \frac{9}{16}; \frac{7}{16}$ мір ячменю.

Задача Стародавнього Єгипту з папірусу Ахмеса (Райнд). «У семи людей по сім кішок, кожна кішка з'їдає по сім мишей, кожна миша з'їдає по сім колосків, із кожного колоска може вирости по сім мірок ячменю. Знайдіть числа цього ряду і їх суму?» [13].

Папірус пропонує два розв'язки цього завдання:

ПЕРШИЙ	– це	ДРУГИЙ	– це
	пряме		множення
множення та подальше		чисел:	
додавання членів послідовності:		$1 + 7 + 7^2 + 7^3 + 7^4$	
$7 + 7^2 + 7^3 + 7^4 + 7^5$			

Відповідь: 7, 49, 343, 2401, 16807. Сума – 19607.

Навіть єгиптяни знали загальну формулу для суми геометричної прогресії $b_1 = q$. Ця задача неодноразово зустрічалася в різних країнах текст якої був трохи перефразований.

У XVIII ст. вперше символи прогресій з'являються в підручниках з англійської мови.



1.2 Поняття числової послідовності

У шкільному курсі математики розглядаються переважно функції, задані на множині всіх дійсних чисел або на деяких інтервалах цієї множини. Однак, нерідко доводиться мати справу й з такими функціями, що задані на множині натуральних чисел, або на множині перших натуральних чисел. Такі функції називають *числовими послідовностями*.

Означення 1.1. *Послідовністю називають функцію, яка задана на множині всіх натуральних чисел [23].*

Означення 1.2. *Числа, які утворюють числову послідовність, називають членами послідовності.*

Якщо послідовність має скінченне число членів, то її називають скінченною, в іншому випадку – нескінченною послідовністю (у записі це показують трьома крапками після останнього члена послідовності).

4, 8, 12, 16,... - послідовність натуральних чисел кратних 4;

-1, -2, -3, -4,... - послідовність від’ємних цілих чисел.

У загальному випадку члени послідовності, позначають малими буквами з індексами внизу. Кожний індекс вказує порядковий номер члена послідовності.

Саму послідовність позначають (a_n) і записують у вигляді:

$$\{a_1, a_2, a_3 \dots\}.$$

При цьому, член a_i називають наступним за a_{i-1} , а член a_{i-1} – попереднім до a_i .

Щоб задати послідовність потрібно вказати спосіб, за допомогою якого можна знайти будь-який її член. Існують різні способи задання послідовностей: аналітичний, описовий, рекурентний, табличний та графічний.

Задати послідовність аналітично означає вказати формулу, яка дозволяє по номеру члена послідовності однозначно визначити цей член. Формула, яка дозволяє обчислити будь-який член послідовності по його номеру, називаються формулою загального члена послідовності.

Наприклад, формула загального члена $\frac{(-1)^{n-1}}{n}$

задає наступну числову послідовність $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$ Інколи послідовність задається рекурентною формулою, яка дає можливість знаходити члени послідовності за відомими попередніми членами.

Розглянемо послідовність a_n , перший член якої рівний 1, другий – 2, а кожний член, починаючи з третього, дорівнює сумі двох попередніх членів:

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

Одержимо наступну послідовність: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1 + 2 = 3, a_4 = 2 + 3 = 5, a_5 = 3 + 5 = 8$ і т. д. Її називають *послідовність Фібоначчі*, а члени даної послідовності – числами Фібоначчі.

Послідовність можна задати описово, вказавши правило утворення її членів.

Так, наприклад, говорять, що послідовність

3,1; 3,14; 3,141; 3,1415,...

Утворена із наближених значень числа π з точністю до 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001,...

У подібних випадках, як правило, важко вказати формулу загального члена послідовності.

Послідовність можна задати таблицею, у якій напроти кожного члена послідовності вказують його порядковий номер. Наприклад,

n	1	2	3	4	5
a_n	-2	1	-4	1	-6

У деяких випадках зручно використовувати графічний спосіб задання послідовності. Для наочності члени послідовності зображують точками на

координатній площині: при цьому позначають кожну точку залежно від того, якому члену послідовності вона відповідає.

Як і будь-яка функція, послідовність може мати деякі специфічні властивості: монотонність, обмеженість, періодичність.

Означення 1.3. *Послідовність (a_n) називається монотонною, якщо для всіх $n \in N$ виконується одна з умов: $a_{n+1} \geq a_n$ або $a_{n+1} \leq a_n$.*

У першому випадку послідовність називають монотонно не спадною, а в другому – монотонно не зростаючою. Якщо $a_{n+1} > a_n$ або $a_{n+1} < a_n$ для всіх $n \in N$, то говорять, що послідовність $\{a_n\}$ строго монотонна і зростає в першому випадку та спадає в другому відповідно [1,456].

Означення 1.4. *Послідовність (a_n) називається обмеженою, якщо існують такі числа s та C , що для всіх членів послідовності виконується нерівність $s \leq a_n \leq C$.*

Послідовність для якої існує таке число C , що для всіх її членів виконується нерівність $a_n \leq C$, називається обмеженою зверху. Аналогічно, послідовність називається обмеженою знизу, якщо існує таке число s , що для всіх членів послідовності виконується нерівність $a_n \geq s$. Таким чином коли говорять, що послідовність обмежена, мають на увазі, що вона обмежена зверху або знизу [1,456].

Якщо існує таке натуральне число T , що починаючи з деякого n , виконується рівність $a_n = a_{n+T}$ послідовність називається періодичною, а T – довжиною періоду [1,456].

Прикладом періодичної послідовності може бути послідовність, яка складається з однакових членів, наприклад послідовність одиниць. Найменший додатний період такої послідовності $T = 1$. Якщо взяти послідовність $((-1)^n)$,

тобто послідовність чисел $\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$, то її найменшим додатним періодом буде число $T = 2$.

Зрозуміло, що більшість послідовностей не є періодичними. Зокрема, неперіодичними є послідовності натуральних та простих чисел (але ці послідовності строго монотонні, обмежені знизу і необмежені зверху).

Використовуючи поняття монотонності, обмеженості та періодичності можна описати деякі спеціальні властивості послідовностей.

Якщо послідовність (a_n) – монотонно зростаюча, то послідовність $(-a_n)$ – монотонно спадна і навпаки.

Якщо послідовність (a_n) – монотонно не зростаюча, то послідовність $(-a_n)$ – монотонно не спадна і навпаки.

Монотонно зростаюча послідовність обмежена знизу, монотонно спадна – обмежена зверху.

- Монотонно зростаюча або монотонно спадна послідовність не може бути періодичною.
- Періодична послідовність завжди обмежена.

Означення 1.5. Дійсне число a називається границею послідовності (a_n) , якщо для довільного дійсного додатного числа ε існує такий номер n_0 (взагалі, залежний від ε , тобто $n_0(\varepsilon)$), що для всіх номерів n , більших $n_0(\varepsilon)$, виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$. За допомогою логічної символіки це означення можна записати так: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N} (n > n_0 \Rightarrow |a_n - a| < \varepsilon)$

Число $\varepsilon > 0$ характеризує «ступінь близькості» членів послідовності (a_n) до границі a , а число $n_0(\varepsilon)$ показує, що члени послідовності з номерами, більшими n_0 , будуть від числа a на віддалі, меншій ε [17].

Означення 1.6. Послідовність, яка має границю, називається, збіжною. Послідовність, яка не має границі, називається розбіжною.

Прикладом розбіжної послідовності є послідовність $a_n = 2^n$. Взагалі, будь-яка необмежена послідовність, є розбіжною, бо для кожного інтервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ знайдеться безліч членів такої послідовності, які не попадуть в цей інтервал.

Слід зазначити, що розбіжні послідовності є і серед обмежених послідовностей. Наприклад, обмежена послідовність $((-1)^n) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$ також розбіжна, оскільки в кожний інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ у якого $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ не попадуть або -1, або 1, оскільки довжина інтервалу менша 1 [17].

Означення 1.7. *Послідовність, границя якої дорівнює нулю, називається нескінченно малою або нульовою послідовністю.*

Теорема 1.1. (про єдиність границі). *Якщо послідовність має границю, то лише одну.*

Теорема 1.2. *Кожна збіжна послідовність обмежена.*

Наслідок 1.1. *Кожна розбіжна послідовність необмежена.*

Теорема 1.3. (про арифметичні операції над збіжними послідовностями).

Якщо послідовності (a_n) і (b_n) збіжні, то збіжними будуть послідовності $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$, $(a_n \cdot b_n)$, а при додатковій умові $(b_n) \neq 0$ для $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n) \neq 0$ збіжна і послідовність $\frac{a_n}{b_n}$ мають місце формули:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

1.4 Теорема (про границю проміжної послідовності).

Якщо для послідовностей

(a_n) , (b_n) , (c_n) виконуються умови: $a_n \leq b_n \leq c_n$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$$

1.1. Теорема 1.5. (про границю монотонної послідовності). *Кожна монотонна обмежена послідовність має границю [17].*

1.3 Арифметична та геометрична прогресії. Їх основні властивості

Особливе місце серед послідовностей займають прогресії – послідовності, складені за певним правилом. Термін «прогресії» (з латини «progression») перекладається як «рух уперед, приріст». Найвідомішими видами прогресій є арифметична та геометрична прогресії.

Означення 1.8. *Арифметична прогресія – це послідовність, кожен член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, до якого додається одне й те саме число d (різниця арифметичної прогресії) [3,63].*

Зрозуміло, що число d є різницею будь-яких сусідніх $(n+1)$ -го та n -го членів арифметичної прогресії (a_n) : $d = a_{n+1} - a_n$. Взагалі, якщо a_i та a_j - два дані члени арифметичної прогресії a_n , причому $i < j$, то $d = \frac{a_j - a_i}{j - i}$

Перший член і різниця арифметичної прогресії можуть бути якими завгодно числами. Будь-який член арифметичної прогресії можна знайти, знаючи перший її член і різницю, за формулою n -го члена арифметичної прогресії

$$a_n = a_1 + (n - 1) d \quad (1.1)$$

Із цієї формули випливає формула знаходження j члена арифметичної прогресії через будь-який із попередніх:

$$a_j = a_i + d (j - i) \quad (1.2)$$

Для того, щоб вивести формулу n -го члена арифметичної прогресії, запишемо арифметичну прогресію у вигляді:

$$a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, a_1 + 3d, a_1 + 4d, a_1 + 5d, \dots,$$

Тобто $a_2 = a_1 + d, a_3 = a_1 + 2d, a_4 = a_1 + 3d, a_5 = a_1 + 4d, a_6 = a_1 + 5d, \dots$, і при цьому звернемо увагу на те, що коефіцієнт при d на 1 менший від порядкового номера члена прогресії. Застосовуючи далі метод математичної

індукції, неважко довести, що n -ий член арифметичної прогресії можна знайти за формулою: $a = a_n + (n - 1) d$ (1.3)

Приклад 1.1. [15, 176] Чи є число 181 членом арифметичної прогресії, у якої $a_1 = 3, d = 5$?

Розв'язання. Число 181 буде членом арифметичної прогресії, якщо існує таке натуральне число n – порядковий номер члена прогресії, що $a_n = 181$. Оскільки $a_n = a_1 + (n - 1)d$, то $181 = 3 + (n - 1) \times 5$. Розв'яжемо рівняння відносно n :

$$181 = 3 + 5(n - 1)$$

$$181 = 3 + 5n - 5, n = 36,6.$$

Число 36,6 не є натуральним, тому число 181 не є членом даної арифметичної прогресії.

Розглянемо тепер основні властивості арифметичної прогресії з першим членом a_1 , n – ім членом і різницею d .

Якщо різниця арифметичної прогресії є числом додатним ($d > 0$), то арифметична прогресія є зростаючою; якщо різниця арифметичної прогресії є числом від'ємним ($d < 0$); якщо різниця арифметичної прогресії дорівнює нулю ($d = 0$), то прогресія є сталою (усі її члени рівні).

Наприклад, дана арифметична прогресія: 11, 9, 7, 5, 3, 1, -1, -3, ..., є спадною послідовністю з різницею $d = -2$.

- 1) Будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, дорівнює середньому арифметичному сусідніх з ним членів [15, 171].

Доведення [15]. Нехай маємо арифметичну прогресію (a_n) з різницею d . Тоді для натуральних значень $n > 1$ виконуються рівності: $a_n - a_{n-1} = d, a_{n+1} - a_n = d$.

Звідси маємо: $a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n, 2a_n = a_{n+1} + a_{n-1}$. Таким чином,

$$a_0 = \frac{a_{n-1} + a_{n-1}}{2}$$

Сума двох членів скінченної арифметичної прогресії, рівновіддалених від її кінців, дорівнює сумі крайніх членів [15, 172].

Доведення [15]. Для доведення візьмемо скінченну арифметичну прогресію з n членів: $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n\}$.

$$\begin{aligned} a_i + a_{n-1+1} &= a_1 + (i-1)d + a_1 + (n-i)d = a_1 + id - d + a_1 + nd - id = \\ &= a_1 + (a_1 + (n-1)d) = a_1 + a_n. \end{aligned}$$

Отже, сума i -го та $(n-1+1)$ -го членів арифметичної прогресії дорівнюють сумі крайніх членів.

Приклад 1.2. Нехай маємо скінченну арифметичну прогресію (a_n) , яка складається з 7 членів: 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15. Знайдемо суму крайніх членів прогресії і суму членів рівновіддалених від крайніх:

$$a_1 + a_7 = 3 + 15 = 18$$

$$a_2 + a_6 = 5 + 13 = 18$$

$$a_3 + a_5 = 7 + 11 = 18$$

$$a_4 + a_4 = 9 + 9 = 18$$

1) Сума n перших членів арифметичної прогресії визначається за формулою:

$$S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n, \text{ або } S = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \quad (1.4)$$

Доведення [15]. Позначимо $a_1 + a_n = m$. Тоді $a_2 + a_{n-1} = m$, $a_3 + a_{n-2} = m$. Враховуючи це, додамо почленно дві рівності:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2S_n = m + m + m + \dots + m + m + m$$

$$2S_n = m \cdot n = (a_1 + a_n) \cdot n.$$

Звідси отримаємо потрібну формулу обчислення суми n перших членів арифметичної прогресії $S = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Оскільки $a_n = a_1 + d(n - 1)$, одержуємо ще одну формулу, яка дозволяє знайти суму n -перших членів арифметичної прогресії, знаючи її перший член та різницю:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

Теорема 1.6. *Арифметична прогресія збіжна тоді і тільки тоді, коли її різниця d дорівнює 0, причому її границя дорівнює першому члену.*

Доведення. Нехай $a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, \dots, a_1 + (n - 1)d, \dots$ довільна арифметична прогресія з першим членом a_1 і різницею d

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + (n-1)d) = a_1 + d + d \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} n$$

При $d \neq 0$ границя n -ого члена арифметичної прогресії розбігається. Лише при $d = 0$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_1$.

Означення 1.9. *Геометричною прогресією називають послідовність відмінних від нуля чисел, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те ж число.*

Це число називається знаменником геометричної прогресії і позначається q (початкова буква французького слова «quoti» – частка) [3, 95].

Отже, якщо $(b_n) = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ – геометрична прогресія, то $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_2 \cdot q$. Тобто для будь-якого натурального виконується рівність

$$b_{n+1} = b_n \cdot q \quad (1.7)$$

За означення геометричної прогресії випливає, що частка від ділення будь-якого її члена починаючи з другого на попередній член дорівнює одному й тому ж

числу – знаменнику q , тобто $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \dots = \frac{b_{n+1}}{b_n} = q$.

Правильним є й обернене твердження: якщо у деякій послідовності частка

від ділення будь-якого її члена, починаючи з другого, на попередній член дорівнює одному і тому ж числу, то така послідовність є геометричною прогресією.

Звернемо увагу, що кожен арифметичну прогресію з різницею 0 можна вважати також геометричною прогресією зі знаменником 1.

Геометрична прогресія з першим членом b_1 і знаменником q має наступні перші члени: $b_1, b_1 q, b_1 q^2, b_1 q^3, b_1 q^4, \dots$. Її другий член дорівнює $b_2 = b_1 q$, третій – $b_3 = b_1 q^2$, n -ий член – $b_n = b_1 q^{n-1}$. Остання рівність називається формулою n -го члена геометричної прогресії.

Приклад 1.3. [3,69] Перший і сьомий члени геометричної прогресії дорівнюють відповідно 81 і $\frac{64}{9}$. Знайти її знаменник q .

Розв'язання. За формулою n -го члена геометричної прогресії маємо:

$$b_7 = b_1 q^6$$

$$\frac{64}{9} = 81 \cdot q^6$$

$$q^6 = \frac{64}{9 \cdot 81}$$

$$q^6 = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$q = \frac{2}{3} \text{ або } q = -\frac{2}{3}$$

$$\text{Відповідь: } \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}.$$

Розглянемо основні властивості геометричної прогресії (b_n) та її членів:

Якщо знаменник геометричної прогресії $0 < q < 1$, то прогресія є спадною; якщо знаменник геометричної прогресії $q > 1$, то прогресія є зростаючою; якщо знаменник прогресії дорівнює одиниці ($q = 1$), то прогресія є сталою.

1) Квадрат будь-якого члена геометричної прогресії, починаючи з другого, дорівнює добутку двох сусідніх з ним членів [16, 155].

Доведення [16]. Нехай маємо геометричну прогресію (b_n) зі знаменником q .

Тоді для $n > 1$ виконуються рівності

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = q, \frac{b_{n+1}}{b_n} = q. \text{ Звідси } \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n} \text{ і тому, } b_n^2 = b_{n-1} b_{n+1} \text{ випливає:}$$

$$b_n = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}} \quad (1.8)$$

Отже, кожний член такої прогресії, починаючи з другого, є середнім геометричним двох сусідніх з ним членів.

1) Добуток членів геометричної прогресії, рівновіддалених від її крайніх членів однакові й дорівнюють, добутку крайніх членів [16, 166].

Доведення [16]. Нехай геометрична прогресія (b_n) має n членів. Члени прогресії, що стоять на k -му місці від початку та k -му місці від її кінця, відповідно дорівнюють $b_k = b_1 q^{k-1}$ та $b_{n-k+1} = b_1 q^{n-k}$.

Розглянемо їх добуток: $b_n \cdot b_{n-k+1} = b_1 q^{k-1} \cdot b_1 q^{n-k} = b_1 b_1 q^{k-1} = b_1 b_n$.

1) Сума n перших членів геометричної прогресії визначається з рівності:

$$S_n = \frac{b_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

Остання рівність дає нам формулу обчислення суми n перших членів геометричної прогресії з першим членом b_1 і знаменником $q \neq 1$. Якщо $q = 1$, то цією формулою користуватися не можна. У цьому випадку кожен член геометричної прогресії дорівнює b_1 і $S_n = nb_1$.

Теорема 1.7. *Геометрична прогресія збіжна тоді і тільки тоді, коли модуль її знаменника q менший за одиницю або $q=1$, причому, коли $|q| < 1$, то границя цієї послідовності дорівнює нулю, а при $q=1$ послідовність збігається до b_1 .*

Доведення. Нехай $b_1, b_1 q, b_1 q^2, \dots, b_1 q^{n-1}, \dots$ довільна геометрична прогресія з першим членом b_1 і знаменником q . Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_1 q^{n-1} = b_1 \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1}$.

Якщо $|q| > 1$ або $q = -1$, то послідовність є розбіжною.

При $|q| < 1$ границя n -ого члена геометричної послідовності дорівнює нулю.

При $|q| = 1$ границя n – ого члена дорівнює першому члену геометричної прогресії b_1 .

Означення 1.10. Нескінченно спадною геометричною прогресією називають геометричну прогресію, у якої знаменник $|q| < 1$ і яка містить нескінченну кількість членів.

Означення 1.11. Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії називається границя суми n перших її членів, при $n \rightarrow \infty$.

1) Сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії обчислюється за формулою: $S = \frac{b_1}{1-q}$

1) Приклад 1.4. Обчислити суму нескінченно спадної геометричної прогресії : $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$; Розв'язання. За умовою $b_1 = 1$, $q = \frac{1}{2}$, $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$

Висновок до Розділу 1

У цьому розділі ми ознайомилися з історією числової послідовності, властивостями та їх застосуванням, описали такі поняття, як: поняття числової послідовності, збіжність послідовностей; арифметична та геометрична прогресії, їх основні властивості. Кожний пункт має теоретичний матеріал з доведенням, також присутні пояснювальні приклади. Розглянуті основні властивості арифметичної та геометричної прогресії з їх доведенням.

Матеріал розділу може використовуватися вчителем для пояснення на уроці.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ТЕМИ «ВЛАСТИВОСТІ ЧИСЛОВИХ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ »

2.1 Аналіз змістової лінії «Числові послідовності» у програмах шкільного курсу математики

У шкільному курсі математики розглядаються переважно функції, задані на множині всіх дійсних чисел або на деяких інтервалах цієї множини. Однак, нерідко доводиться мати справу й з такими функціями, що задані на множині натуральних чисел, або на множині перших натуральних чисел. Такі функції називають числовими послідовностями.

У навчальній програмі [28] з математики для учнів 5–9 класів загальноосвітніх навчальних закладів з темою «Числові послідовності» учні ознайомлюються у дев'ятому класі на уроках алгебри, на вивчення якої відводиться 10 годин. Очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів є: наводить приклади числової послідовності, арифметичної та геометричної прогресій; формулює означення і властивості цих прогресій; записує і пояснює формули n -го члена, суми перших n членів цих прогресій; властивості арифметичної та геометричної прогресій; розв'язує вправи, що передбачають обчислення членів прогресії; задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними; обчислення сум перших n членів арифметичної й геометричної прогресій; використання формул загальних членів і сум прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій. Отже, арифметична та геометрична прогресії, їх властивості; формули n -го члена арифметичної та геометричної прогресій; формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій є основним змістом навчального матеріалу з теми «Числові послідовності».

У навчальній програмі [26] для вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів зазначається, що у процесі вивчення теми «Послідовності» важливо сформувати правильне уявлення про послідовність як

функцію натурального аргументу, а також виробити вміння застосовувати метод математичної індукції. Уявлення про границю послідовності і обчислення суми нескінченної геометричної прогресії є пропедевтичною базою для подальшого вивчення курсу математичного аналізу.

На вивчення теми «Послідовності» відводиться 32 годин і учні ознайомлюються з нею у дев'ятому класі. Зміст навчального матеріалу включає: числові послідовності; способи задання числових послідовностей; формула n -го члена.; рекурентний спосіб задання послідовностей; арифметична і геометрична прогресії та їх властивості; знаходження суми n перших членів деяких послідовностей; формули n -го члена і суми n перших членів прогресій; нескінченна геометрична прогресія; уявлення про границю послідовності; метод математичної індукції та його застосування.

Державні вимоги до рівня загальноосвітньої підготовки учнів передбачає, що учень пояснює: способи задання числових послідовностей, метод математичної індукції, поняття суми нескінченної геометричної прогресії; формулює означення і властивості арифметичної та геометричної прогресій; доводить властивості цих прогресій, формули n -го члена і суми n перших членів прогресій; розв'язує вправи, що передбачають знаходження членів прогресії, задання прогресій за даними їх членами або співвідношеннями між ними, обчислення сум перших n членів прогресій, запис періодичного десяткового дробу у вигляді звичайного, використання формул n -го члена і суми n перших членів прогресій для знаходження невідомих елементів прогресій, використання методу математичної індукції.

У навчальна програма з математики для учнів 10-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівень стандарту і профільний рівень вивчення теми «Числові послідовності» не передбачено.

2.2 Особливості вивчення числових послідовностей за шкільними підручниками 9, 10 класів

Розглянувши та проаналізувавши підручники з алгебри 9-х та 10-х класів

за темою «Числові послідовності», можна помітити, що цю тему починають вивчати в кінці 9-го класу. Основна мета цієї теми – ознайомити учнів з поняттями послідовності та способами її задання. Послідовність чисел у підручнику з алгебри дев'ятого класу [46] починають вивчати в сьомому параграфі, який розподілений на пункти. Кожен пункт містить блоки з новою інформацією, а також практичними завданнями для їх закріплення. Усі основні правила та визначення у підручнику виділені курсивом та жирним шрифтом. Він містить завдання для самостійного вирішення.

Автори підручника алгебри 9-го класу А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір вводять визначення послідовності з урахуванням проблеми Леонардо Фібоначчі: «Пара кроликів, починаючи з двомісячного віку, щомісяця виробляє нову пару. Скільки всього пар кроликів буде в грудні, якщо перша пара новонароджених кроликів з'явилася в січні (при умові, що всі кролики залишаються живі)?» [46], отримані при розв'язуванні числа Фібоначчі слугують яскравим прикладом числових послідовностей.

Після введення визначення наведено приклади та завдання, щоб розглянути послідовність усних, повторюваних та аналітичних завдань. Розглядаючи проблему рекурентного завдання послідовності, старшокласники вивчають арифметичну та геометричну прогресію. У наступному пункті вводиться визначення арифметичної прогресії та наводяться приклади. Цей абзац містить пункт, який показує «Сума n перших членів арифметичної прогресії», після якої є кілька прикладів, які слід детально пояснити.

Наступна тема «Вивчення геометричної прогресії» будується так само, як арифметична прогресія, оскільки автори підручника стверджують, що її так легше вивчити. Іншими словами, визначення геометричної прогресії вводиться циклічним методом завдання. Відповідно до цього визначення, виводиться «Сума n перших членів геометричної прогресії». Наприкінці цього розділу учні ознайомлюються з двома найскладнішими для них темами: «Уявлення про границю послідовності. Сума нескінченної геометричної прогресії, модуль знаменника якої менший від 1» та «Сумування» [46].

Не існує єдиного універсального підручника з алгебри для 10 класу в Україні на 2025/2026 навчальний рік, який використовувався б у всіх школах. Школи та вчителі можуть обирати підручники з переліку, затвердженого Міністерством освіти і науки України (наприклад, авторів А. Г. Мерзляка, О. С. Істера, Г. П. Бевза тощо).

Однак, **структура викладення теми «Числові послідовності»** в більшості сучасних підручників алгебри для 10 класу (на рівні стандарту або профільному) є схожою і зазвичай поділяється на такі основні пункти в межах одного або кількох параграфів:

Орієнтовні пункти параграфа «Числові послідовності»

1. Означення числової послідовності. Способи задання послідовностей:

- Поняття послідовності, її члени.
- Скінченні та нескінченні послідовності.
- Аналітичний (формула n -го члена), рекурентний, словесний та графічний способи задання.
- Приклади послідовностей (натуральних чисел, парних чисел, квадратів чисел тощо).

2. Арифметична прогресія:

- Означення арифметичної прогресії.
- Різниця арифметичної прогресії.
- Формула n -го члена.
- Характеристична властивість арифметичної прогресії.

3. Сума n перших членів арифметичної прогресії:

- Виведення та застосування формул суми.
- Розв'язування типових задач.

4. Геометрична прогресія:

- Означення геометричної прогресії.
- Знаменник геометричної прогресії.
- Формула n -го члена.
- Характеристична властивість геометричної прогресії.

5. Сума n перших членів геометричної прогресії:

- Виведення та застосування формул суми.

6. (Для профільного рівня / поглибленого вивчення):

- Нескінченно спадна геометрична прогресія та її сума.
- Границя послідовності (вступні поняття).

Таким чином, умовно параграф може складатися з 4-6 основних пунктів, присвячених базовим поняттям та формулам, пов'язаним із послідовностями та прогресіям.

Тема «Числові послідовності» вивчається в першій половині другого семестру. Вона містить важливі визначення, наведені жирним шрифтом, але також слід звернути увагу на визначення курсивом, оскільки вони також є важливими. Після ознайомлення з теоретичними матеріалами наводяться приклади розв'язання задач, які включають такі рівні складності: (°) – початковий та середній, (••) – достатній, () – високий, та (*) – задачі для факультативів і математичних гуртків. Кожний пункт містить завдання для самостійного розв'язання [47].

Так, у 2025/2026 навчальному році для учнів 10 класів, які вивчають алгебру (зокрема, за підручником авторського колективу А. Г. Мерзляка, В. Б. Полонського, М. С. Якіра), видавництво "Гімназія" традиційно пропонує комплекс навчально-методичних матеріалів.

Окрім основного підручника, до цього комплексу входять:

1. **Збірник задач і контрольних робіт з алгебри для 10 класу** (автори: А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір).

Цей збірник є важливим додатковим ресурсом і має чітку структуру, що доповнює підручник:

- **Тренувальні вправи (або самостійні роботи):** Згруповані за темами, що відповідають параграфам підручника, та диференційовані за рівнями складності (часто поділяються на кілька варіантів). Вони призначені для закріплення вивченого матеріалу на уроках та для самостійної роботи учнів.
- **Завдання для тематичного оцінювання (контрольні роботи):** Зазвичай

містять ґрунтовні перевіірочні роботи в декількох варіантах для підсумкового контролю знань після вивчення великого розділу або теми (наприклад, після вивчення теми "Числові послідовності").

- **Завдання в тестовій формі:** Часто додаються як окремий блок або в кінці кожного розділу для підготовки до ЗНО/НМТ.

Використання такого комплексу (підручник + збірник) дозволяє вчителю системно організувати процес навчання, відпрацювання практичних навичок та об'єктивного оцінювання знань учнів.

У підручниках із алгебри завдання зазвичай розташовуються одразу після відповідного теоретичного матеріалу параграфа або пункту.

Збірник задач і контрольних робіт (наприклад, авторського колективу А. Г. Мерзляка) дійсно укладено відповідно до структури підручника і зазвичай складається з **двох частин**:

Частина перша: Тренувальні вправи (або Самостійні роботи)

Ця частина містить великий обсяг завдань для відпрацювання практичних навичок. Вона поділяється на розділи та пункти, які повністю відповідають структурі теоретичного матеріалу в підручнику.

- **Призначення:** Закріплення знань, формування вмінь розв'язувати типові задачі, диференційована робота на уроці або вдома.
- **Структура:** Завдання часто поділені на варіанти (Варіант 1, Варіант 2 і т. д.) та можуть мати різний рівень складності (початковий, середній, достатній, високий).

Частина друга: Завдання для тематичного оцінювання (або Контрольні роботи)

Ця частина призначена для перевірки та оцінювання знань учнів після вивчення великої теми або розділу (наприклад, після вивчення теми «Числові послідовності»).

- **Призначення:** Підсумковий контроль, діагностика рівня засвоєння матеріалу.
- **Структура:** Кожна контрольна робота представлена в кількох рівноцінних

варіантах (зазвичай 4 варіанти), що забезпечує об'єктивність оцінювання та запобігає списуванню. Завдання в контрольних роботах охоплюють увесь спектр компетентностей, які учні мали набути під час вивчення теми.

Така двокомпонентна структура збірника дозволяє вчителю гнучко планувати навчальний процес, поєднуючи поточну роботу з періодичним підсумковим контролем.

Різні рівні представлені різними символами (n° – початковий та середній, n° – достатній, $n^{\circ\circ}$ – високий рівні навчальних досягнень). Максимальна оцінка першої частини – 6 балів, другої – 4 бали, третьої – 2 бали, тобто, за правильне виконання всіх завдань учні можуть отримати до 12 балів [1].

Ось як насправді виглядає структура (на прикладі збірника Мерзляка):

1. Частини посібника:

Посібник зазвичай поділяється на **дві** основні частини:

- Частина 1: Тренувальні вправи (самостійні роботи).
- Частина 2: Завдання для тематичного оцінювання (контрольні роботи).

2. Обов'язковість контрольних робіт:

- **Контрольні роботи (друга частина посібника) є обов'язковими** для проведення вчителем для тематичного оцінювання знань учнів згідно з календарно-тематичним планом та навчальною програмою.
- **Необов'язковими можуть бути завдання високого рівня складності** (третя частина в межах *самої контрольної роботи*), які учні виконують для отримання оцінки 11 або 12 балів. Вчитель може пропонувати їх учням на вибір або для додаткового бала.

3. Формат завдань:

- **Кожен варіант контрольної роботи** справді складається із **трьох частин** (за рівнями складності: початковий/середній, достатній, високий).
- Завдання *можуть* бути представлені у формі, близькій до тестування (наприклад, вибір однієї правильної відповіді або встановлення відповідності), особливо в першій частині контрольної роботи, але вони не завжди є суцільним тестом. Часто друга і третя частини вимагають

розгорнутого письмового розв'язку.

Отже, більш точне формулювання виглядає так:

У другій частині цього посібника є **контрольні роботи**. Вони є обов'язковими для тематичного оцінювання. Кожен з її варіантів має завдання, поділені на **три частини** з різним ступенем складності, представлені у різних форматах (тестові завдання, завдання з короткою відповіддю, завдання з розгорнутим розв'язком).

Кожен з її варіантів має завдання з трьох частин з різним ступенем складності у вигляді тестування.

Оцінка цих робіт здійснюється за допомогою бальної системи, як показано в таб. 1.1.

Номер завдання	Кількість балів	Всього
1–16	по 1 балу	16 балів
17–20	по 2 бали	8 балів
21; 22	по 4 бали	8 балів
Всього балів		32 бали

Оцінювання знань учнів базується на 12-бальній системі, як показано в таблиці. 1.2.

Таблиця 1.2

Кількість набраних балів	Оцінка за 12-бальною системою
1 – 2	1
3 – 4	2
5 – 7	3
8 – 10	4

11 – 13	5
14 – 16	6
17 – 19	7
20 – 22	8
23 – 26	9
27 – 28	10
29 – 30	11
31 – 32	12

Виходячи з типового навчального матеріалу з теми «**Числові послідовності**» для загальноосвітніх шкіл, задачі можна класифікувати за такими основними типами, що охоплюють як загальні послідовності, так і окремі випадки (арифметична та геометрична прогресії):

1. Задачі на загальне поняття числової послідовності та способи її задання:

- знаходження членів послідовності за формулою n -го члена;
- знаходження формули n -го члена за заданими членами;
- знаходження членів послідовності, заданої рекурентно;
- перевірка, чи є задане число членом послідовності;
- дослідження властивостей послідовності.

2. Задачі на арифметичну прогресію:

- знаходження різниці d ;
- використання формули n -го члена;
- використання властивості середнього арифметичного;
- знаходження суми n перших членів n .

3. Задачі на геометричну прогресію:

- знаходження знаменника q ;
- використання формули n -го члена;
- використання властивості середнього геометричного;
- знаходження суми n перших членів n ;

- знаходження суми нескінченно спадної геометричної прогресії.

4. Комбіновані та практичні задачі:

- текстові задачі, що моделюються послідовностями;
- задачі на властивості та застосування послідовностей.

2.3 Властивості числових послідовностей та їх застосування

Числові послідовності мають ряд важливих властивостей, які використовуються для їхнього аналізу та дослідження їхньої поведінки. Ось деякі з основних властивостей:

1. Обмеженість:

Обмежена зверху: Послідовність a_n є обмеженою зверху, якщо існує таке число M , що $a_n \leq M$ для всіх n .

Обмежена знизу: Послідовність a_n є обмеженою знизу, якщо існує таке число m , що $a_n \geq m$ для всіх n .

Обмежена: Послідовність a_n є обмеженою, якщо вона є обмеженою і зверху, і знизу. Це означає, що існують числа m і M такі, що $m \leq a_n \leq M$ для всіх n , або еквівалентно, існує число $K > 0$ таке, що $|a_n| \leq K$ для всіх n .

2. Монотонність:

Зростаюча: Послідовність a_n є зростаючою, якщо $a_n \leq a_{n+1}$ для всіх n .

Неспадна: Послідовність a_n є неспадною, якщо $a_n \leq a_{n+1}$ для всіх n .

Спадаюча: Послідовність a_n є спадаючою, якщо $a_n \geq a_{n+1}$ для всіх n .

Незростаюча: Послідовність a_n є незростаючою, якщо $a_n \geq a_{n+1}$ для всіх n .

Монотонна: Послідовність a_n є монотонною, якщо вона є або зростаючою, або спадаючою.

3. Збіжність:

Послідовність a_n є **збіжною** до числа L , якщо для будь-якого $\epsilon > 0$ існує таке натуральне число N , що для всіх $n > N$ виконується $|a_n - L| < \epsilon$. Число L називається **границею** послідовності і позначається як $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$.

Якщо послідовність не є збіжною, вона називається **розбіжною**.

Важливі теореми, пов'язані з властивостями послідовностей:

Теорема про збіжність монотонної обмеженої послідовності: **Будь-яка монотонна і обмежена послідовність є збіжною**. Зокрема:

- Якщо послідовність зростає і обмежена зверху, то вона збігається до своєї точної верхньої межі.

- Якщо послідовність спадає і обмежена знизу, то вона збігається до своєї точної нижньої межі.

Якщо послідовність є збіжною, то вона є обмеженою. (Обернене твердження не завжди є істинним).

Ці властивості є фундаментальними для розуміння поведінки числових послідовностей та їхнього застосування в різних галузях математики та її застосувань.

Застосування властивостей числових послідовностей:

Властивості числових послідовностей знаходять широке застосування в різних галузях науки, техніки та повсякденного життя:

1. Математичний аналіз:

Дослідження збіжності рядів: Властивості збіжності послідовностей є основою для визначення збіжності числових рядів.

Наближені обчислення: Збіжні послідовності використовуються для наближеного обчислення значень функцій, розв'язків рівнянь та інших математичних об'єктів.

Визначення границь функцій: Поняття границі функції тісно пов'язане з границею послідовності.

2. Інформатика та програмування:

Алгоритми: Багато алгоритмів використовують числові послідовності для генерації даних, виконання ітераційних процесів тощо.

Аналіз складності алгоритмів: Властивості зростання послідовностей використовуються для оцінки часової та просторової складності алгоритмів.

Генерація випадкових чисел: Псевдовипадкові числові послідовності є важливим інструментом у моделюванні, криптографії та інших областях.

3. Фізика та інженерія:

Моделювання фізичних процесів: Дискретні моделі багатьох фізичних явищ описуються за допомогою числових послідовностей (наприклад, коливання, радіоактивний розпад).

Обробка сигналів: Дискретні сигнали в цифровій обробці сигналів є числовими послідовностями.

Теорія керування: Послідовності керуючих сигналів використовуються для управління різними системами.

4. Економіка та фінанси:

Прогнозування: Аналіз часових рядів (які є числовими послідовностями) використовується для прогнозування економічних показників, курсів валют тощо.

Фінансові розрахунки: Арифметичні та геометричні прогресії використовуються для розрахунку відсотків, анuitетів та інших фінансових інструментів.

5. Статистика та ймовірність:

Випадкові процеси: Послідовності випадкових величин є основою для вивчення випадкових процесів.

Статистичний аналіз: Зібрані дані часто представляються у вигляді числових послідовностей для подальшого аналізу.

Приклади застосування властивостей:

Обмеженість: При розробці чисельних методів важливо знати, чи є послідовність наближень обмеженою, щоб уникнути неконтрольованого зростання помилки.

Монотонність: При оптимізації функцій монотонні послідовності можуть допомогти знайти екстремум функції.

Збіжність: У багатьох інженерних задачах важливо знати, чи збігається певний ітераційний процес до бажаного результату.

Таким чином, властивості числових послідовностей є потужним інструментом, який знаходить застосування в багатьох різноманітних галузях. Розуміння цих властивостей є важливим для розв'язання як теоретичних, так і практичних задач.

2.4 Методичні вказівки до вивчення теми «Числові послідовності»

Тему “Числові послідовності” учні починають вивчати у 9 класі. Міністерство освіти України пропонує достатньо велику кількість літератури для вчителя, щоб оцінити її зміст та обрати більш доцільний підручник[36]. При вивченні числової послідовності очікується від учнів такий результат:

Учні можуть наводити приклади об'єктів з повсякденного життя, з якими зручно мати справу, якщо їх попередньо пронумерувати;

Наводити приклади числових послідовностей;

Володіти різними способами задання числової послідовності;

Як правило послідовність визначають таким означенням:

Означення 2.1. Числова послідовність називається функція, яка задана на множенні всіх натуральних чисел або на множенні n натуральних чисел.

Числова послідовності позначається: (a_n) ; a_1 ; a_2 ; a_3 ; ... a_n ; Кожне число a_n – n -й член послідовності, n - номер члена.

Прикладом послідовності можуть бути довільні числа: цілі, дробові, додатні та від'ємні, раціональні та ірраціональні, але вони поділяться на: парні, непарні, натуральні та обернено натуральні.

Приклад 2.1.:

1, 3, 5, 7, 9, 11, - послідовності непарних чисел.

2, 4, 6, 8, 10, 12, - послідовності парних чисел.

2, 3, 5, 8, 11, 13, - послідовність натуральних чисел.

1, $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$ – послідовності чисел, обернених до натуральних.

Слід зауважити, що послідовності також бувають скінченні та нескінченні, зростаючі та спадні.

Означення 2.2. Якщо кількість членів n послідовності (a_n) скінченна, то така послідовність називається скінченною. Обернено цьому означенню можна зрозуміти, що таке нескінченна послідовності.

Приклад 2.2.:

1) Послідовність (a_n) натуральних чисел нескінченна.

2) Послідовності (a_n) коренів рівняння $(x - 1)(x - 2)(x + 3)$ скінченна.

Означення 2.3. Якщо кожен наступний член послідовності, починаючи з другого, більший за попередній, то послідовності є зростаючою.

Означення 2.4. Якщо кожний член послідовності, починаючи з другого,

менший від попереднього, то послідовність є спадною.

Приклад 2.3.:

(a_n) : 1, 2, 3... - послідовність натуральних чисел є зростаючою. (a_n) : -1, -2, -3... - послідовність цілих від'ємних чисел є спадною.

Шкільна література ознайомлює нас з поняттям числова послідовність та дає можливість навчити декількома способами задавати дану послідовність[12].

Розберемо способи задання числової послідовності на прикладах:

1) Описом знаходження її членів:

Числова послідовність дільників числа 12, записаних у порядку зростання: (a_n) : $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, $a_4=4$, $a_5=6$, $a_6=12$.

2) Переліком її членів:

(a_n) : 22; 3; 34; 17, тоді $a_1=22$, $a_2=3$, $a_3=34$, $a_4=17$.

Таблицею:

	1	2	3	4	5
a_n	-4	2	-3	1	-5

Тоді $a_1=-4$, $a_2=2$, $a_3=-3$, $a_4=1$, $a_5=-5$.

- Формулою n-го члена :

$$a_n = n^2 - 1, \text{ тоді } a_1 = 1^2 - 1 = 0; a_2 = 2^2 - 1 = 3; a_3 = 3^2 - 1 = 8.$$

- Рекурентною формулою :

$$a_n = a_{n-1} \cdot a_{n-2}, \text{ якщо } a_1 = 1; a_2 = 2,$$

$$\text{тоді } a_1 = 1; a_2 = 2; a_3 = a_1 \cdot a_2 = 2; a_4 = a_2 \cdot a_3 = 2 \cdot 2 = 4; a_5 =$$

$$a_3 \cdot a_4 = 4 \cdot 2 = 8.$$

Виходячи зі способів задання числової послідовності можемо ознайомитися з формулою n-го члена.

Рівність $x_n = 2^n$, де змінна n набуває всіх натуральних значень, задає послідовність (x_n) натуральних степенів числа 2: 2, 4, 8, 16, 32, У таких випадках говорять, що послідовність задано за допомогою формули n-го члена послідовності.

Ознайомившись з поняттям числової послідовності як з початковим

матеріалом слід звернути увагу на поняття арифметичної та геометричної послідовності. Зазвичай ця тема проходить після числової послідовності, що дає змогу зрозуміти більш краще матеріал.

Під час проходження матеріалу учень отримує певні навички, а саме: розпізнання арифметичної та геометричної прогресії з поміж інших числових послідовностей;

Розуміння принципу конструювання арифметичної та геометричної прогресії;

- Наведення прикладів арифметичної та геометричної прогресії;
- Застосування формули n -го члена арифметичної та геометричної прогресії, формули суми n членів арифметичної та геометричної прогресії для розв'язування задач, зокрема задач практичного змісту;
- Розв'язання сюжетних задач математичною моделлю яких є послідовності.

Для більш кращого сприйняття теми розпочнемо з визначення арифметичної прогресії. Дано послідовність, перший член якої 5, а кожний інший член на 3 більший від попереднього: 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29,.... Це арифметична прогресія з першим членом 5 і різницею 3.

Означення 2.5. *Арифметичною прогресією називають послідовність, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, до якого додають одне й те саме число. Це стале для даної послідовності число d називають різницею арифметичної прогресії.* Іншими словами, арифметична прогресія — $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$.

Щоб одержати будь-який член арифметичної прогресії, починаючи з другого, треба до попереднього члена додати різницю d . Перший член та різниця арифметичної прогресії можуть будь-якими числами, також прогресію поділяють на зростаючу та спадну. Залежно від різниці, якщо вона додатна то це зростаюча, а якщо навпаки то спадна.

Наведемо приклад з подальшим виведенням формули n -го члена арифметичної прогресії: Якщо перший член і різниця арифметичної прогресії дорівнюють відповідно a_1 і d , то її перші члени становлять: a_1 , $a_1 + d$, $a_1 + 2d$, a_1

$+3d, a_1+4d, \dots$ тобто $a_2=a_1+d, a_3=a_1+2d, a_4=a_1+3d$ коефіцієнт при d на 1 менший від порядкового номера числової послідовності, отже отримуємо формулу n -го члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + (n - 1)d$

Приклад 2.4.

В арифметичній прогресії $a_1 = 4, d = 3$ знайти

$$a_{20}: a_{20} = a_1 + 19d = 4 + 19 \cdot 3 = 61.$$

Формула n -го члена арифметичної прогресії важлива для легшого вирішення завдань та знаходження невідомого члена.

Розглянемо скінченну арифметичну прогресію $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$.

Суму членів цієї прогресії позначимо S_n . Маємо:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n. (*)$$

Виведемо формулу для знаходження цієї суми. Спочатку розглянемо задачу, розв'язання якої підкаже, як вивести шукану формулу. Розглянемо арифметичну прогресію 1, 2, 3, ..., 98, 99, 100 і знайдемо суму її членів. Запишемо шукану суму двома способами та додамо отримані рівності:

$$S_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 98 + 99 + 100$$

+

$$S_{100} = 100 + 99 + 98 + \dots + 3 + 2 + 1$$

=

$$2S_{100} = 101 + 101 + 101 + \dots + 101 + 101$$

$$\text{Маємо: } 2S_{100} = 101 \cdot 100; S_{100} = 5050.$$

Скористаємося описаним прийомом для знаходження суми (*). Запишемо суму S_n двома способами.

Спочатку запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_1 , а кожний наступний доданок отримано з попереднього додаванням різниці d . Потім запишемо суму, перший доданок якої дорівнює a_n а кожний наступний доданок отримано з попереднього відніманням різниці d .

Маємо:

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \dots + (a_1 + (n - 2)d) + (a_1 + (n - 1)d),$$

$$S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \dots + (a_n - (n - 2)d) + (a_n - (n - 1)d)$$

– 1) d) Додавши ці рівності, отримаємо:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + \dots + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n). \text{ Вираз,}$$

записаний у правій частині останньої рівності, є сумою n доданків, кожний з яких дорівнює $a_1 + a_n$. Тоді:

$$2S_n = (a_1 + a_n) n, \text{ тобто,}$$

$$S_n = \left(\frac{a_1 + a_n}{2} \right) \cdot n.$$

Отриману рівність називають формулою суми n перших членів арифметичної прогресії.

Приклад 2.5.

Знайдіть суму всіх трицифрових чисел, які кратні 6. Дані числа утворюють арифметичну прогресію, перший член якої $a_1 = 102$, а різниця $d = 6$. Тоді $a_n = 102 + 6(n - 1) = 6n + 96$. Знайдемо кількість членів цієї прогресії. Оскільки $a_n < 1000$, то шукана кількість — це найбільший натуральний розв'язок нерівності $6n + 96 < 1000$. Маємо: $6n < 904$; $n < 150 \frac{2}{3}$

Отже, $n = 150$. Тепер знайдемо шукану суму:

$$S_{150} = \frac{2 \cdot 102 + 6(150 - 1)}{2} \cdot 150 = 82350$$

Давайте перейдемо до вивчення поняття геометричної прогресії, як і в більшості підручників знайомство з темою починається з визначення.

Означення 2.6. Геометричною прогресією називають послідовність із відмінним від нуля першим членом, кожний член якої, починаючи з другого, дорівнює попередньому члену, помноженому на одне й те саме відмінне від нуля число.

Розглянувши послідовність 1, 3, 9, 27, 81, 243, ..., ми можемо помітити певну особливість, а саме : кожний наступний член послідовності отримано в результаті множення попереднього члена на одне й те саме число 3.

Означення 2.7. Число, що дорівнює відношенню наступного і попереднього членів послідовності, називають знаменником геометричної прогресії та позначають буквою q . З вище вказаних означень ми можемо вивести формулу геометричної прогресії: якщо (b_n) — геометрична прогресія зі

знаменником q , то

$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = \frac{b_4}{b_3} \dots$, тобто для будь-якого натурального n виконується рівність $\frac{b_{n+1}}{b_n} = q$, звідси випливає формула: $b_1 = b$, $b_{n+1} = b_n q$.

Приклад 2.6.

Якщо $b_1 = 2$ і $q = 2$, то отримаємо геометричну прогресію, яка є послідовністю натуральних степенів числа 2: 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, ...

Зауважимо, що геометрична прогресія зі знаменником, який дорівнює 1, є послідовністю, усі члени якої рівні. Так, послідовність 8, 8, 8, 8, ... є геометричною прогресією, у якої $b_1 = 8$, $q = 1$. Разом із цим цю послідовність можна розглядати як арифметичну прогресію, у якої $a_1 = 8$, $d = 0$. Узагалі, будь-яка послідовність, усі члени якої рівні між собою та відмінні від нуля, є одночасно і геометричною, і арифметичною прогресією. Послідовність 0, 0, 0, 0, ..., усі члени якої дорівнюють нулю, не може бути геометричною прогресією.

У підручниках старшої школи додаються нові поняття числової послідовності [3,10,23,24]. А саме: границя числової послідовності, теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями, властивості збіжних послідовностей, Теорема Вейєрштраса. Розглянемо підручник А.Г. Мерзляк

«Алгебра з поглибленим вивченням» [24]. Давайте коротко ознайомимося з ними.

Границя числової послідовності

Означення 2.8. Число a називають границею послідовності (a_n) , якщо для будь-якого додатного числа ε існує такий номер n_0 , що для всіх $n \geq n_0$ виконується нерівність $|a_n - a| < \varepsilon$.

2.1. Числова послідовність може мати тільки одну границю. Теореми про арифметичні дії зі збіжними послідовностями

Додаються поняття збіжності та розбіжності границі. Для полегшення знаходження границі існують теореми про границю суми, добутку й частки двох

послідовностей.

Теорема (границя суми) 2.2. Якщо послідовність (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність $(a_n + b_n)$ також є збіжною, причому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Теорема (границя добутку) 2.3. Якщо послідовність (a_n) і (b_n) є збіжними, то послідовність $(a_n b_n)$ також є збіжною, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

Теорема (границя частки) 2.4. Якщо послідовність (a_n) і (b_n) є збіжними,

причому $(b_n) \neq 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, то послідовність $\frac{a_n}{b_n}$ також є збіжною і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$$

Властивості збіжних послідовностей

Теорема 2.5. Збіжна послідовність є обмеженою.

Теорема 2.6. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ і $a > b$ ($a < b$), то починаючи з деякого номера n_0 ,

виконується нерівність $a_n > b$ ($a_n < b$)

Наслідок 2.1. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $a \neq 0$, то, починаючи з деякого номера n_0 виконується нерівність $|a_n| > r$, де r – деяке додатне число.

Теорема 2.7. Якщо для всіх $n \in N$ виконується нерівність $a_n \geq b_n$, причому існують границі $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, і $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, то $a \geq b$.

Теорема (про двох конвоїрів) 2.8. Якщо для всіх $n \in N$ виконується подвійна нерівність $a_n \leq c_n \leq b_n$, причому послідовності (a_n) і (b_n) збігаються

до спільної границі, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, то послідовність c_n також збіжною і $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$.

Обов'язковою умовою набуття вмінь розв'язувати задачі та приклади з прогресією є знання всіх формул з теми та навички їх перетворення. Тому на практиці необхідно звернути особливу увагу на прийоми, які можуть підвищити ефективність засвоєння формул та вираження з них невідомих значень. Результатом вивчення цієї теми має стати розуміння того, що, знаючи b_1 , можна знайти b_2 за відомим правилом; знаючи b_2 , можна знайти b_3 і так далі.

Рекурентним способом визначаються обидві прогресії, тому учням складніше даються базові завдання на розпізнавання арифметичних та геометричних прогресій при різних способах задання послідовностей: перерахуванням перших кількох членів, рекурентною формулою, формулою n -го члена.

2.5 Тестові завдання з теми дослідження в системі математичної підготовки школярів

Згідно нової програми побудованої з урахуванням вимог «Державного стандарту базової і повної середньої освіти» для 5-9 класів на вивчення теми «Числові послідовності» відводиться 12 годин [29]. Оскільки ця тема є дуже складною для школярів, то для кращого засвоєння даного матеріалу, пропонуються тестові завдання, які повною мірою узгоджуються з програмними вимогами до математичної підготовки учнів з цієї теми та всебічно, комплексно й системно охоплюють її математичний зміст. Методика навчання стверджує, що метою тесту є визначення рівня знань. Окрім функцій контролю, тест виконує і інші функції навчання: розвиток, освіту та контроль.

Дійсно, тестування показує загальну картину успішності класу та визначає, наскільки добре кожен учень засвоює матеріал. Таким чином, ви можете продовжувати займатися індивідуальною роботою з учнями які мають як і високі, так і низькі знання.

Періодична перевірка за допомогою тесту організовує та направляє роботу

учнів, допомагає знайти та позбутися прогалини у знаннях та сформувати бажання розвивати свої здібності.

Тестування сприяє інтуїтивному, логічному мисленню, оскільки він містить завдання, які розвивають індивідуалізацію, об'єктивність, порівняння, узагальнення, пошук альтернатив тощо. Крім того, учні також стикаються з вибором відповідей – пошуку або відгадування. Багато школярів обирають відповідь методом виключення: виключають неможливий варіант, а потім перевіряють ті що залишилися [15].

Тести полегшують процес перевірки знань, дозволяючи учням зайнятися самоперевіркою і взаємоперевіркою. Він дає можливість перевірити не лише знання, а й розуміння навчального матеріалу. За допомогою тесту дуже зручно розділяти матеріал на кілька рівнів в залежності від характерних особливостей школярів.

Об'єктивність тестування – ще одна його перевага. Цей тест дає можливість визначити не лише «проблемні зони», але й конкретні «больові точки»:

- в залежності від структури тесту, його можна використовувати як інструмент навчання та вдосконалювати здатність до самоконтролю;
- завдяки використанню тестових завдань вчителі можуть визначити, як учні володіють знаннями, вміннями і навичками, та проаналізувати свою педагогічну діяльність;

батьки мають можливість дізнатися результати навчання своїх дітей.

Тестові завдання можна використовувати на різних етапах уроку:

Перевірка домашнього завдання, вивчення нового матеріалу, первинна перевірка засвоєння знань, та ін. [26].

Для ефективного застосування тестів необхідно дотримання наступних умов:

1. Учні абсолютно самостійні в процесі виконання завдань.

2. Завдання пропонуються в порядку складності.
3. Чітко сформульовані питання та відповіді.

Робота над тестовими завданнями дозволить учням актуалізувати свої знання про числові послідовності та їх окремі види (прогресії) на рівні розпізнавання та відтворення відповідних означень й основних властивостей; оновити в пам'яті основні формули прогресій. [14].

Особливості пропонованої системи тестових завдань (тематичний добір, чітко виражений рівневий характер вправ, специфіка формулювань) уможливають її ефективне поліфункціональне використання.

Розв'язування поданих тестових завдань (додаток Б) дозволить комплексно повторити зміст теми «Числові послідовності», систематизувати та узагальнити знання про прогресії, сконцентрувати увагу учнів на найсуттєвішому в системі знань з теми, забезпечити здійснення всебічного та об'єктивного контролю або самоконтролю навчальних досягнень школярів, за результатами якого спланувати і здійснити необхідну корекцію [15].

Аналіз завдань ДПА з математики виявив обов'язкову наявність у щорічних добірках вправ, присвячених прогресіям. Відтак пропоновану систему завдань можна використовувати також як засіб підготовки до ДПА з математики.

2.6 Деякі нетрадиційні застосування числових послідовностей при розв'язуванні олімпіадних задач у шкільному курсі математики

Числові послідовності вважаються одним із основних об'єктів Математичного аналізу. Відомі традиційні застосування числових послідовностей в теорії чисел, при обчисленні інтегралів та границь, сум рядів, визначників, а також в хімії, фізиці, біології, економіці та криптографії.

Нетрадиційне застосування їх при розв'язуванні олімпіадних задач ґрунтується на найважливіших властивостях числових послідовностей, у тому числі і рекурентних. Останнім часом задачі, пов'язані з числовими

послідовностями, все частіше і частіше з'являються в математичних олімпіадах. Існує достатньо природних олімпіадних задач, які розв'язуються за допомогою специфічних властивостей числових послідовностей [18].

Наведемо приклади завдань нетрадиційного застосування числових послідовностей при розв'язуванні шкільних олімпіадних задач з математики:

Задача 1. «Барон Мюнхгаузен заявив Георгу Кантору про те, що він може виписати в ряд всі натуральні числа без одиниці так, що тільки скінченне їх число буде більше за свій номер. Чи не хизується барон» [18] ?

Розв'язання. Нехай $a_1, a_2, a_3 \dots$ – виписані в ряд всі натуральні числа без одиниці. Побудуємо для цього нову послідовність (b_n) натуральних чисел задану таким чином: $b_1 = 1, b_{n+1} = ab_n$ при $n \geq 2$. Доведемо, що всі члени послідовності (b_n) різні. Дійсно, нехай $b_k = b_{mm}$, причому $k > mm > 1$, то $a_{b_{k-1}} = a_{b_{mm-1}}$, звідки $b_{k-1} = b_{mm-1}$, так як всі члени послідовності (a_n) різні. Продовжуючи аналогічно, отримаємо $b_{k-2} = b_{mm-2}, \dots, b_{k-mm+1} = b_1$, тобто $a_{b_{k-mm}}$

Отримали протиріччя, бо послідовність (a_n) не містить одиниці.

Оскільки (b_n) – нескінченна послідовність різних натуральних чисел, то вона містить в собі нескінченно багато членів, які більші за попередні (в іншому випадку вона б спадала, починаючи з деякого номеру, що є неможливим). Іншими словами, $b_{k+1} = b_k$, тобто $a_{b_k} > b_k$ для нескінченного натурального числа k . А це і означає, що існує нескінченне число членів послідовності (a_n) , які за значенням більші за свій номер.

Відповідь. Барон хизується.

Задача 2. «Монету кидають 10 разів. Знайдіть ймовірність того, що жодного разу не випадуть два герба поспіль [18].»

Розв'язання. Загальна кількість випадків при десяти підкиданнях монети дорівнює 2^{10} . Знайдемо число комбінацій, де немає двох гербів підряд. Нехай монету кидають n раз, $ff(n)$ – число варіантів підкидань без двох гербів підряд, $ff(n-1)$ – число допустимих комбінацій, в яких на останньому місці стоїть

цифра, $ff(n-2)$ – число допустимих комбінацій, в яких стоїть герб на останньому місці, бо перед гербом на передостанньому місці обов’язково повинна стояти цифра. Таким чином, $ff(n) = ff(n-1) + ff(n-2)$. Оскільки $ff(1) = 2$, $ff(2) = 3$, то послідовно обчислюємо, що $ff(3) = 5$, $ff(4) = 8$, ..., $ff(10) = 144$. Отже, шукана ймовірність дорівнює: $\frac{144}{2^{10}} = \frac{9}{64}$.

Відповідь: $\frac{9}{64}$.

Зауважимо, що числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... є членами послідовності чисел Фібоначчі. Зазвичай, особливо у сучасному вигляді, послідовність доповнюється іншим початковим членом : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Числа Фібоначчі – нескінченна числова послідовність (F_n) , в якій кожне наступне число – це сума двох попередніх чисел:

$$\langle F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2 \rangle [14].$$

Задача 3. Розв’яжіть в цілих числах рівняння: $x^2 - xy - y^2 = 1$ [18].

Розв’язання. Зауважимо, що при підстановці пари $F_{2n+1}; F_{2n}$ в задане рівняння, ми приходимо до окремого випадку тотожності Кассіні: $F_{n-1} \cdot F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ – одне з відомих співвідношень для чисел Фібоначчі. Воно було доведено французьким астрономом Кассіні в 1680 році [2].

Покажемо, що у вихідного рівняння немає інших розв’язків. Знайдемо спочатку тільки натуральні розв’язки, оскільки $ff(x, y) = x^2 - xy - y^2 = ff(-x, -y)$.

Неважко перевірити, що тоді $y < x \leq 2y$. Крім того, кожна пара розв’язків (x, y) породжує цілий ланцюжок розв’язків за правилом:

$$(x, y) \rightarrow (x - y, 2y - x) \rightarrow (x, y) \rightarrow (2x + y, x + y)$$

При русі по цьому ланцюжку вліво числа в парах зменшуються:

$$0 < x - y < x, 0 < 2y - x < y.$$

Тому на певному етапі вийде пара, в якій $y = 0$, $x = 1$, тобто пара $(F_1; F_0)$. Але ця пара породжує ланцюжок:

$$(F_1; F_0) \rightarrow (F_3; F_2) \rightarrow \dots \rightarrow (F_{2n+1}; F_{2n}) \rightarrow \dots$$

Значить, вихідна пара повинна мати вигляд $(x, y) = (F_{2n+1}; F_{2n})$.

Відповідь: $(x, y) = \pm(F_{2n+1}; F_{2n}), n \in \mathbb{Z}$.

2.7 Задачі на числову послідовність у завданнях НМТ

Важливим етапом навчання є успішне складання НМТ з математики учнями 11 класів.

Національний мультипредметний тест – це процес визначення рівня знань випускників загальноосвітніх навчальних закладів, незалежних від загальноосвітніх та вищих навчальних закладів.

Національний мультипредметний тест (НМТ) — це форма вступного випробування в Україні, яка використовується для **конкурсного відбору** випускників закладів повної загальної середньої освіти для здобуття вищої освіти (вступу до університетів).

Мета: Визначення **рівня навчальних досягнень** випускників з кількох основних предметів, необхідних для вступу до закладів вищої освіти.

Програма НМТ за змістом – це програми ЗНО, затверджені Наказом МОН № 696 від 26 червня 2018 року, **У 2022-2025 роках** замість традиційного ЗНО проводиться **Національний мультипредметний тест (НМТ)**.

Практики та дослідники рекомендують вчителям готуватися до З на різних етапах процесу засвоєння знань учнями:

- у процесі вивчення нового матеріалу;
- при перевірці знань;
- під час закріплення нового матеріалу;
- як домашнє завдання для контролю над собою.

Використання вчителем таких тестових завдань спричинить формування в учнів свідомого уявлення про особливості їх виконання.

Тема «**Числові послідовності**» (тобто арифметична та геометрична прогресії) є лише одним із розділів курсу алгебри.

- **У ЗНО з математики (до 2021 р.):** Зазвичай було **2–4 завдання** з цієї теми серед загальних 35 завдань тесту.

- **У НМТ з математики (2023–2025 р.):** Серед 22 завдань тесту, як правило, трапляється **1–2 завдання** на арифметичну або геометричну прогресію.

Завдання 12. (основна сесія НМТ 2025 р. Варіант1)

В арифметичній прогресії (a_n) відомо, що $a_6 - a_1 = -30$.

Очисліть значення виразу $a_1 - a_3$.

А 12

Б 10

В – 15

Г – 10

Д – 12

Розв'язання:

Для арифметичної прогресії (a_n) формула n -го члена має вигляд:

$a_n = a_1 + (n-1)d$, де a_1 — перший член, а d — різниця прогресії.

Використовуємо дану умову $a_6 - a_1 = -30$. Запишемо a_6 через a_1 і d :

$$a_6 = a_1 + (6-1)d = a_1 + 5d$$

Підставляємо це в умову:

$$a_6 - a_1 = (a_1 + 5d) - a_1 = 5d$$

Отже, маємо:

$$5d = -30$$

Звідси знаходимо різницю прогресії d :

$$d = -30 / 5 = -6$$

Обчислюємо значення виразу $a_1 - a_3$. Запишемо a_3 через a_1 і d :

$$a_3 = a_1 + (3-1)d = a_1 + 2d$$

Підставляємо це у вираз, який потрібно обчислити:

$$a_1 - a_3 = a_1 - (a_1 + 2d) = a_1 - a_1 - 2d = -2d$$

Тепер підставляємо знайдене значення $d = -6$:

$$a_1 - a_3 = -2 \cdot (-6) = 12$$

Відповідь: А

Завдання 12. (основна сесія НМТ 2025 р. Варіант II)

Завдання 1: Арифметична прогресія (Тестове)

Різниця арифметичної прогресії дорівнює -3 . Її другий член $a_2 = 12$. Знайдіть п'ятий член цієї прогресії a_5 .

Розв'язання:

1. Знайдемо перший член a_1 : $a_1 = a_2 - d = 12 - (-3) = 12 + 3 = 15$

2. Знайдемо п'ятий член a_5 за формулою $a_n = a_1 + (n - 1) d$:

$$a_5 = 15 + (5 - 1) (-3) = 15 + 4 (-3) = 15 - 12 = 3$$

Відповідь: 3.

Завдання 2: Геометрична прогресія (На встановлення відповідності)

Установіть відповідність між умовою (1-3) геометричної прогресії та її елементом (А-Г).

Умова	Елемент
1. $b_1 = 4, q = 2$. Знайти b_3 .	А. $\frac{1}{4}$
2. $b_2 = 1, b_3 = 4$. Знайти b_1 .	Б. 16
3. $b_1 = 8, q = \frac{1}{2}$. Знайти суму нескінченно спадної прогресії.	В. 2
	Г. 1

Розв'язання:

1. $b_3 = b_1 \cdot q^{3-1} = 4 \cdot 2^2 = 4 \cdot 4 = 16$ - Б

2. Знаменник $q = \frac{b_3}{b_2} = \frac{4}{1} = 4$. Перший член $b_1 = \frac{1}{4}$ - А

3. $S = \frac{b_1}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = \frac{8}{\frac{1}{2}} = 8 \cdot 2 = 16$

Відповідь: 16

Завдання 12. (основна сесія ЗНО 2024 р. Варіант 1)

В арифметичній прогресії (a_n) відомо, що $a_6 - a_1 = -30$. Обчисліть значення виразу $a_6 - a_4$.

А 12

Б 10

В -15

Г -10

Д -12

Розв'язання:

1. Визначення різниці арифметичної прогресії:

В арифметичній прогресії a_n різниця між будь-яким членом і попереднім членом є сталою величиною, яку позначають d .

Формула для n -го члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + (n - 1) d$

$$\text{Звідси, } a_6 = a_1 + (6 - 1) d = a_1 + 5d$$

За умовою задано $a_6 - a_1 = -30$ Підставимо вираз для a_6 :

$$(a_1 + 5d) - a_1 = -30$$

$$5d = -30$$

$$d = -\frac{30}{5} = -6$$

2. Обчислення значення виразу $a_6 - a_4$:

Використовуючи формулу для n -го члена, можемо записати:

$$a_6 = a_1 + 5d$$

$$a_4 = a_1 + 3d. \text{ Тоді } a_6 - a_4 = (a_1 + 5d) - (a_1 + 3d) = a_1 + 5d - a_1 - 3d = 2d$$

$$\text{Підставимо знайдене значення } a = -6: a_6 - a_4 = 2(-6) = -12$$

Відповідь: Д-12.

Завдання 12. (основна сесія 2024. Варіант 2)

Сума перших п'яти членів геометричної прогресії (v_n) дорівнює 32, а сума перших чотирьох її членів дорівнює 20. Визначте v_5 .

А 1,6

Б 52

В 11,4

Г-12

Д 12

Розв'язання:

Визначимо суму перших n членів геометричної прогресії за формулою

$$S = \frac{b_1 (q-1)}{(q-1)}$$

За умовою задачі, сума перших п'яти членів $S_5 = 32$, а сума перших чотирьох членів $S_4 = 20$

3. П'ятий член геометричної прогресії b_5 можна знайти як різницю між сумою перших п'яти членів та сумою перших чотирьох членів: $b_5 = S_5 - S_4$.

4. Підставивши значення, отримаємо: $b_5 = 32 - 20 = 12$

Відповідь:

Д 12

Задача з арифметичної прогресії (завдання 20 основної сесії НМТ 2023, 1 сесія):

В арифметичній прогресії (a_n) перший член $a_1 = -3$, а різниця $d = 5$. Знайдіть суму перших 12 членів цієї прогресії.

Розв'язок:

1. Формула суми n перших членів арифметичної прогресії має вигляд:

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$$

2. Підставимо відомі значення:

$$a_1 = -3$$

$$d = 5$$

$$n = 12$$

3. Обчислимо суму:

$$S_{12} = \frac{2 \cdot (-3) + 5 \cdot (12-1)}{2} \cdot 12$$

$$S_{12} = \frac{-6 + 5 \cdot 11}{2} \cdot 12$$

$$S_{12} = \frac{-6 + 55}{2} \cdot 12$$

$$S_{12} = \frac{49}{2} \cdot 12$$

$$S_{12} = 49 \cdot 6$$

$$S_{12} = 294$$

Відповідь: 294.

Задача з геометричної прогресії (завдання 26 додаткової сесії НМТ 2023)

Сума п'яти перших членів геометричної прогресії дорівнює 32, а сума чотирьох перших членів дорівнює 20. Знайдіть п'ятий член прогресії.

Розв'язання:

1. Використаємо означення суми членів прогресії. П'ятий член геометричної прогресії $b_5 = S_5$ можна знайти як різницю суми п'яти членів і суми чотирьох членів:

$$b_5 = S_5 - S_4$$

2. Підставимо відомі значення:

$$S_5 = 32$$

$$S_4 = 20$$

3. Обчислимо п'ятий член:

$$b_5 = 32 - 20 = 12$$

Відповідь: 12.

Задача на арифметичну прогресію (НМТ 2022)

В арифметичній прогресії (а) перший $a_1 = -21$ а різниця $d = 1.5$ Скільки всього від'ємних членів має ця прогресія?

Розв'язання:

Загальна формула п-го члена арифметичної прогресії: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

Потрібно знайти, скільки членів прогресії є від'ємними, тобто $a_n < 0$

$$-21 + 1.5(n - 1) < 0$$

$$1.5(n - 1) < 21$$

$$n < 15$$

$$n - 1 < \frac{21}{1.5}$$

$$n - 1 < 14$$

$$n < 15$$

Оскільки n є натуральним числом, яке позначає номер члена, то n може набувати значень від 1 до 14.

Відповідь: Ця прогресія має 14 від'ємних членів.

Задача на арифметичну прогресію (НМТ 2022)

Знайдіть найбільший від'ємний член арифметичної прогресії 2.9; 2.2; 1.5;

Розв'язання:

Знайдемо різницю прогресії d : $d = 2.2 - 2.9 = -0.7$

Перший член $a_1 = 2.9$

Загальна формула n -го члена: $a_n = a_1 + d(n - 1) = 2.9 - 0.7(n - 1)$

Потрібно знайти найбільший від'ємний член. Це означає, що ми шукаємо такий член a_n , який є від'ємним, а наступний за ним a_{n+1} є додатним або нулем.

Знайдемо, коли a_n стане від'ємним: $2.9 - 0.7(n - 1) < 0$

$$2.9 < 0.7(n - 1)$$

$$2.9/0.7 < n - 1$$

$$4.14... < n - 1$$

$$5.14... < n.$$

Отже, перший від'ємний член буде мати номер $n = 6$

Знайдемо a_6 : $a_6 = a_1 + d(6 - 1) = 2.9 - 0.7 \cdot 5 = 2.9 - 3.5 = -0.6$

Відповідь: Найбільший від'ємний член прогресії дорівнює -0.6 .

Задача на геометричну прогресію (НМТ 2022)

Четвертий член геометричної прогресії у 8 разів більший за перший член. Сума третього й четвертого членів дорівнює 108. Знайдіть знаменник цієї прогресії.

Розв'язання:

Загальна формула n -го члена геометричної прогресії: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

З першої умови: $b_4 = 8 b_1$

Підставимо формулу b_4 : $b_1 \cdot q^{4-1} = 8 b_1$, тобто $b_1 \cdot q^3 = 8 b_1$

Оскільки b_1 , не дорівнює нулю (інакше вся прогресія складалася б з нулів, що суперечить умові), можемо поділити на b_1 : $q^3 = 8$ Звідси $q = 2$

З другої умови: $b_3 + b_4 = 108$

Загальні формули для b та b_4 : $b_3 = b_1 \cdot q^2 = b_4 = b_1 \cdot q^3$

Підставимо $q = 2$: $b_1 \cdot 2^2 + b_1 \cdot 2^3 = 108$, $4 b_1 + 8 b_1 = 108$, $12 b_1 = 108$,

звідси $b_1 = 9$

Задача вимагає знайти знаменник.

Відповідь: Знаменник прогресії дорівнює 2.

Завдання 1. (основна сесія ЗНО 2021 р.) «Арифметичну прогресію a_n задано формулою n -го члена: $a_n = 2,6n - 7$.

1. Визначте сьомий член цієї прогресії.

2. Визначте різницю $a_4 - a_1$ [50].

Розв'язання:

$$a_n = 2,6n - 7;$$

$$a_1 = 2,6 \cdot 1 - 7 = -4,4$$

$$a_4 = 2,6 \cdot 4 - 7 = 3,4;$$

$$a_7 = 2,6 \cdot 7 - 7 = 11,2.$$

Відповідь: 11,2.

$$a_4 - a_1 = 3,4 - (-4,4) = 3,4 + 4,4 = 7,8$$

Відповідь: 7,8.

2.8 Педагогічні засоби подолання освітніх втрат і збереження якості освіти в умовах воєнного стану та повоєнного відновлення України

Російсько-українська війна, окрім болісних утрат, які всі ми бачимо й відчуваємо, несе з собою освітні втрати, які можуть мати серйозний вплив як на майбутнє долю самих дітей, так і на подальший розвиток країни. Галузевий огляд Сектору освіти Світового банку зазначає, що ці втрати в нашій країні можуть становити більше одного навчального року, тому одним із пріоритетів української системи освіти сьогодні є подолання освітніх втрат.

Міжнародною організацією ЮНЕСКО визначені чинники, які вплинули на освітні втрати і призвели до різкого зниження успішності учнів на 30-50%, що виокремило **12 проблем освіти, які можуть стати кризою сьогодення:**

1. Навчання з ризиком для життя під час повномасштабної війни.
2. Дотримання безпеки під час тривоги.
3. Напружений психоемоційний стан. Психологічна втома.
4. Освітні втрати та погіршення якості освіти через обставини, пов'язані з неповноцінним навчанням під час війни.
5. Рух учнів та наповнюваність класів до 40-50 осіб.

6. Перевантаження вчителів. Організація компенсаторних занять для надолуження програмного матеріалу.

7. Зростання вимог до цифрової компетенції вчителів у цифровому освітньому середовищі.

8. Найменша динаміка зростання зарплати освітян у порівнянні з іншими видами економічної діяльності по Україні згідно статистики Держслужби за II півріччя 2025 року.

9. Низький рівень престижності професії вчителя серед інших на рівні держави.

10. Нестача педагогічних кадрів на третину по країні.

11. Реформа НУШ, яку сповна не реалізують через війну.

12. Скасування ДПА, ЗНО. Заміна міжпредметним тестуванням (4 предмети в один день).

Австралійський демограф Марк Мак-Кріндл увів нове позначення - **покоління альфа**. Воно стосується дітей, народжених після 2010 року (до 2025). **Сильними сторонами** покоління Альфа є швидкість сприйняття, мобільність, багатофункціональність, відкритість і толерантність, турбота про планету, життя в декількох вимірах. **Слабкі сторони** покоління Альфа – залежність від технологій, поверхневість, емоційна бідність, утрата важливих навичок.

Для спілкування з дітьми нового покоління Альфа необхідно звертати увагу на почуття, використовувати короткі формати, бути чесними, підтримувати дитячі починання, дотримуватись рівноправності у стосунках.

Працювати з дітьми покоління Альфа треба:

1. ШВИДКО. Прискорити зміст навчання: подавати інформацію швидше, часу на вирішення завдань давати менше, отримувати результати, аналізувати їх та реагувати на них одразу.

2. ЯСКРАВО. ВИДОВИЩНО. НАОЧНО. Одна картинка коштує тисячі слів. Урок для Альф повинен об'єднувати нові технології навчання (проектори, мобільні телефони, комп'ютери, інтерактивні дошки й планшети).

3. ОБГРУНТОВАНО. Бажаєте, щоб дитина зробила щось або вивчила, - поясніть їй, навіщо це треба.

4. ЕМОЦІЙНО. Обговорюйте з дітьми їхні почуття, промовляйте свої. Це навчить розпізнавати та розуміти чужі емоції й наміри, а також контролювати свої, щоб вирішувати практичні завдання.

5. КРЕАТИВНО. Заохочувати прагнення самореалізації. Вибирати завдання, у яких можливий не один варіант відповіді.

6. МУЛЬТИЗАДАЧНО. Альфам набагато зручніше робити кілька речей одночасно. Саме тому сьогоднішній урок має включати нові інструменти – ігри, динамічні та інтерактивні завдання.

7. ЗАЛУЧЕНО. Потрібно не намагатися щось пояснити, а зацікавити.

8. ПРОДУКТИВНО. Краще працює заохочення за щось добре зроблене, ніж покарання за помилки та провини.

9. МУДРО. Ділитись своїми уявленнями про життя, ділитися досвідом, але при цьому уникати фраз типу «я у твої роки...».

Особливістю освітніх втрат є накопичення їх і поглиблення, якщо вчасно і ефективно не вживати заходів для їх подолання.

Українські освітні програми і в мирний час були дуже щільними, а за умови воєнних викликів і обмежень — стали по-справжньому непідйомними. Тому, крім розуміння сучасних дітей за теорією поколінь, серйозним викликом для педагогічних працівників є небажання дитини вчитися.

Це спричинено сукупністю причин.

Зовнішніми причинами є: зниження цінності освіти в суспільстві; нестабільність існуючої системи; недосконалість організації освітнього процесу; негативний вплив середовища (ЗМІ, вулиця, родина).

Внутрішніми причинами є: послаблення здоров'я школярів; низький розвиток інтелекту; відсутність мотивації до навчання; слабкий розвиток вольової сфери школярів.

Організація навчання з надолуження освітніх втрат з математики 5-10 класи.

Тривалі перерви у вивченні математики призводять до втрати певних навичок. Тому найбільш продуктивним є систематичне навчання математики, а значить доцільно впроваджувати ефективні методики й технології організації цього навчання для подолання втрат у математичній освіті. При цьому навчання математики має бути цікавим, продуктивним і посильним предметом для учнів.

Технологія «Щоденні 3» відноситься та використовується на уроках математики, її ключовою метою є зацікавлення математикою і навчання учнів самостійності та витривалості, правилам успішного вибору. Головне – багато практики, тому багато часу відводиться вчителями для самостійної роботи.

Ця технологія передбачає використання щодня трьох видів діяльності, а саме: математичного письма, математики для себе, математики з кимось упродовж години. У сучасних українських реаліях може не вдатися приділити математиці стільки часу щодня й спробувати одразу всі три види діяльності. Проте варто не засмучуватися, а намагатися пристосовуватися до ситуації.

Математика самостійно передбачає закріплення вивчених математичних понять за допомогою дій з різними предметами (відбувається кінестетична практика у формі математичних ігор чи практичних робіт.)

Математика разом з другом, закріплення учнями вивчених математичних понять за допомогою дій з різними предметами в парі.

Математичне письмо передбачає закріплення та відпрацювання вивченої теми. Учні письмово виконують різні математичні завдання.

Поєднання навчальної спрямованості та ігрової форми дозволяє стимулювати невимушене оволодіння конкретним навчальним матеріалом, сприяє підвищенню рівня успішності у навчанні.

Одним із ефективних шляхів розвитку в учнів зацікавленості у навчанні є гра. У процесі гри діти не помічають, що навчаються, активно допомагаючи одне одному, поповнюють свої знання, уміння й навички, розвивають увагу, мислення, самостійність. Діти розв'язують пізнавальні навчальні завдання, запропоновані їм

у цікавій формі, і, отже, опановують досвідом розумової діяльності, виробляють уміння застосувати знання в різних ситуаціях.

Діти беруть участь у грі й навчаються із задоволенням, а це позитивно впливає на засвоєння ними знань або формування вмінь. Гра спочатку приваблює поставленими завданнями, труднощами, котрі необхідно подолати, а потім дає радість відкриття, відчуття подоланої перешкоди.

Під час уроків і занять учителі намагаються урізноманітнити навчальну діяльність, для цього використовують різні за формою проведення дидактичні ігри – індивідуальні, групові. Такі ігри, як «Ромашка», «Склади слово правильно», «Піксельні розмальовки», математичне лото, математичне доміно, складання математичних пазлів, головоломок, проводяться як індивідуально для учнів, так і для команд.

Своєрідними математичними завданнями з підвищеною складністю є головоломки, у яких ураховуються вікові та психологічні особливості учнів. Вони не тільки визначають предметні вміння учнів, але і є потужним інструментом для розвитку математичних здібностей.

Використання головоломок під час занять математики дозволяє покращити сприйняття та засвоєння учнями навчального матеріалу.

У практиці роботи вчителів доречним є використання методу TARSIA (Formulator Tarsia - додаток, призначений для вчителів математики, які проводять заняття з використанням різних карток-головоломок). Головоломок є відмінним інструментом для стимулювання творчих здібностей учнів, дозволяють на 100% перевірити, наскільки учні знають певний матеріал.

За допомогою Formulator Tarsia створюються математичні пазли з карток прямокутної та трикутної форми, на кожній грані яких розміщено формули, завдання чи відповіді. Готові завдання можна переглядати та роздруковувати. Програма здатна генерувати як складні пазли, так і простіші, а також картки для математичного доміно.

У процесі застосування цього методу вчителі помічають інтерес учнів до математики, у вирішенні головоломок є дух суперництва, що добре розвиває таку

невід'ємну якість, як конкурентоспроможність. При вирішенні навчальних завдань учні виявляють ініціативу, активність, винахідливість, здатність до емоційного сприйняття математичних завдань. Отже, головоломки можуть бути засобом досягнення не лише предметних, а й особистісних результатів.

Оскільки деякі заняття через повітряну тривогу доводиться проводити в укритті, то матеріал для індивідуальних завдань або командних змагань заздалегіть готовий і завжди стане в пригоді.

Навчання математики має бути цікавим, продуктивним і посилюючим. Активність учнів залежить від психічного стану, тому в кожне заняття математики вкраплюються вправи на дихання чи вправи для тіла (вправи для стабілізації емоційного стану учнів). Вони дуже корисні для учнів, оскільки позитивно впливають не лише на їхній загальний емоційний стан, а й на можливість працювати на уроці, адже стрес, у якому перебувають учні, негативно позначається на когнітивних процесах.

Висновок до Розділу 2

У цьому розділі ми провели аналіз змістової лінії “Числові послідовності. Властивості числової послідовності та їх застосування” у програмах шкільного курсу математики. Проаналізували навчальну програму середньої та старшої школи і кількість відведених годин на вивчення теми “Числові послідовності. Властивості числових послідовностей та їх застосування. Ознайомилися зі змістом навчальної програми та навиками, які здобуває учень.

Дослідили особливості введення основних понять з теми “Числові послідовності. Властивості числових послідовностей та їх застосування” у шкільному підручнику. Взявши для аналізу декілька підручників з алгебри 9 класу для розбору викладення теми “Числові послідовності” та порівнявши їх. Було коротко проаналізовано додавання нових понять числової послідовності у курсі математики 10 класу. Написали методичні вказівки до вивчення теми «Числові послідовності. Властивості числових послідовностей та їх

застосування.» Дослідили про організація навчання з надолуження освітніх втрат з математики 5-10 класів.

Матеріал уроку може бути використаний в подальшому вчителем, для кращого викладення теми та підготовці до уроку.

РОЗДІЛ 3. ДИДАКТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ПО ТЕМІ «ЧИСЛОВІ ПОСЛІДОВНОСТІ» ПРИ ДИСТАНЦІЙНОМУ НАВЧАННІ

3.1 Дидактичне забезпечення. Організація дистанційного навчання математики

Використання дидактичного забезпечення на уроках алгебри є важливим засобом в сучасному навчальному процесі.

Дидактичне забезпечення – це різновид наочних підручників, переважно карти, таблиці, набори карток з текстом, цифрами або малюнками, реактиви, рослини тощо, які роздаються учням для самостійної роботи в класі і вдома або демонструються вчителем перед усім класом.

Під електронним дидактичним матеріалом розуміють документи, які цілеспрямовано розроблені для навчального процесу за допомогою додатків загального призначення і побудовані відповідно до змісту навчальної теми і методики навчання предмету. Використання електронних навчальних матеріалів дозволяють вчителям:

- посилити мотивацію навчання шляхом використання різноманітних видів діяльності та джерел інформації;
- формувати в учнів навичок пізнавальної діяльності;
- діагностувати помилки та оцінити результати;
- здійснювати контроль з зворотним зв'язком щодо наслідків діяльності учнів;
- віалізувати навчальну інформацію;
- моделювати навчальні або дослідницькі об'єкти (комп'ютери можуть не тільки створювати моделі, але й дозволяють змінювати умови презентації для відтворення інформації з оптимальним темпом, який сприймають учні);
- формувати інформаційну компетенцію вчителя та учнів.

Організація дистанційного навчання в умовах тривалої ізоляції (лист Міністерства освіти і науки України від 23.03.2020 №1/9-173 «Щодо організації освітнього процесу в закладах загальної середньої освіти під час

карантину») - швидке, гнучке реагування вчителів України на виклики сучасного світу.

Велика кількість теоретичних і практичних зарубіжних досліджень присвячена дистанційному навчанню.

Різні підходи до визначення дидактичного забезпечення, дозволяють розглядати це поняття як:

- цілеспрямований процес діалогу, асинхронної чи синхронної взаємодії між вчителями та учнями та використання засобів навчання, незалежно від їх розташування у просторі та часі (А. Бітченко, С. Мясников);
- організаційна форма навчального процесу, в якій активні учасники (об'єкт і суб'єкт навчання) досягають навчальних цілей, в основному здійснюючи навчальну взаємодію на певній відстані (В. Биков);
- комплексна, цілісна та гуманістична форма навчання, заснована на широкому використанні традиційних та нових інформаційних технологій та її технічних засобів, що використовується для представлення навчальних матеріалів, самостійного навчання та організації діалогу між викладачами та учнями, коли процес навчання не залежать від їх положення в просторі і часі і не залежить від конкретного навчального закладу (А. Андрєєв).

Відповідно до Положення про дистанційне навчання (наказ Міністерства освіти і науки України від 25.04.2013 №466), дистанційне навчання - це персоналізований процес набуття знань, умінь, навичок пізнавальної діяльності людини, це непряма взаємодія між віддаленими учасниками освітнього процесу, яка функціонує на основі сучасної психології та викладання у професійному середовищі з інформаційно - комунікаційними технологіями.

У зв'язку з воєнним станом, використання дистанційного навчання в 2025-2026 н.р. **регулюється цим Положенням**, але з урахуванням деяких додаткових рішень та рекомендацій МОН і місцевих органів влади, зокрема:

1. **Безпековий пріоритет:** Рішення про перехід на дистанційну форму (повністю або частково) ухвалюється в разі **відсутності надійного укриття** або за **погіршення безпекової ситуації** в регіоні.
2. **Державна підтримка:** Дистанційна форма обов'язково застосовується для учнів, які **тимчасово перебувають за кордоном** (в частині вивчення українознавчого компоненту) та учнів, які **проживають на тимчасово окупованих територіях** або в зоні активних бойових дій.
3. **Змішане навчання:** Часто школи використовують **змішаний формат**, який поєднує очні заняття (у дні, коли дозволяє місткість укриття) та дистанційну роботу (згідно з Положенням №1115).

Отже, Положення №1115 є актуальною правовою основою для дистанційної освіти у 2025-2026 навчальному році.

Дистанційне навчання - це ефективна форма навчання, яка використовує традиційні та специфічні методи, засоби та форми, засновані на комп'ютерних і телекомунікаційних технологіях.

Особливостями дистанційного навчання є

- модульний зміст навчання;
- гнучкість (зручний час, місце, темп роботи);
- інтерактивність;
- мобільність (ефективний зворотній зв'язок між учителем і учнем);
- індивідуалізація (індивідуальний підхід);
- співробітництво та співтворчість;
- масовість (доступність необмеженої кількості учнів джерел інформації);
- технологічність (використання нових досягнень у галузі інформаційних технологій);
- новий статус учителя (координатор інформаційного процесу, консультант, керівник навчальних проектів).

Організовуючи дистанційне навчання, необхідно неухильно дотримуватись відповідних нормативних документів.

Засоби дистанційного навчання

Тема	Засоби дистанційного навчання
Організація дистанційного навчання	<ul style="list-style-type: none"> • Microsoft Teams (https://teams.microsoft.com/start) • Google Classroom (https://classroom.google.com) • Class Dojo (https://www.classdo.co.com) • GIOS (https://gioschool.com) • МійКлас (https://cmiylklas.com.ua/info/unciteliam) • Edmodo (https://new.edmodo.com)
Організація освітнього інтерактивного простору	<ul style="list-style-type: none"> • Padlet (https://padlet.com/) • Lino It (https://en.linoit.com/) • MindMeister (https://www.mindmeister.com/)

	<ul style="list-style-type: none"> • Mindomo (https://www.mindomo.com/)
Дистанційна перевірка знань, створення навчальних тестів	<ul style="list-style-type: none"> • «На Урок» (https://naurok.com.ua/test/create) • LearningAppsg (https://learningapps.org/) • Kahoot! (https://kahoot.com) • Matific (https://www.matific.com/ua/uk/home/) • Google форми (https://www.google.com.ua)
Організація відеоконференцій, проведення відеоуроків	<ul style="list-style-type: none"> • Zoom (https://zoom.us/) • Google Hangouts (https://hangouts.google.com/) • Skype Meet Now (https://www.skype.com/uk/ffree-conference-call/) • Cisco Webex (https://www.cisco.com/)

Підготовка до ЗНО, систематизація теоретичного матеріалу	<ul style="list-style-type: none"> • EdEra (https://www.er-era.com/) • iLearn (https://ilearn.org.ua/) • Prometheus (https://prometheus.org.ua/) • Khan Academy (https://uk.khanacademy.org/) • Be smart (https://besmart.eduget.com/)
Організація дослідницької діяльності: побудова та дослідження певних об'єктів	<ul style="list-style-type: none"> • GeoGebra, GeoGebra 5.0 (https://www.geogebra.org) • Advanced Grapher 2.2 (https://www.alentum.com/agrapher) • графічний онлайн калькулятор Desmos (https://www.desmos.com/)
Електронні підручники	<ul style="list-style-type: none"> • https://mon.gogg.ua/ua/osggita/zzagalna-serednya-osggita/pidruchniki/elektronni-pidruchniki

Організація дистанційного навчання передбачає:

1. Згідно з календарним тематичним планом з математики сплануйте роботу та визначте методи посилення навчального процесу (поєднання навчальних тем або закріплення навчальних модулів; перегляд або самостійне вивчення неосновних навчальних матеріалів; організація проєктної діяльності).

2. Вибір технології, форми та методу дистанційного навчання. Визначте стратегії дистанційного навчання (синхронні, асинхронні). Синхронна стратегія – вчителі та учні знаходяться в постійній взаємодії в режимі реального часу.

Асинхронна стратегія – не передбачає явного прямого контакту, тому інформацію (демонстрації, відеоуроки) можна передавати через відео, комп'ютер або іншими методами, придатними для дистанційного навчання. При цьому діти самостійно розподіляють свій власний час, виконуючи завдання у зручний для них час.

Вибір засобів дистанційного навчання (хмарні сервіси, онлайн- платформи,

віртуальні дошки, динамічні математичні системи, відеоуроки, інтерактивні вправи, освітні мережеві ресурси).

Організувати інтерактивну взаємодію учасників навчального процесу (електронна пошта, форум, чат, відеоконференція, блог тощо).

Забезпечити зворотній зв'язок (контроль) з учнями та їхніми батьками.

Визначення та дотримання правил та термінів дистанційного навчального процесу, прояв завдань учня. [33, С. 4-10]

З метою забезпечення організації навчального процесу та виконання навчального плану рекомендуємо використовувати дистанційне навчання.

Для організації дистанційної взаємодії з учнями для вивчення, закріплення та засвоєння навчального матеріалу, організації самостійної роботи рекомендуємо використовувати Google Classroom, який передбачає:

- створення окремих класів для предмета або кожної групи учнів;
- створення оголошень для однієї або кількох груп;
- розмістити загальні відомості про організацію навчального процесу: теми, кількість годин тощо; розміщувати навчальні матеріали для учнів, включаючи відео (YouTube або відео з власного сховища файлів) або посилання на відповідні інтернет-ресурси;
- створювати завдання, що дозволяють прикріплювати посилання, мультимедійний контент, різні типи файлів, а також створювати та зберігати файли на Google Disk;
- встановити термін виконання кожного конкретного завдання до найближчої кількості хвилин;
- встановити рівні для виконаних завдань та встановити гнучку шкалу оцінок для кожного конкретного завдання;
- можливість динамічного відображення вмісту редагування режимі реального часу, редагування та коментування завдань, які виконують учні;

Переваги Google Classroom

Просте налаштування: вчителі можуть додавати учнів до курсу або надсилати коди для приєднання. Після того, як учень зареєструється та

отримають звичайний обліковий запис Google, вони зможуть отримати доступ до Google Classroom.. Створення курсу займає всього кілька хвилин (створення Клас Google Classroom - інструкція, відео).

Економія часу: створювати, перевіряти та оцінювати завдання в електронному форматі швидше та зручніше, ніж у зошитах.

Зручна організація: завдання надаються учням у відповідних розділах, а матеріали курсу (документи, фото, відео тощо) автоматично додаються в папки на Google Диску.

Швидка комунікація: вчителі можуть негайно розміщувати оголошення та створювати дискусії, а учні можуть ділитися ресурсами один з одним і відповідати на запитання у записах курсу [33, С. 4-10].

GIOS (Global Innovative Online School) - платформа для змішаного та онлайн-навчання під час карантину. Навчання на платформі GIOS безкоштовне.

Навчальні матеріали базуються на чинній навчальній програмі з математики.

Кожен урок містить «інтерактивне» відео, опорну схему, розв'язані типові задачі, завдання в тестовій формі, на визначення відповідності, на пошук помилок

допомагає розвивати критичне мислення), завдання для встановлення послідовності дій, на введення відповіді.

Заняття побудовані в інтерактивній формі, що дозволяє учням ефективніше вивчати матеріали.

Мій Клас – це освітній ресурс, що використовується для організації дистанційного навчання, його концепція "навчання без примусу". Однією з його особливостей є його технічні складові: створення умов завдання та автоматична перевірка відповідей.

Цей ресурс забезпечує автоматичне генерування типових завдань.

Вирішуючи такі завдання, учні можуть навчати нових людей розв'язувати конкретні задачі з будь-якого предмета. Кожного разу, коли завдання

перезапускається Мій Клас автоматично створює нові умови вправи, змушуючи учня вирішувати завдання того самого типу в режимі «нескінченного навчання».

Цей ресурс дозволяє школярам самостійно засвоювати матеріал та вчитися на своїх помилках, завдяки функції «Кроки розв'язання»: виконуючи завдання та переглядаючи результати, учні можуть отримати доступ до детальних інструкцій щодо розв'язання задачі.

Батьки можуть зареєструватися в Мій Клас і зв'язати свої особисті дані з особистими даними своїх дітей, щоб вони могли відстежувати навчальне життя школяра.

Переваги Мій Клас

Детальне пояснення теоретичного матеріалу з прикладами розв'язаних задач. Умови завдання генеруються, що унеможливорює списування.

Функціонал **Мій Клас** зі створення робіт для перевірки (числового, творчого, текстового або тестового завдання) дозволяє вчителю не тільки швидко створювати особисті роботи чи проекти, а й автоматично перевіряти відповіді.

Автоматизована класифікація балів учнів: вчителі отримують бал з розбивкою за показниками.

Автоматичний моніторинг предметів, занять, завдань, тем і часу, витраченого учнями, без зусиль викладачів і результатів навчання часу, що сприяє прозорості показників успішності, забезпечує достовірність даних та уникає конфліктів для оцінки знань учнів. .

Edmodo – це освітня технологічна платформа для дистанційного навчання.

Можливості Edmodo:

- організація навчального процесу;
- створення класів та навчальних груп;
- організація різних завдань;

- завантаження файлів та посилань у різних форматах;
 - публікація повідомлень на стіні (для всіх) або розсилка особистих повідомлень;
 - проведення опитувань;
 - створення та публікація тестів, вікторин;
 - вбудовування посилань, відео, зображень, аудіо в повідомлення на стінах та завданнях;
 - відстеження процесу виконання учнями завдань;
 - користуватися електронними журналами;
 - створити бібліотеку навчальних ресурсів та обмінятися мате колегами.
- Для організації простору навчальної взаємодії доцільно прийняти:

- віртуальну інтерактивну дошку *PPadlet* *PPadlet* (<https://padlet.com/>)
- віртуальну онлайн дошку *LLinoLLt* (<http://en.linoit.com/>)
- інтелект карта *MMindMMeister* (<https://www.mindmeister.com/>)
- ментальну карту *MMindomo* (<https://www.mindomo.com/>)

Ви можете використовувати віртуальну інтерактивну дошку Padlet:

- як групова робоча платформа для «мозкового штурму», узагальнення та систематизації та рефлексії знань;
- для розміщення навчальної інформації та практичних завдань;
- організовувати спільні онлайн-завдання;
- для публікації ідеї проекту та обговорюйте їх в Інтернеті;
- як інструмент організації спільної діяльності учнів.Звертаємо увагу на характеристики онлайн-тестування «На Урок»:
- безкоштовний (кількість завдань і кількість тестів – необмежена);

- відкрита підготовлена база тестів;
- інтеграція з спеціалізованим кабінетом вчителя;
- вміння створювати різні типи завдання;
- можливість друку тестової та флеш-картки;
- контроль виконання робіт;
- 12-бальна та 100-бальна система оцінювання;
- існування певних символів, які можна використовувати при створенні тесту;
- можливість розповсюдження тестів у Google Classroom;
- робота в режимі реального часу;
- можливість завантажувати результати;
- широкі можливості аналізу результатів роботи.

У звичайному робочому процесі онлайн-тести можна використовувати як карту флеш -пам'яті для роботи в режимі реального часу і як домашнє завдання. У період ізоляції рекомендуємо використовувати онлайн-тести як домашнє завдання, оскільки вчителі мають можливість:

- налаштувати завдання на будь-яку тему дистанційно контролювати їх виконання;
- перейменовувати тестове завдання для іншого класу;
- контролювати точний час виконання конкретними учнями завдань;
- аналізувати статистику успішності;
- завантажувати звіт про ефективність у електронній таблиці Excel.

Платформа LearningApps.org –це онлайн-сервіс, який дозволяє створювати інтерактивні вправи з:

- знайдіть потрібну пару;

- хронологічною послідовністю;
- класифікацією;
- заповненням пропусків.

Крім того, Learningapps.org забезпечує дистанційне навчання для кожного вчителя, оскільки дозволяє створювати набір курсів у власному обліковому записі, вводити дані про учнів, їх особисту інформацію, встановлювати паролі для входу та проводити практику.

Kahoot! – безкоштовний онлайн-сервіс для створення вікторин, навчальних ігор, тестів з кількома варіантами відповідей. Ефект змагання додає таймер, встановлений вчителем при створенні тестів.

Школяр, який першим відповів на онлайн-тест, отримує більше балів, ніж суперник.

Результати тестування зберігаються в таблиці MS Excel у вигляді списку, за яким можна контролювати знання учнів.

Classtime (раніше GoPollock) – онлайн-сервіс для створення різних типів завдань: одна правильна відповідь, кілька правильних відповідей, правда / неправда, текст, встановіть відповідність, визначення порядку, виділення тексту та виділення області. Функція Classtime надається безкоштовно. У безкоштовному плані Classtime вчителі можуть створювати свої запитання, проводити курси, приєднуватися до учнів і переглядати результати їх роботи в режимі реального часу, надавати особисті завдання кожному учню та відстежувати діяльність учнів протягом уроку.

Перевірка знань і зворотній зв'язок має бути організованою за допомогою Google Форм, що дозволяє створювати форми з різними елементами або типами запитань (усі представлено цими типами), причому будь-які запитання можна зробити обов'язковими. У процесі створення форми ви можете легко порядок запитань і вибрати дизайн для оформлення; посилання на форму генерується автоматично після її створення [33, С. 4-10].

Переваги Google форм:

Учням потрібно лише натиснути на посилання, щоб скласти тест онлайн.

Створений тест можна вставити в блог або веб-сайт надіслати електронною поштою.

Тест містить набір тем.

Ви можете зібрати деяку статистичну інформацію з відповідей аудиторії.

Можлива автоматична оцінка відповіді, підрахунок балів, коментування відповіді та відкладення відображення результату.

Доступне індивідуальне налаштування – показ запитань на основі відповідей користувачів.

Інтуїтивно зрозумілий інтерфейс, здатний копіювати запитання з текстового редактора.

Уроки онлайн рекомендуємо проводити за допомогою:

Zoom (<https://zoom.us/>);

Google Hangouts (<https://hangouts.google.com/>);

kype Meet Now (<https://www.skype.com/uk/freeconferencecall/>);

Cisco Webex (<https://www.cisco.com/>).

Систематизований теоретичний матеріал із математики, алгебри, геометрії, алгебри та початків аналізу, завдання для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання з математики розміщено за посиланнями:

EdEra (<https://www.ed-era.com/>);

iLearn (<https://ilearn.org.ua/>);

Prometheus (<https://prometheus.org.ua/>);

Khan Academy (<https://uk.khanacademy.org/>),

Be smart (<https://besmart.eduget.com>).

З метою систематизації та узагальнення знань пропонуємо створювати ментальні карти Mindmeister, Popplet, Cacco. У процесі побудови ментальної

карти учні вчаться вибирати, систематизувати та запам'ятовувати ключову інформацію, аналізувати й узагальнювати, виховувати творче та креативне мислення, пам'ять та увагу.

Важливою частиною організації дистанційного навчання є те, що школярі мають доступ до електронних підручників, розміщених на сайті Міністерство освіти і науки ([https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya –osvita / pidruchniki / elektronni-pidruchniki](https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/pidruchniki/elektronni-pidruchniki)).

Для організації дистанційної наукової діяльності рекомендуємо використовувати:

курс динамічної математики GeoGebra, GeoGebra 5.0 <http://www.geogebra.org>
Інструменти для обробки функцій та їх графіків (побудовник графіків)
Advanced Grapher, Advanced Grapher 2.2 (<http://www.alentum.com/agrapher/>);
графічний онлайн калькулятор Desmos (<https://www.desmos.com/>).

Проектна та дослідницька діяльність учнів допомагає виховувати у початківців високого рівня креативність та критичне мислення, включаючи реалізацію аналізу, синтезу та оцінки.

На різних етапах проектної діяльності рекомендується використовувати:

- Google Форми, Kahoot! – пошук теми для дослідження (опитування, анкетування);
- Padlet (<https://padlet.com/>), LinoIt (<http://en.linoit.com/>) – організація процесу обговоріння досліджуваної проблеми;
- Google Docs (Word, Excel) – обговорювати з учнями робочий процес проекту, визначати групи та завдання, які вони виконуватимуть (створювати, редагувати, онлайн-формат документів);
- Google Docs (PowerPoint), Prezi (<https://prezi.com/>), Canvas (<https://www.canva.com/>) – організація проектної роботи; створення презентацій, публікацій, інфографіки
- Padlet (<https://padlet.com/>), LinoIt (<http://en.linoit.com/>), Google Sites,

Blogger Google – подання отриманих результатів.

З метою організації процесу обговорення проблеми, що досліджуватиметься, доцільно використовувати Padlet, Lino It – сервіси, завдяки яким є можливість:

- оформити віртуальну інтерактивну дошку та заповнити її даними;
- організувати спільний доступ користувачів до неї;
- експортувати її в різні формати;
- розмістити в соціальних мережах.

На віртуальну дошку можна додавати графічні, текстові та мультимедійні (відео або презентації) файли, посилання на веб-сторінки, нотатки.

Дистанційне навчання забезпечує учням необмежений доступ до електронних освітніх ресурсів, які надають можливості для формування навачок, необхідних у XXI столітті:

- інформаційна грамотність – здатність шукати інформацію, порівнювати її з різних джерел, визначати та відбирати найбільш потрібну інформацію;
- мультимедійна грамотність – здатність визначати та використовувати різні види медіаресурсів у роботі та навчанні;
- організаційна грамотність – вміння планувати час так, щоб встигнути все, що заплановано;
- розуміння взаємозв'язків, що існують між різними людьми, групами та організаціями;
- комунікативна грамотність – це навички ефективного спілкування і співробітництва;
- продуктивна грамотність – вміння створювати якісну продукцію, вміння використовувати інструменти планування.

3.2 Підготовка та методика створення відеоуроків з математики

Сьогодні, на допомогу вчителів приходять сучасні психолого-педагогічні та інформаційно-комунікаційні технології, які надають учням велику кількість навчальних матеріалів, що дають їм можливість самостійно опрацювати

навчальні матеріали, а також взаємодію (зворотній зв'язок) між учнями та вчителем під час навчального процесу.

Для використання цих технологій вчителі використовують: власний веб-сайт, платформу «Мій клас», «*Google Classroom*», «*Zoom*», «*YouTube*», інструменти електронної пошти тощо.

Однак у процесі навчання основним джерелом інформації залишається мова вчителя, що впливає на слуховий аналізатор і тим самим виховує почуття мови.

Прослуховування закадрового тексту може виховувати в учнів стійкість уваги, слухової пам'яті та уяви, формувати навички спостереження за словами, виховувати ключове вміння – національномовне спілкування: вміти грамотно, доречно та правильно використовувати у промові математичні терміни [25, С. 37-43].

«Zoom» – це сервіс, за допомогою якого можна організувати та проводити online-уроки із школярами. Такі уроки проводяться у визначений викладачем час. Звичайно, ви можете записати цей урок і дозволити відсутнім учням переглянути його. Відповідно до вимог чинного законодавства, згода батьків учнів, які беруть участь у курсі, все одно потрібна, щоб не порушувати права на навчання кожного учня.

Тому в цьому випадку найкраще не організовувати онлайн-уроки, а створювати власні відеоуроки.

Відеоурок – це форма дистанційного навчання, за допомогою якої можна змінити класичну форму навчання в навчальних закладах: замість пояснення матеріалу з підручників викладачі записують необхідні дії та пояснення дій на відеокамеру або виконують дії за допомогою голосу на комп'ютері.

Час необхідний вчителю для запису відеоуроку залежить від його досвіду роботи з комп'ютером, оскільки, окрім підготовки відеофайлів його також потрібно ще відредагувати (обрізати, об'єднати в ціле тощо) та завантажити на YouTube.

Відеоуроки вигідно створювати для демонстрації нових навчальних

матеріалів, підвищення рівня знань учнів, узагальнення та систематизації вивченого матеріалу [33, С. 4-10].

Для школярів відеоуроки мають такі переваги:

- Дивитися урок в зручний час.
- Повторний перегляд всього уроку, так і його окремих фрагментів.
- Планування часу на навчання.
- Вміти задавати питання та отримувати відповіді після перегляду відеоуроку.
- Підвищити ефективність засвоєння інформації.

Створення відеоуроку складається з двох етапів:

- Підготовка матеріалів та розробка сценарію відеоуроку.
- Технічна реалізація (тобто запис і монтаж відеоуроку).

- На першому етапі створення відеоуроку вчитель повинен:

- Поставити собі такі запитання:
- Якої мети я хочу досягти?
- Що мені для цього потрібно зробити?
- Як досягти цієї мети?

Визначити:

- тему, мету курсу та очікувані результати;
- мати зміст нового навчального матеріалу;
- завдання та вправи, які дасть учитель при поясненні матеріалів, разом із відповідями;
- самостійним розв'язуванням завдань і вправ.

Продумати:

як актуалізувати опорні знання учнів

1) демонстрація доступних підручників, встановлення цікавості сюжету, можливо, надавши якоїсь несподіванки, як досягти синхронного впливу голосу

вчителя, адже все це концентрує увагу учня та сприяє несвідомому запам'ятовуванню матеріалу;

2) в якому порядку подати новий навчальний матеріал та приклади розв'язування задач і вправ;

3) як виглядатиме обговорюваний об'єкт;

4) як виділити дані об'єкти, на які буде звертатися увага учнів при поданні матеріалів (підкреслити, обвести).

Урахувати:

психофізіологічні характеристики уваги:

- зосередження уваги на об'єкті;
- стійкість уваги, яка може тривати 15-20 хвилин навіть при активному спілкуванні з об'єктом дослідження;
- обсяг уваги - це кількість об'єктів і символів, які одночасно сприймаються досить чітко, зазвичай 7 ± 2 ;
- розподіл уваги - звертайте увагу на кілька об'єктів одночасно і повністю сприймайте їх одночасно. В учнів він не дуже розвинений, тому при підготовці зображень слід використовувати принцип «фон і фігура», коли досліджуваний об'єкт виступає більш помітним за решту картин на екрані, зосередьтеся на потрібному моменті;
- перевести увагу – переміщення уваги з одного предмета на інший;
- навантаження відеоуроку як джерела інформації - з одного боку, а з іншого - здатність школяра засвоювати та передавати інформацію. Учні не зможуть обробити складну і велику кількість інформації за межами сприйняття, тому вони не зможуть її отримати взагалі. Коли буде знайдено правильне (оптимальне) співвідношення між змістом представленого навчального матеріалу та його уявною можливістю, інформація буде добре засвоєна [25, С. 37-43].

2. Написання відеоуроку.

На другому етапі створення відеоуроку вчитель повинен

1. Поставити собі такі запитання:

1) Де зніматимуться відеоуроки (у школі біля дошки чи вдома за комп'ютером, ноутбуком, планшетом тощо)?

2) Що потрібно підготувати для запису відео (дошку, крейду, аксесуари для презентацій, проєктор, мультимедіа чи електронну online-дошку на моніторі комп'ютера чи ноутбука, як створити презентацію з анімацією тощо)?

2. Визначитися:

1) з відео та аудіозаписуючою апаратурою (камери та мікрофони, вбудовані в смартфони, планшети, ноутбуки або підключені до комп'ютерів тощо);

2) при необхідності використовуйте програмне забезпечення для створення відеокурсів: електронні онлайн-дошки (наприклад, програмне забезпечення IDroo), інструменти для створення анімаційних презентацій (наприклад, знаменитий Microsoft Office PowerPoint тощо);

3) з програмним забезпеченням для запису відео. Наприклад, для запису (зйомки) відео з екрану монітора існують безкоштовні програми: UVScreenCamera, CamStudio, OBS Studio, Ezvid, ShareX та ін.;

4) з програмним забезпеченням для редагування відео. Наприклад, безкоштовна програма Windows Live MovieMaker («Кіностудія»).

3. Продумати:

1) як записувати відео: фрагментами чи повністю;

2) як виглядатиме і виділятиметься зображення предмета під час викладу навчального матеріалу;

3) як завершити відеоурок.

4. Урахувати:

1) тривалість відеоуроку (не більше ніж 15-20 хв);

відеоуроки – це навантаження джерела інформації. Якщо урок містить складну і дуже об'ємну інформацію, яка не сприймається учнем, то його слід розділити на

кілька відеоуроків.

5. Переконатися, щоб у відео не було зайвого контенту, який безпосередньо не вплине на імідж і розвиток події. Навпаки, весь знятий контент має відповідати головній меті відеоуроку.

6. З'ясувати правильний зв'язок між фоном і подіями, що відбуваються на задньому плані, і за допомогою комбінованих наочних рішень зосередити увагу учнів на основних об'єктах зображення, що мають значення для сюжету переднього плану.

7. Відео сценаріїв розробки та відредагуйте відеоурок [33, С. 4-10].

8. Вдома, де немає дошки чи крейди, вчителі можуть використовувати скринкаст для створення відеоуроків.

Скринкаст (відео з екрану) - це цифровий відеозапис інформації, що відображається на екрані комп'ютера (відеозахоплення екрану), тобто відеозапис того, що відбувається на моніторі, з додаванням аудіо та коментарів вчителя.

Це практичніше, ніж текстові описи, інструкції чи підручники, оскільки учні відразу бачать, як виконати певні дії [33, С. 4-10].

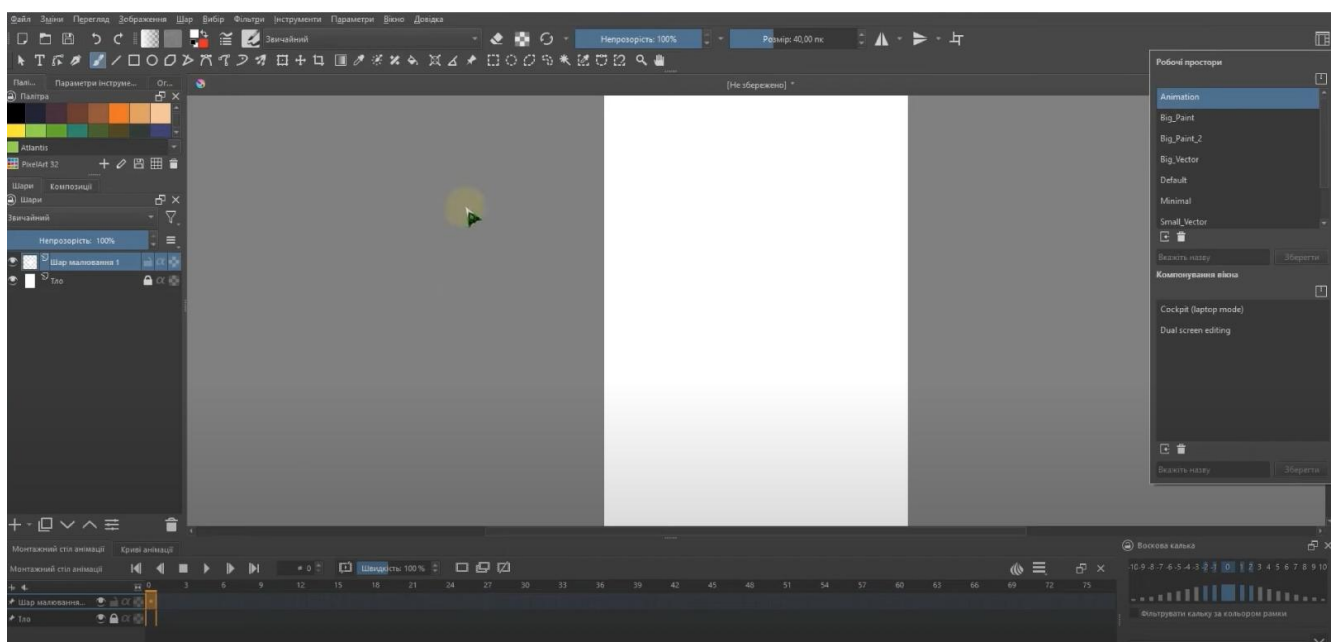
Ви можете використовувати комп'ютер із зовнішнім мікрофоном або ноутбук із вбудованим мікрофоном і мінімальним набором безкоштовного програмного забезпечення, щоб створити цей відеоурок: Microsoft Office PowerPoint, UVScreenCamera та Windows Live MovieMaker («Кіностудія»), програму інтерфейс Krita.

Завантажуємо програму інтерфейс Krita - Створення презентації. Анімація вказаний на рис.3.1

АНІМАЦІЯ В ГРАФІЧНОМУ РЕДАКТОРІ KRITA

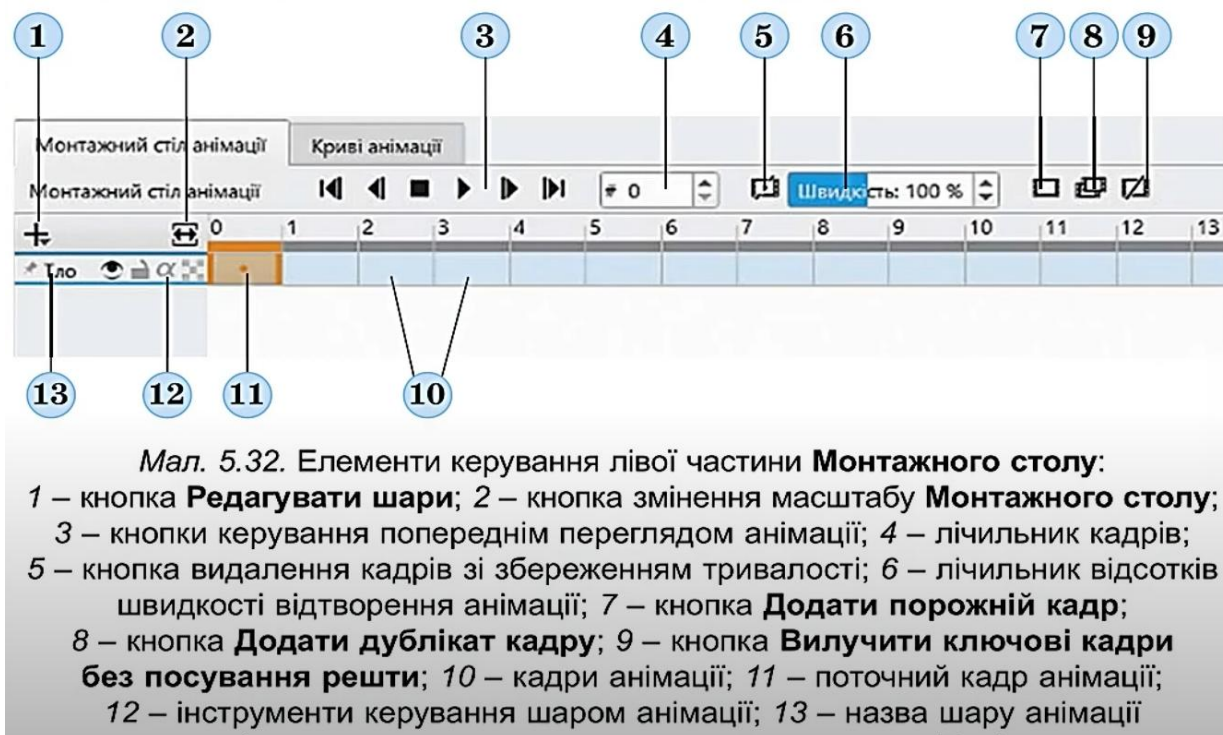
Для створення анімації у програмі Krita використовують інструменти робочого простору Animation.

Для переходу до цього робочого простору слід вибрати кнопку Вибір робочого простору у правому верхньому куті вікна програми, а потім вибрати у списку Робочі простори команду Animation. Рис. 3.1



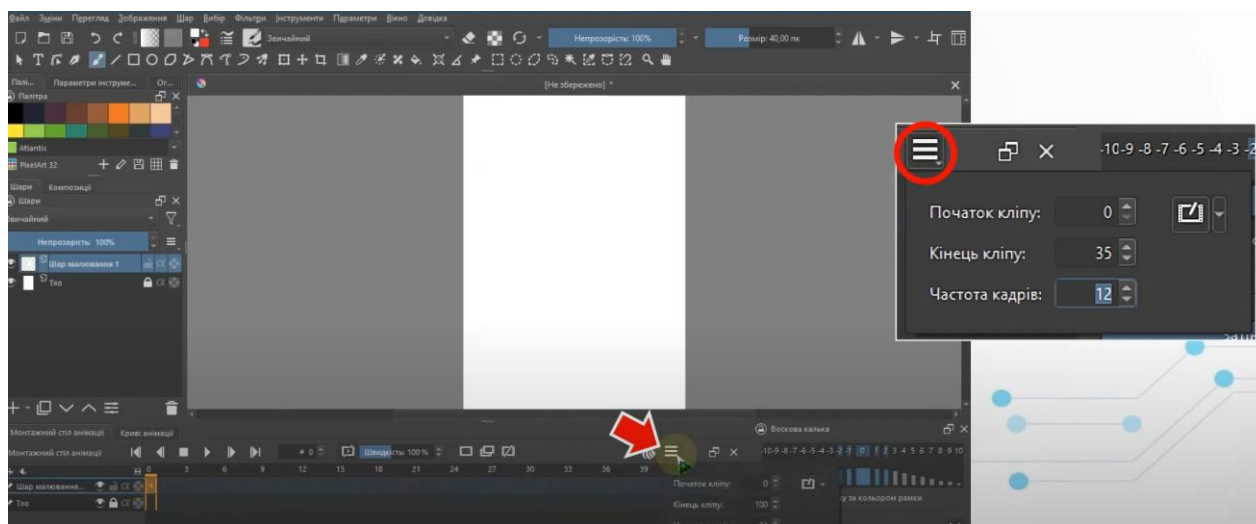
Налаштування анімації з використанням інструментів Монтажного столу , розміщеного в нижній частині вікна програми. Детальніше із цими інструментами

знайомимося в кодї створення анімації. Рис. 3.2



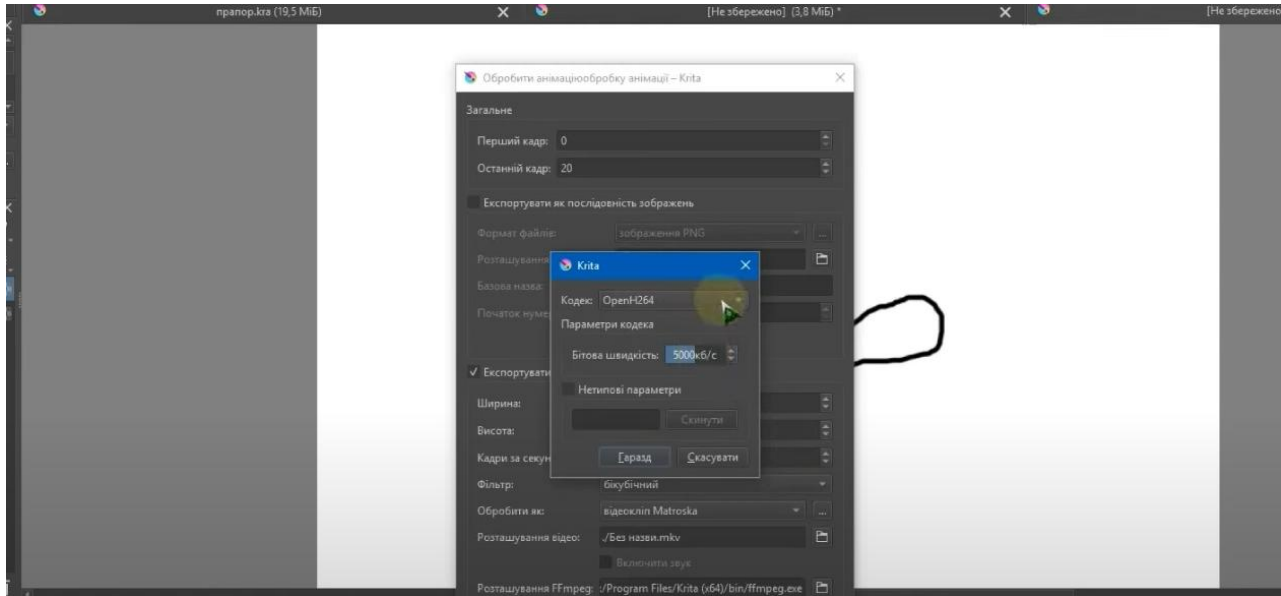
Для створення анімації потрібно після встановлення робочого простору виконати такі дії:

1. Вибрати у правій частині Монтажного столу кнопку Меню параметрів анімації.
2. Установити в полі Кінець кліпу потрібне значення кінцевого кадру. Рис. 3.3



3.Зробити поточний нульовий кадр на монтажному столі.

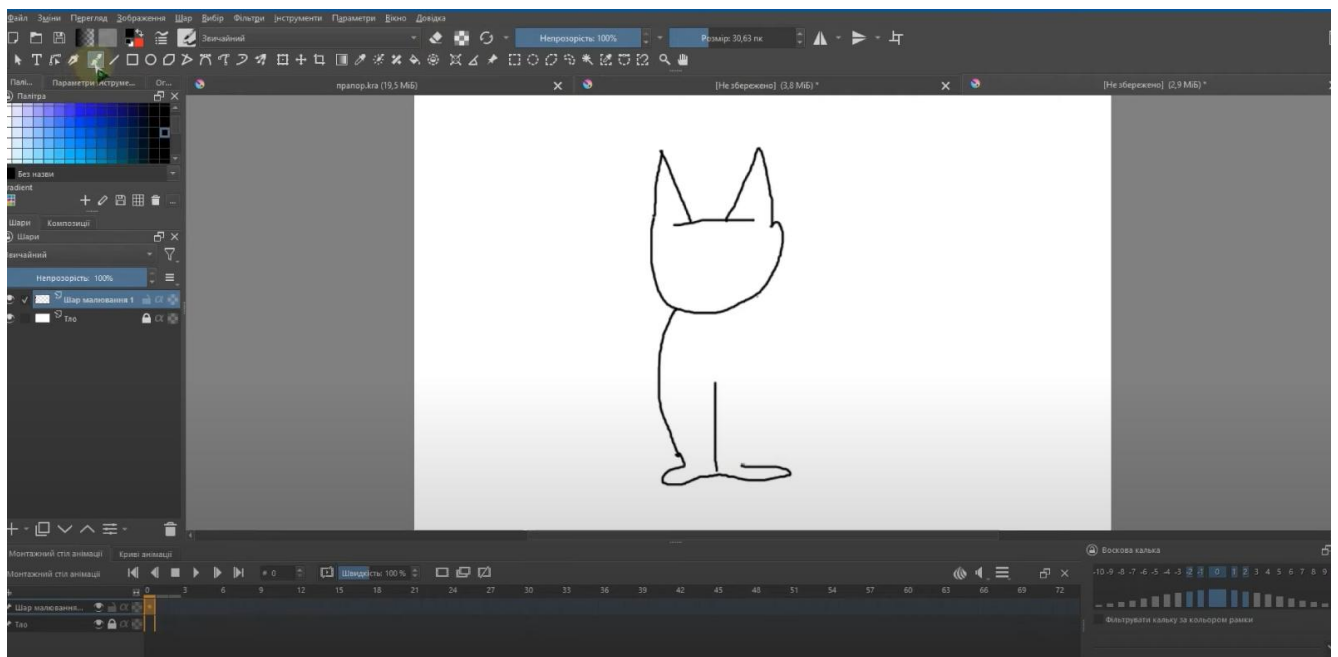
4.Вибрати в контекстному меню кадру команду Створити кадр – дублікат (інший спосіб – вибрати кнопку Додати дублікат кадру)



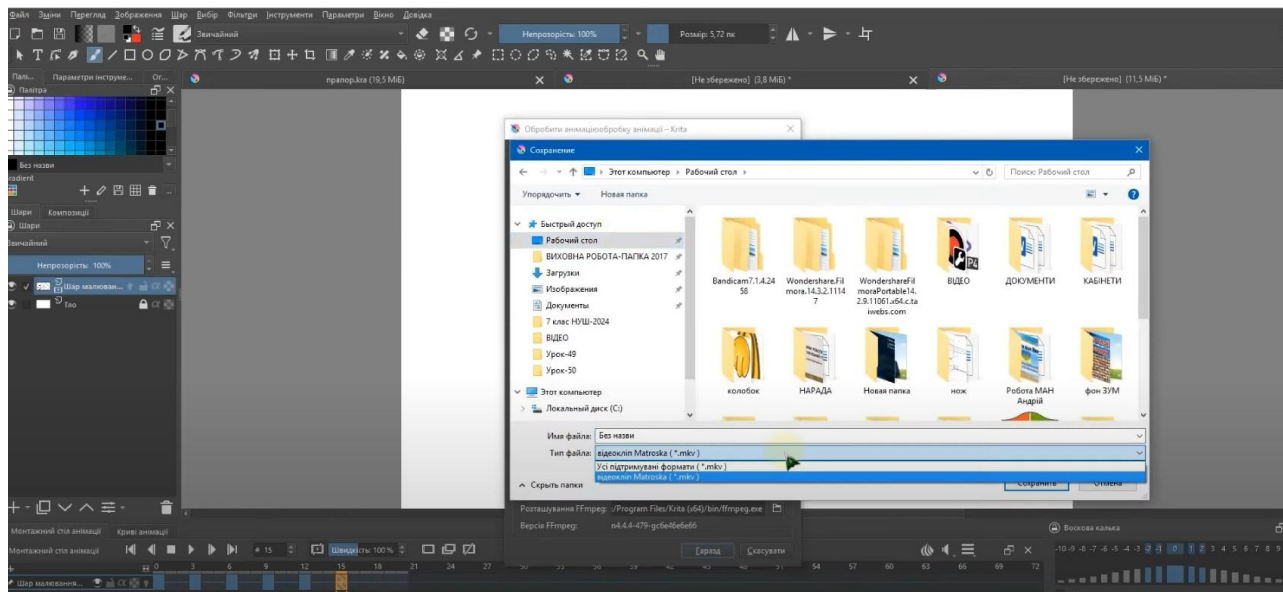
Створіть малюнок для першого кадру анімації. Рис. 3.4

5.Зробити поточним наступний кадр на Монтажному столі та виконати команду Створити кадр – дублікат.

6. Унести зміни до малюнка, відобразивши наступне положення об'єктів.



Зберегти створену анімацію у файлі, виконавши Файл – Обробити анімацію та та обравши один з варіантів збереження файлу анімації – як Webp або як відео. Рис. 3.5



Якщо запис зроблено невдало, натискаємо на кнопку «Видалити». Якщо запис треба зберегти, то натискаємо кнопку «Перегляд запису». З'явиться вікно. Рис.3.6



Натискаємо на кнопку «Зберегти у файл», і у вікнах, що з'являються, натискаємо на кнопку «Далі» до появи вікна, зображеного на рис. 3.7. Задаємо

ім'я файлу, під яким буде збережено відео, та натискаємо кнопку «Зберегти».

Завантажити цю програму та більш детально ознайомитися з її роботою можна на сайті: <https://www.softportal.com/software-8654-uvscreencamera.html>.

Після того як всі фрагменти відеоуроку збережені на диску, приступаємо до монтування. Це можна зробити в програмі UVScreenCamera, але простіше і зручніше це робити в програмі Windows Live MovieMaker («Кіностудія»).

Завантажуємо програму Windows Live MovieMaker (рис. 3.6.)

Завантажуємо програму Windows Live MovieMaker (рис. 3.6.).

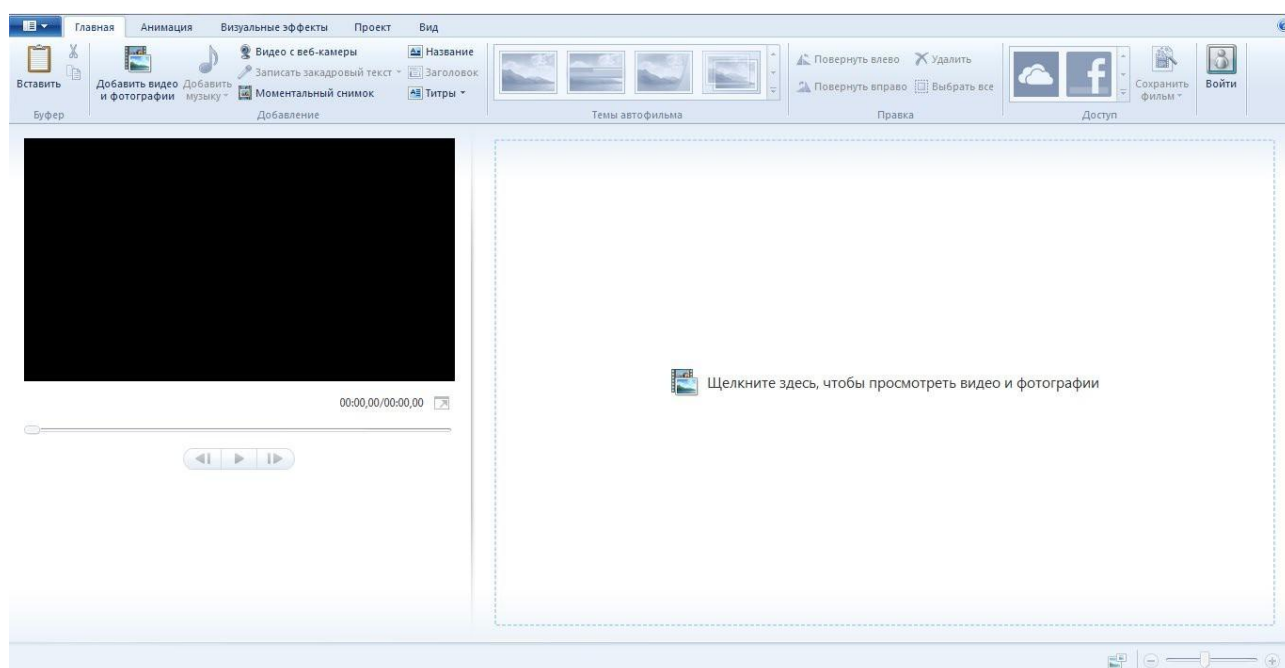


Рис. 3.8. Інтерфейс програми Windows Live MovieMaker («Кіностудія»)

Натискаємо «Додати відео та фото», вибираємо файли, з яких потрібно додати відеофрагмент. Натискаємо курсором «Додати відео та фото», вибираємо файл, з якого додаємо наступний відеофрагмент і т. д., поки не сформуємо весь відеоурок (див. рис. 3.8).

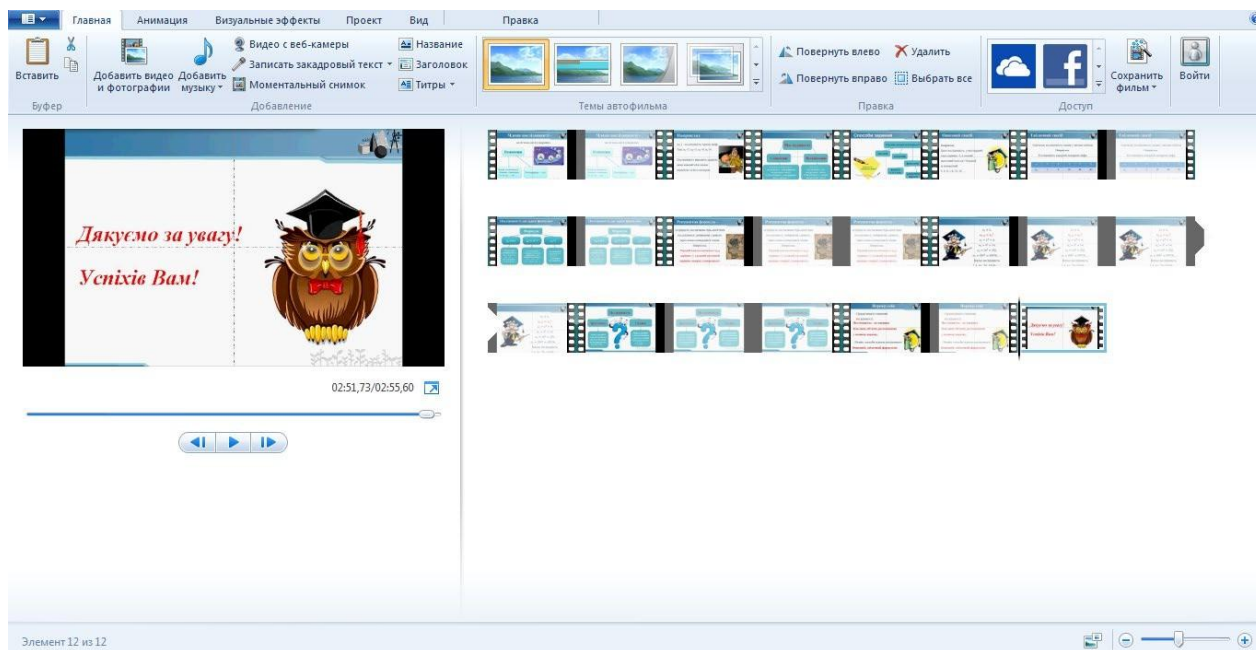


Рис. 3.9. Додавання відеофрагмента в програмі Windows Live MovieMaker
Щоб зберегти відеоурок, натискаємо «Файл», «Зберегти фільм»,
«Комп'ютер» (див. рис 3.8.)

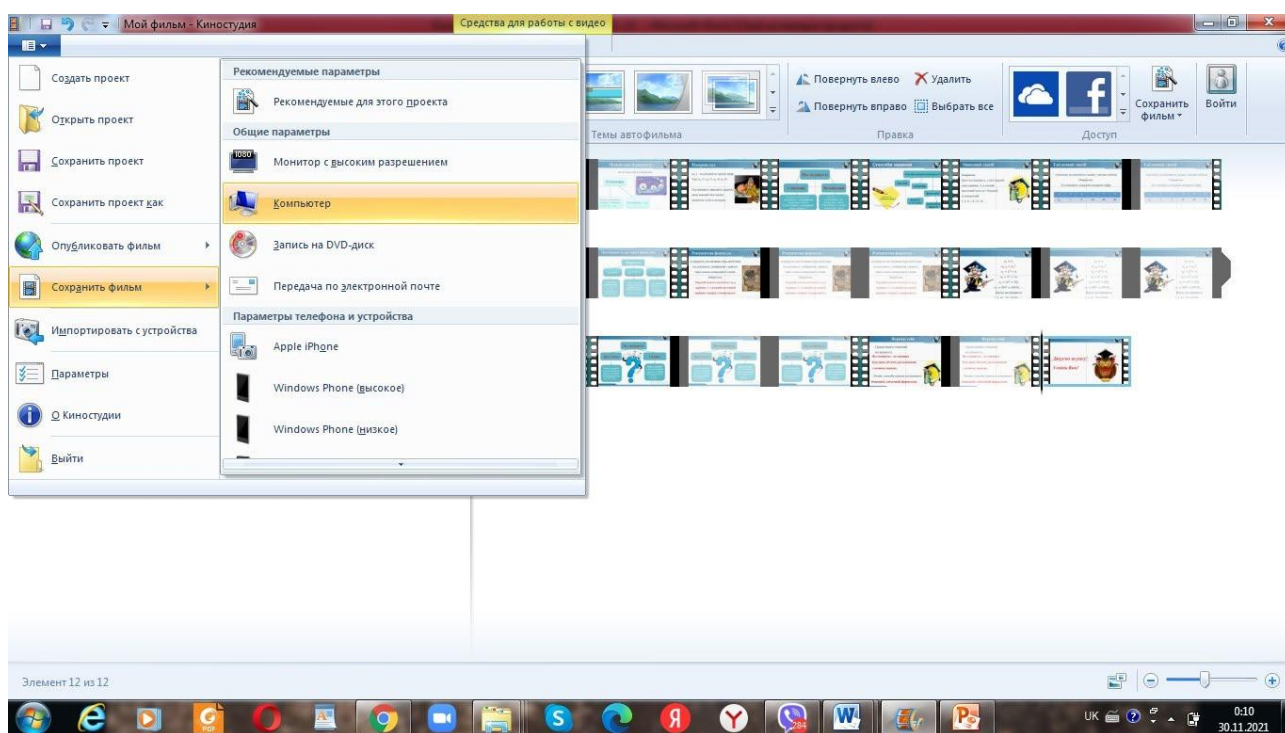


Рис. 3.10. Послідовність збереження відеоурока
Потім з'явиться вікно, в якому задаємо ім'я файлу для збереження
відеоурока, та натискаємо кнопку «Зберегти» (див.рис.3.9.).

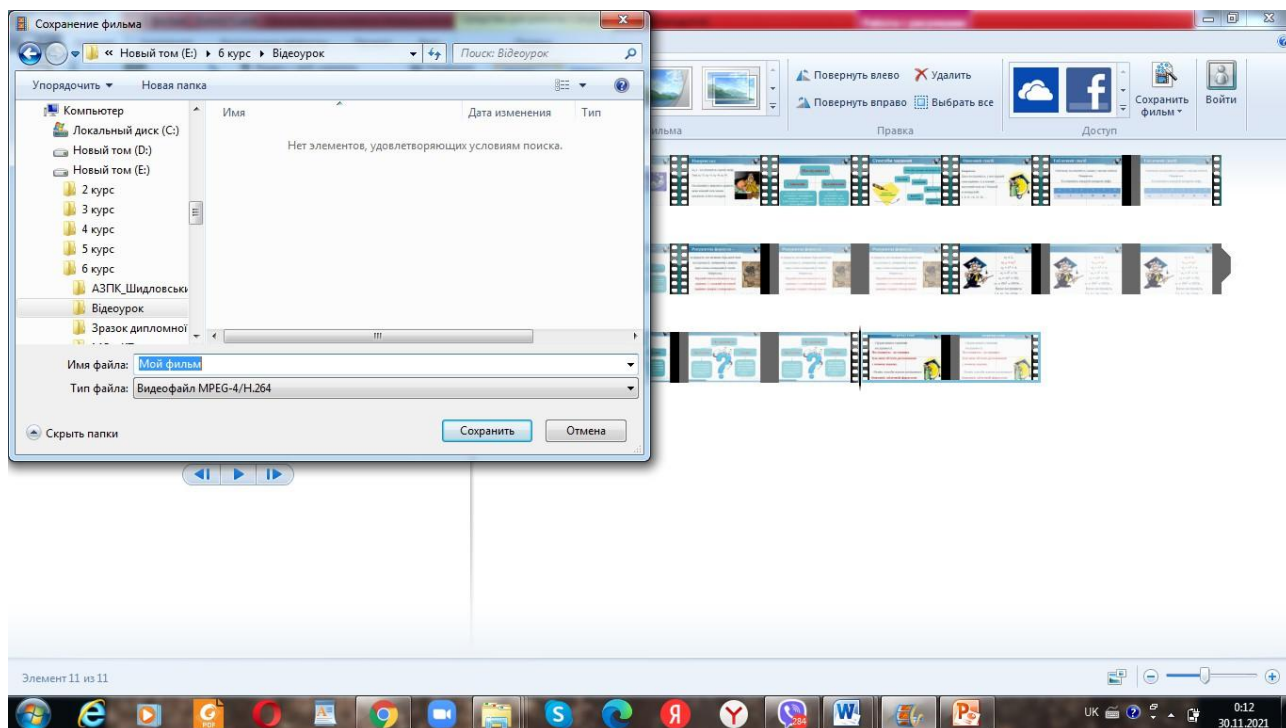


Рис.3.11. Задання ім'я та збереження файлу

Використовуючи Windows Live MovieMaker («Кіностудія»), також можна обрізати відео, додавати анімацію, візуальні ефекти тощо.

Завантажити програму та дізнатися більше про її роботу можна на сайті:
<http://home-soft.com.ua/1363-windows-movie-maker-2012.html>.

Відеоурок створено. Завантажуємо його на YouTube та надаємо посилання учням.

3.3 Classtime як допомога вчителю математики для дистанційного навчання при вивченні теми «Числові послідовності»

Сучасний світ часто ставить перед нами нові виклики, тому вміння швидко адаптуватися до змін і бути гнучким стає все більш важливим. У сфері освіти ця проблема особливо актуальна. Багатотижневий карантин у школах та необхідність негайного переходу на дистанційне навчання є дуже серйозним викликом для української системи шкільної освіти [32, С. 11-17].

Сьогодні спостерігається тенденція використання дистанційного навчання як методу організації, заснованого на використанні сучасних інформаційно-телекомунікаційних технологій, що дозволяє організувати навчальний процес

дистанційно – без прямого контакту вчителя та учня.

Необхідність упровадження технології дистанційного навчання зумовлена наступними факторами:

- робота з дітьми з обмеженими можливостями;
- робота з учнями, які захворіли;
- організація процесу під час самоізоляції;
- необхідність взаємодії учнів і вчителів;
- реалізація проектів та науково-дослідницьких робіт;
- робота з обдарованими дітьми та ін.

Існує велика кількість засобів дистанційного навчання: електронна пошта, соціальні мережі, системи відеоконференцій, гіпертекстові середовища, спеціальне програмне забезпечення, кожне з яких можна використовувати окремо або в поєднанні з іншими методами.

Рекомендуємо розглянути Classtime як один із корисних інструментів дистанційного навчання для вчителів

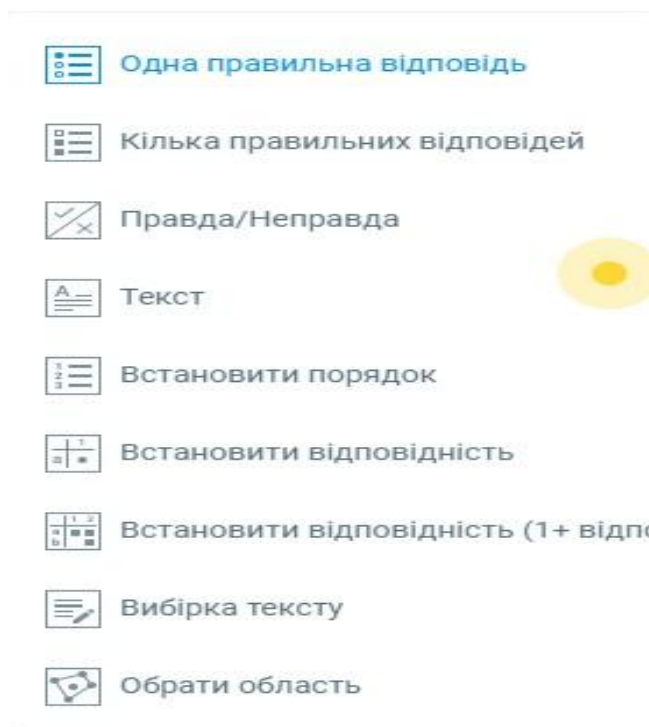


Рис. 3.12.

Можливі види тестування

Розглянемо класичний варіант тесту, який полягає у створенні запитання з

правильною відповіддю. Створіть завдання, щоб воно виглядало так (рис.3.11.):

The screenshot shows a question creation window. At the top right is a blue button labeled "Зберегти питання". Below it, the question text is "Яка з наведених послідовностей є арифметичною прогресією?". To the right of the text is "57 / 170". Below the text is a link "Опційно, додайте більше деталей тут...". There are three buttons: "Додати зображення", "Додати YouTube відео", and "Додати аудіо". Below these is a dropdown menu showing "Одна правильна відповідь" and "1 бал". There are four radio button options: "3; 6; 12; 24; ...", "7; 10; 12; 13; ...", "-10; 0; 10; -10; ...", and "20; 17; 14; 11; ...". The last option is selected. To the right of the options are icons for a checkmark, image, and close. At the bottom is a button "+ Додати варіант відповіді".

Рис. 3.13. Створення питання з однією правильною відповіді

Зазначайте завдання, вказуйте правильні та неправильні варіанти відповіді. Позначте правильний варіант на початку.

Щоб оцінити рівень знань учнів, можна використовувати довільне введення тексту для створення запитань. Звичайно, ця опція не буде автоматично оцінена. Учитель повинен розглянути домашнє завдання учня та його відповідь на запитання (рис. 3.14.).

The screenshot shows a question creation window. At the top right is a blue button labeled "Зберегти питання". Below it, the question text is "Знайдіть суму перших чотирьох членів геометричної прогресії (bn), якщо b1=2, q= 3". To the right of the text is "81 / 170". Below the text is a link "Опційно, додайте більше деталей тут...". There are three buttons: "Додати зображення", "Додати YouTube відео", and "Додати аудіо". Below these is a dropdown menu showing "Текст". To the right of the dropdown is "1 бал". At the bottom is a speech bubble containing the text "Учні матимуть можливість вільно ввести текст у відповідь на це питання."

Рис. 3.15. Створення питання з довільним введенням текст. Кожному завданню вчителі можуть поставити певні бали.

Після створення банку запитань учителю слід натиснути кнопку «Почати нову сесію», а потім він зможе його налаштувати (рис. 3.13.).

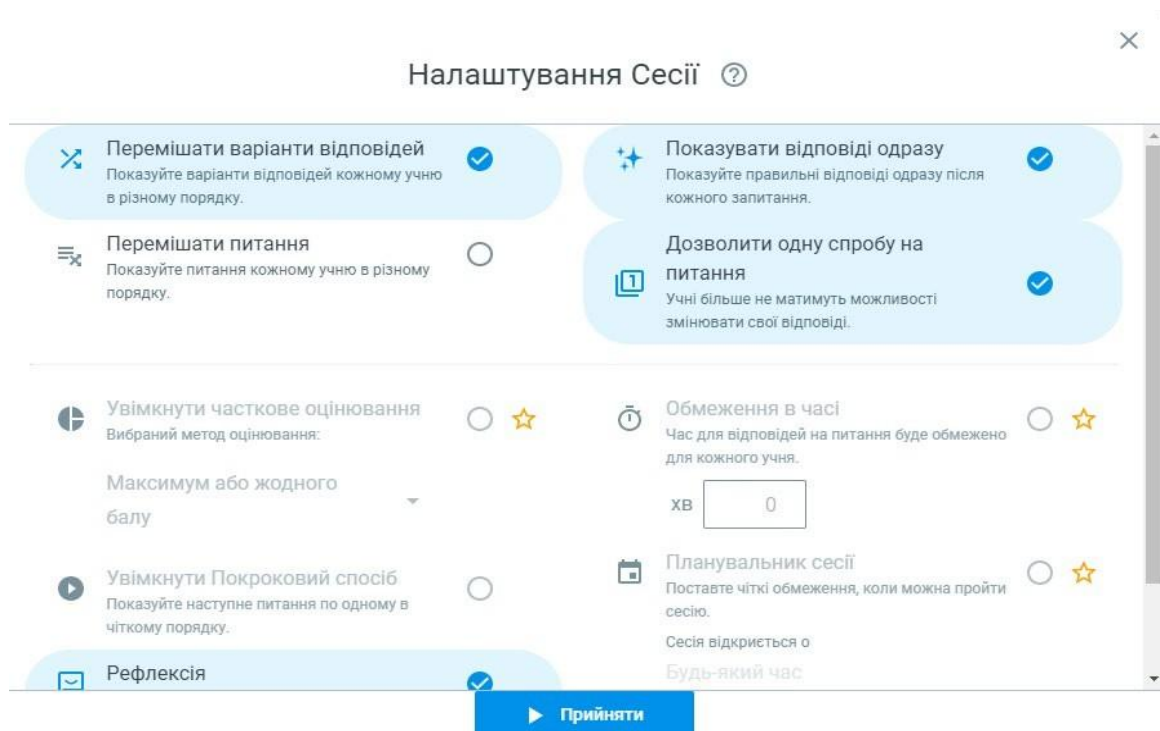


Рис. 3.16. Налаштування сесії

Як бачимо, більшість налаштувань надаються безкоштовно.

1. Після налаштувань потрібно натиснути «Прийняти», і тоді вчитель зможе:

- 1) провести тестування на уроці, указавши код сесії;
- 2) скопіювати URLадресу та відправити її учням віддалено;
- 4) змінити налаштування сесії;
- 5) надати можливість учням в участі в «Командній грі»;

2. Експортувати звіт про випробування, проведений відповідно до таких параметрів:

- 1) повний звіт в Excel або PDF;
 - 2) звіти кожного учня у PDF;
 - 4) перегляд шкільної аналітики.
 - 5) вимкнути деякі або всі запитання;
 - 6) після закінчення сесії учні не матимуть можливості приєднатися відповісти на запитання;
- переглянути моделювання сесії. (Див. рис. 3.14.-3.16.)

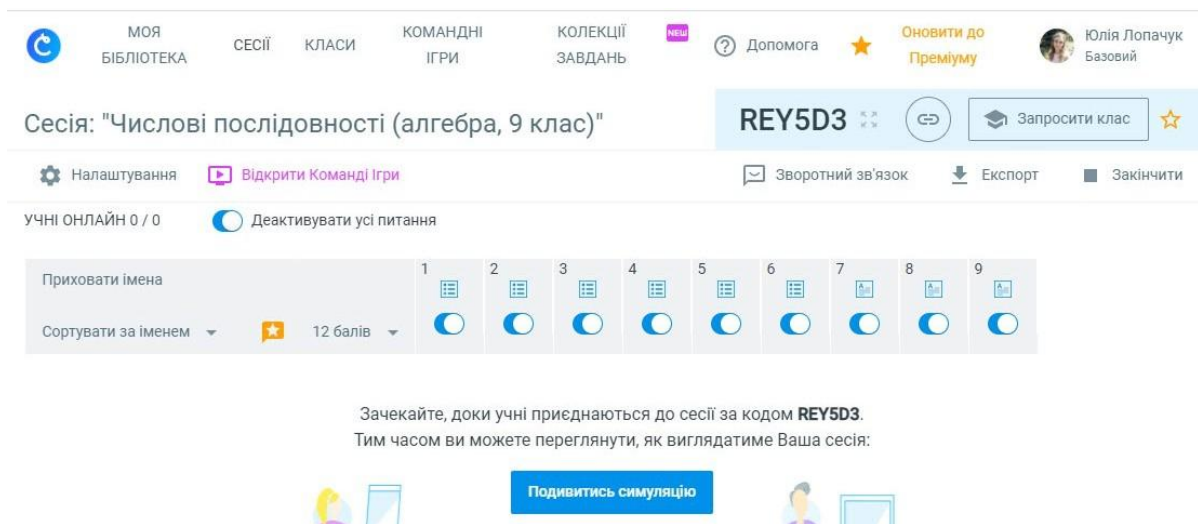


Рис. 3.17. Сесія в кабінеті вчителя

Учні входять за посиланням Classtime або ж вводять код сесії і приступають до виконання завдань (див. рис. 3.15.).

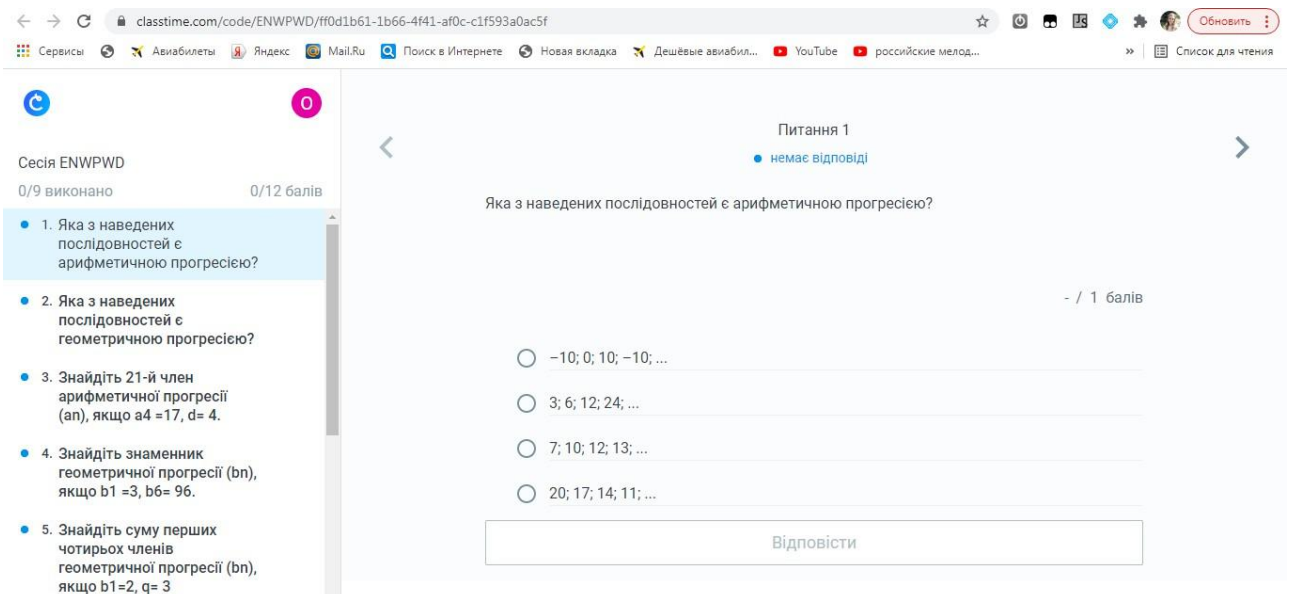


Рис.3.18. Вигляд сесії учня на РС

Після входу кожного учня вчитель має змогу контролювати їх реєстрацію на своєму моніторі (див. рис. 3.16.).

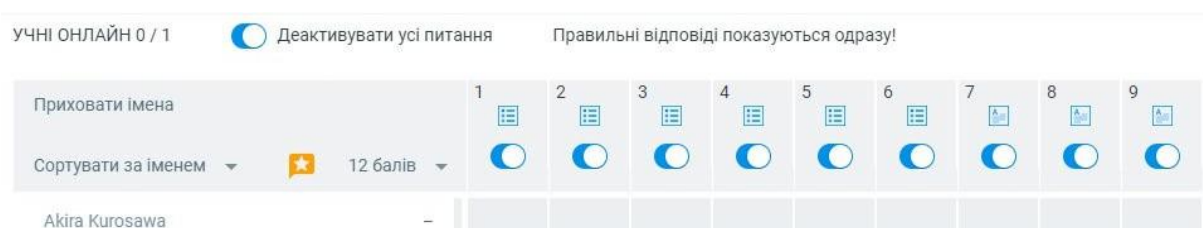


Рис. 3.19. Сесія в кабінеті вчителя. Реєстрація учнів

Під час виконання завдання учитель також у реальному часі може спостерігати за відповідями учнів (див. рис. 3.17.).

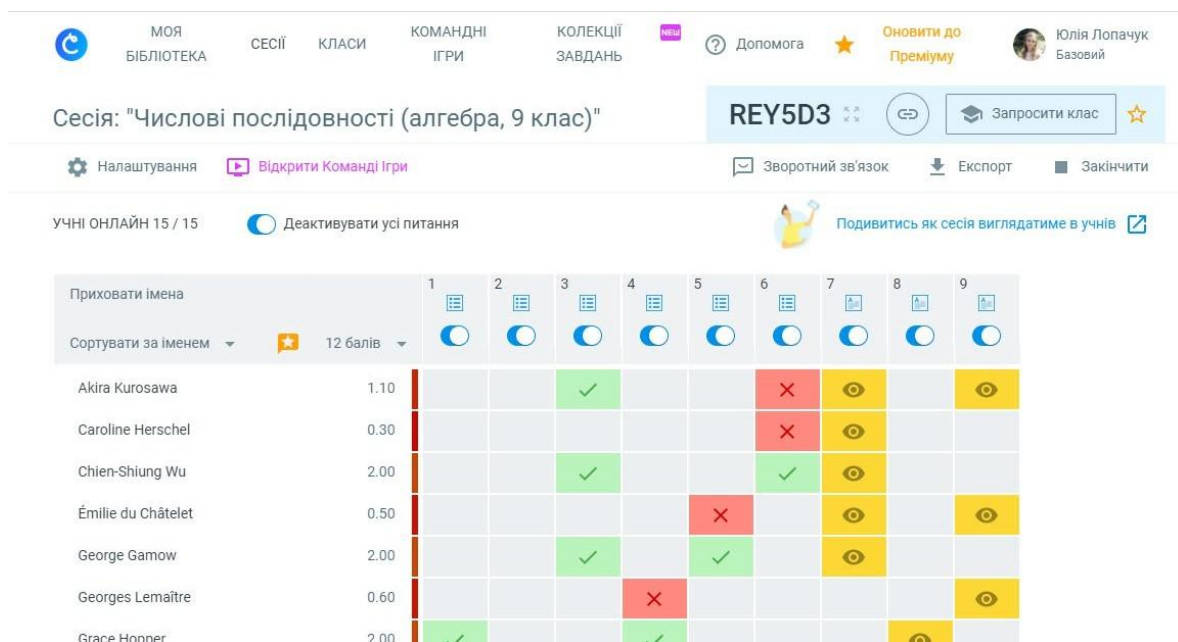


Рис. 3.20. Сесія в кабінеті вчителя. Проходження тестування

Після завершення виконання завдань невизначеними лишаються лише запитання з відкритими відповідями. Вони позначаються жовтою міткою. (див. рис. 3.18).

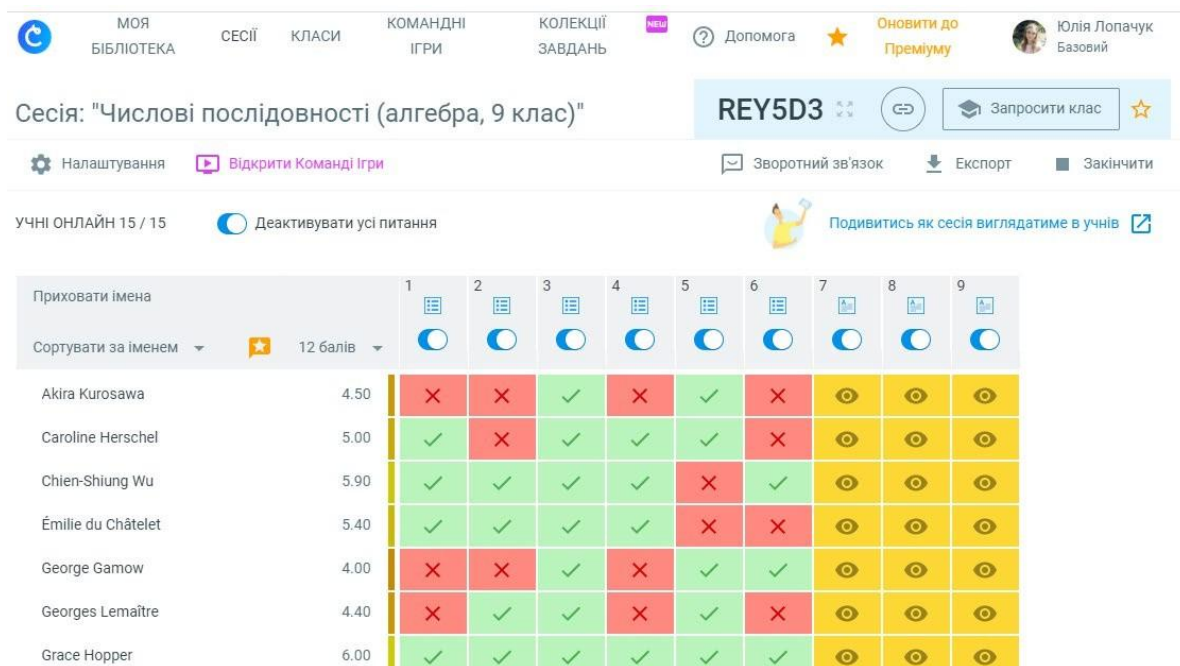


Рис. 3.21. Сесія в кабінеті вчителя. Проміжні результати

Учитель має натиснути на одну з них, щоб побачити всі можливі варіанти

відповіді (див. рис. 3.20. - 3.21.).

Натисніть на кнопки "Правильно" або "Неправильно", щоб оцінити кожну відповідь. X

Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо сума перших п'ятнадцяти членів цієї прогресії дорівнює 375, а різниця прогресії дорівнює 3.

1 відповідь чекає на перевірку Учень: Akira Kurosawa - / 1.5 балів

27 0 / 1.5 балів ✓ X

Відповідь Akira Kurosawa 1 word

Рис. 3.22. Варіанти відповіді на відкрите запитання

Знайдіть перший член арифметичної прогресії, якщо сума перших п'ятнадцяти членів цієї прогресії дорівнює 375, а різниця прогресії дорівнює 3. X

★ Всі відповіді перевірені. 1 відповідь перевірено 🏆 Учень: Akira Kurosawa 0 / 1.5 балів

27 0 / 1.5 балів ✓ X

Відповідь Akira Kurosawa 1 word

Рис. 3.23. Оцінювання відповідей на відкрите запитання

3.4 Практична перевірка результатів дослідження

Аналіз різних видів інформаційних джерел, наукової, навчальної, методичної літератури та Інтернет-ресурсів дав можливість розглянути особливості дидактичного забезпечення при вивченні числових послідовностей, властивості числових послідовностей та їх застосування.

Основні завдання даного дослідження – з'ясувати, як використовувати дидактичне забезпечення при дослідженні даної теми, тобто як створити умови для організації навчально-виховного процесу для підвищення його ефективності, порівняння впливу різних факторів, а також визначати основні закономірності і специфіку протікання педагогічного процесу в конкретних умовах. Основна мета – дослідити рівень знань при розв'язуванні завдань.

Експериментальна перевірка відбулася на базі Безсаливської ЗОШ І-ІІІ ст. з учнями 9 класу, які мають різний рівень навчальних досягнень.

Формування практичних умінь і навичок здійснювалось за допомогою

електронної інформаційно-освітньої системи «МІЙ КЛАС», що дозволяє підбирати різні завдання відповідно до рівня успішності учня, організувати успішне засвоєння теоретичних матеріалів та практичні навички розв'язування задач.

Використання дидактичного забезпечення позитивно впливає на учнів, оскільки дозволяє врахувати особистісні особливості кожної дитини та підібрати матеріали, які відповідають її рівню знань, забезпечуючи при цьому рівень індивідуалізації та диференціації навчального процесу. Учні працюють у зручному для них темпі, вдосконалюють навички саморозвитку та самоосвіти, виховують творчі здібності. І це одне із завдань, яке ставить перед собою сучасна школа – сформувати всебічно розвинену особистість. Тому актуальність цього дослідження не викликає сумнівів.

Висновок до Розділу 3

На основі проведеного дослідження можемо стверджувати:

Дидактичне забезпечення до вивчення властивостей числових послідовностей допомагає учням оволодіти новими і складнішими знаннями, індивідуалізувати процес навчання, розвивати мислення, візуалізацію навчальної інформації, виховати в учнів уміння використовувати прогресії для розв'язування задач, посилювати мотивацію навчання за рахунок використання різних видів діяльності і джерел інформації, формуванню інформаційної компетентності вчителя та учня.

Широке використання мультимедійних технологій підвищує ефективність активних методів навчання для всіх форм організації навчального процесу. Впровадження в навчальний процес платформ для змішаного та онлайн-навчання, заснованих на комп'ютерній підтримці та пізнавальній діяльності, розкриває перспективи гуманізації навчального процесу, розширення та поглиблення бази теоретичних знань і надання результатам навчання практичної значущості.

Дана тема дає широкі можливості для інтелектуального розвитку

особистості, логічного мислення, спостережливості та уяви, пізнавальної та творчої діяльності, розвитку математичних мовленнєвих навичок.

За допомогою дидактичного забезпечення розв'язування задачі на числову послідовність ефективно стимулює творчість і самостійність учнів, формує їх мислення в процесі оволодіння математикою.

В роботі розглянуто використання різних платформ для дистанційного навчання на уроках математики. Також розглядається використання опорних таблиць та мультимедійних презентацій; описується застосування тестів, самостійних та контрольних робіт для перевірки та контролю знань учнів. застосування інформаційних технологій (платформа Classtime, UVScreenCamera, МІЙ КЛАС) дозволяє учням краще засвоїти програмні матеріали за менший час, дає можливість розв'язувати більше вправ, виховувати логічне мислення, звертаючись до таблиць.

Навчальні матеріали цієї роботи спрямовані розвивати мислення та пам'ять учнів, інтелектуальні і пізнавальні здібності школярів, а також переносити отримані знання та вміння в нову ситуацію.

Дану роботу можна використовувати на математичних гуртках та факультативних заняттях. Матеріали даної магістерської роботи служать джерелом додаткової інформації для вчителів загальноосвітньої школи для використання при викладанні математики.

ВИСНОВКИ

У кваліфікаційній роботі досліджувалися методичні особливості вивчення властивостей числових послідовностей та їх застосування у шкільному курсі математики.

Для досягнення мети дослідження нами було опрацьовано наукову, навчальну та методичну літературу, було здійснено аналіз останніх досліджень і публікацій з даної теми. У роботі викладено основні напрацювання наступних дослідників: Г.П. Бевз, З.І. Слєпкань, М.В., Кукуш О. Г., Ушаков Р.П., Карпик В.В., Мордкович А.Г. та інших. З'ясували, що є різні методичні особливості вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики.

Перший розділ присвячений розкриттю змісту основних понять і властивостей числових послідовностей, зокрема арифметичної та геометричної прогресій.

Опрацювавши діючі навчальні програми з математики для учнів 5-11 класів загальноосвітніх навчальних закладів рівнів стандарт, поглиблений та профільний, можна зробити висновок, що арифметична та геометрична прогресії, їх властивості; формули n -го члена; формули суми перших n членів арифметичної та геометричної прогресій є основним змістом навчального матеріалу з теми «Числові послідовності».

Уявлення про границю послідовності і обчислення суми нескінченної геометричної прогресії є пропедевтичною базою для подальшого вивчення курсу математичного аналізу. У десятому класі до змісту навчального матеріалу належать: важливі класи числових послідовностей (монотонні, обмежені тощо); границя числової послідовності; геометрична інтерпретація границі числової послідовності; основні теореми про границі числових послідовностей; число e .

Для аналізу діючих підручників з математики з теми «Числові послідовності» були вибрані лише деякі підручники з алгебри основної школи рекомендовані Міністерством освіти і науки України авторів Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М. С. Якір та О.С. Істер. Можна зробити висновок, що в усіх підручник наводяться коректні означення числових

послідовностей, мають чіткі доведення тверджень, матеріал у достатній кількості продемонстровано прикладами. У всіх підручниках важлива інформація виділена кольором чи шрифтом, що дає змогу сфокусуватися на певній інформації. Також є історичні цікавинки, що дає змогу учню пізнати тему з початку її виникнення. Таким чином весь наведений матеріал дає змогу легко освоїти цю тему учням.

У роботі розглянуто методичні особливості вивчення числових послідовностей у шкільному курсі математики. Зокрема, звернута увагу на очікувані результати навчально-пізнавальної діяльності учнів, описано послідовність і коректність введення понять, властивостей і формул для знаходження шуканих величин. Наведено приклади розв'язання вправ при вивченні числових послідовностей, арифметичної та геометричної прогресій. Не обійшли стороною і методичні вказівки розгляду теми «Числові послідовності» в старшій школі, а саме введення поняття границя числової послідовності, формулювання теорем про арифметичні дії зі збіжними послідовностями та властивості збіжних послідовностей.

У роботі розроблено таблиці, алгоритми та програми з теми дослідження.

Матеріали кваліфікаційної роботи можуть бути використані студентами педагогічних закладів вищої освіти та педагогічними працівниками під час викладання математики у шкільному курсі та для організації роботи математичного гуртка та факультативу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алгебра і початки аналізу. 10 кл. : збірник задач і контрольних робіт / Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Рабінович Ю. М., Якір М. С. Харків: Гімназія, 2024. 256 с.
2. Бас В. М., Бас С. В., Федчунов А. Послідовності в 5-6 класах як засіб розвитку мислення / Бас В. М. // журнал математика в школах України. – 2020. - №13-15. – С. 38-39.
3. Бевз В. Г., Буковська О. І. Математика: у 2 ч. Комплексне видання для підготовки до ЗНО та ДПА. Київ: Видавничий дім «Освіта», 2024. 176 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: навч. посіб. Вид. 3-тє. Київ: Вища школа, 2020. 397 с.
5. Бевз Г. П. Моя методика математики. Харків: «Основа», 2021.
6. Биков В. Ю., Кухаренко В. М. Технологія створення дистанційного курсу. Київ: Міленіум, 2008. 324 с.
7. Бурда М. І., Васильєва Д. В. Особливості навчання математики за новими програмами. *школі. Математика в рідній* 2022. №4 - 5. С. 2-9.
8. Вишенський, В. А., & Ганюшкін, О. Г. *Нескінченні числові послідовності та їхні застосування*. Київ: ВПЦ "Київський університет". (Спеціалізоване видання, присвячене глибшим властивостям послідовностей). 2018. 346 с.
9. Вовковінська Н. В. Інформатизація середньої освіти: програмні засоби, технології, досвід, перспективи. Київ: Педагогічна думка, 2015. 272 с.
10. Воєвода А. Л. Зацікавити математикою: (методичні матеріали для

підвищення інтересу до математики): Методичний посібник. Вид. 2-ге, допов. і перероб. Вінниця: ФОП «Легкун В.М.», 2023. 181с.

11. Гуревич Р. С. Інформаційно-комунікаційні технології в освіті: енциклопедія освіти, акад. пед. наук України. Київ: Юринком Інтер, 2021. 1040 с.
12. Гуревич Р. С., Кадемія М. Ю. Інформаційно-комунікаційні технології в навчальному процесі: посібник для педагогічних працівників і студентів педагогічних вищих навчальних закладів. Вінниця: ДОВ «Вінниця», 2012. 116 с
13. Коваленко, О. С. Адитивні властивості числових послідовностей та їх роль у теорії чисел. *Проблеми сучасної математичної освіти*, 2022 (15), 112–120.
- 14.
15. Іванов, П. В. Дослідження швидкості збіжності деяких рекурентних послідовностей. *Вісник Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Серія: Фізико-математичні науки*, 2020 (2), 45–52.
16. Панченко С. Ю. Методика підготовки та створення відеоуроків із математики. *Математика в школах України*. Київ: Педагогічна преса, 2021. №113-15. С. 37–43.
17. Пехоти О. М. Освітні технології: навч. метод. посіб. Київ: «А.С.К.», 2019. 255 с.
18. Пихтар М. П., Чеберяко К. М. Про деякі нетрадиційні застосування числових послідовностей при розв’язуванні олімпіадних задач у шкільному курсі математики. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2020. №16. С. 35 – 37.
19. Пихтар М. П. Методична система розвитку математичних здібностей

школярів – членів Малої академії наук України: навчально-методичний посібник. Чернігів, 2014. 224 с.

- 20.Плис Т. Значення прикладних задач під час вивчення шкільного курсу алгебри на прикладі тем "Нерівності" та "Прогресії". *Математика в рідній школі*. 2016. № 7/8. С. 26–29.
- 21.Полонський В., Якір М., Мерзляк А. Новий підхід до викладання алгебри та геометрії у 9-му класі (геометрична прогресія). *Газета Математика* К.: Педагогічна преса, 2017. №16 (820). С. 5 – 7
- 22.Руденко Л. В. Знання VS Карантин: Classtime як допомога вчителю математики для дистанційного навчання. *Математика в школах України*. Київ: Педагогічна преса, 2020. №113-15. С. 11–17.
- 23.Світлова Т. В. Організація дистанційного навчання математики. *Математика в школах України*. Київ: Педагогічна преса, 2020. №113-15. С. 4–10.
- 24.Слепкань З. І. Методика навчання математики підручник. Вид.2-ге, допов. і переробл. Київ: Вища шк, 2006. 240 с.
- 25.Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль, 2004. 240 с
- 26.Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль, 2004. 240 с.
- 27.Старова О. О. Готуємося до державної підсумкової атестації. Математика. 9 клас (тестові завдання за темою «Арифметична та геометрична прогресії». *Журнал Математика в школах України*. Київ: Основа, 2016. №12 (492). С. 33 – 34
- 28.Фіцула М. М. Педагогіка: навч. посіб. Вид. 3-тє. Київ: Академвидав, 2009. 559 с.

- 29.Хортон У., Хортон К. Электронное обучение: инструменты и технологии. Пер. с англ. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 2005. 640 с.
- 30.Черкаська Л. П., Москаленко О. А., Коваленко О. В. Тестові завдання як засіб формування в школярів математичної компетентності. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2018. №2. С. 2 –4.
- 31.*Шолом* Г. Оновлення прийомів навчання математики в контексті розвитку навичок критичного мислення. *Математика в рідній школі*. Київ: Педагогічна преса, 2019. № 6 (209). С. 2–3.
- 32.ЗАКОН УКРАЇНИ «Про освіту» (Відомості Верховної Ради, 2024, №38-39, ст. 380). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19> (дата звернення: 01.10.2020).
- 33.Лист МОН України від 10.12.2025 №1/9-173 «Щодо організації освітнього процесу в закладах загальної середньої освіти під час карантину»._URL: https://osvita.ua/legislation/Ser_osv/71997/ (дата звернення: 04.08.2025).
- 34.Міністерство освіти і науки України. Наказ від 10.12.2025р. № 466 *Про затвердження Положення про дистанційне навчання*: URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/z0703-13#Text> (дата звернення: 11.02.2025).
- 35.Наказ МОН України від 16. 03. 2020 № 406 «Про організаційні заходи для запобігання поширенню коронавірусу COVID-19» URL: <https://zakon.rada.gov.ua/rada/show/v0406729-20#Text> (дата звернення: 02.03.2021).
- 36.Нова українська школа. URL: [https:// mon.gov.ua / ua / tag / nova-ukrainska- shkola](https://mon.gov.ua/ua/tag/nova-ukrainska-shkola) (дата звернення: 10.12.2025).
- 37.Тести НМТ/ЗНО з предмета «математика». URL:

<https://zno.osvita.ua/mathematics/> (дата звернення: 10.12.2025)

Додаток А

Основні властивості числових послідовностей

Тип послідовності	Загальний член a_n	Рекурентне співвідношення	Приклад	Властивості (монотонність, обмеженість, збіжність)
Арифметична прогресія	$a_n = a_1 + d(n - 1)$	$a_n = a_{n-1} + d$	3, 5, 7, 9, ... ($a_1 = 3, d = 2$)	Якщо $d > 0$: зростаюча, необмежена, розбіжна.
Геометрична прогресія	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$	$a_n = a_{n-1} \cdot q$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$ $a_1 = 1, q = \frac{1}{2}$	*Якщо q
Послідовність Фібоначчі	Не має простої формули	$F_n = F_{n-1} + F_{n-2},$ $F_1 = 1, F_2 = 1$	1, 1, 2, 3, 5, 8, ...	Зростаюча (для $n \geq 2$), необмежена, розбіжна.
Гармонійна послідовність	$a_n = \frac{1}{n}$	$a_n = \frac{1}{n}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$	Монотонно спадна, обмежена (зверху 1, знизу 0), збіжна до 0.
Степенева послідовність	$a_n = n^p,$ де $p \in \mathbb{R}$		1, 4, 9, 16, ... (для $p = 2$)	Якщо $p > 0$, Зростаюча, необмежена, розбіжна.

				Якщо $p < 0$: монотонно спадна, обмежена, збіжна до 0.
Послідовність, що збігається до e	$a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$		2, 2.25, 2.37, ...	Зростаюча, обмежена, Збіжна до e (≈ 2.718)
Знакозмінна послідовність	$a_n = (-1)^n$	$a_n = -a_{n-1}$	-1, 1, -1, 1, ...	Немонотонна, обмежена, (між -1 і 1), розбіжна (має дві часткові границі -1 і 1).

Додаток Б

Алгоритм перевірки збіжності числової послідовності a_n

Пояснення Алгоритму

1. Початок та Перевірка Границі (Крок 1):

Перший і найпростіший крок — спроба обчислити явну границю L послідовності: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$

Якщо L існує і є скінченним числом ($L \in \mathbb{R}$), послідовність збіжна до L .

Якщо L не існує (наприклад, $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n$ або $L = -\infty$), переходимо до складніших перевірок.

1. Перевірка Необхідної Умови Збіжності (Крок 2 - для рядів):

Хоча цей критерій більше стосується рядів, він часто використовується для послідовностей, пов'язаних з рядами. Якщо $L \neq 0$, то ряд, утворений цією послідовністю, **розбіжний**. Для самої послідовності це менш актуально, але є гарним фільтром.

1. Критерій Вейєрштрасса (Монотонність та Обмеженість) (Крок 3):

Це потужний теоретичний критерій, який часто застосовується, коли прямий розрахунок границі важкий.

Перевірка Монотонності: Послідовність a зростає ($a_{n+1} \geq a_n$) або спадає

$$(a_{n+1} \leq a_n).$$

Перевірка Обмеженості: Послідовність обмежена знизу або зверху.

Якщо послідовність монотонна й обмежена, то вона збіжна (хоча конкретне значення границі невідоме).

2. Критерій Коші (Фундаментальна умова) (Крок 4):

Цей критерій застосовується, коли всі інші методи зазнали невдачі або коли потрібно суто теоретичне доведення.

Формулювання: Послідовність a_n є збіжною тоді і тільки тоді, коли вона є фундаментальною (послідовністю Коші).

Тобто, для будь-якого $\epsilon > 0$ існує такий номер N , що для всіх $n > N$ і $m > N$ виконується нерівність:

$$|a_n - a_m| < \epsilon$$

Якщо умова Коші виконується, послідовність збіжна.

Якщо не виконується, вона розбіжна.

Додаток В

Програми, що демонструють практичну реалізацію

1. Дослідження фундаментальних властивостей

Назва програми	Мова програмування	Функціональність
Перевірка збіжності	Python (або MATLAB)	Код для обчислення перших N членів послідовності та оцінки її границі. Включає перевірку критерію Коші (обчислення модуля різниці δ)
Генерація спеціальних границь	Python	Обчислення послідовності для числа Ейлера e (послідовність $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$) та візуалізація її збіжності до e .
Перевірка монотонності	Python	Функція, яка приймає формулу послідовності та перевіряє, чи є вона зростаючою, спадною, або не монотонною.

2. Реалізація рекурентних послідовностей

Назва програми	Мова програмування	Функціональність

Генератор Фібоначчі	Python, C++	Рекурсивна та ітеративна функції для обчислення n-го числа Фібоначчі ($F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$).
Формула Біне	Python	Обчислення n-го числа Фібоначчі за аналітичною формулою з використанням золотого перетину ϕ .
Узагальнена рекурентна послідовність	Python	Код для знаходження n-го члена лінійної рекурентної послідовності за допомогою коренів характеристичного рівняння.

3. Застосування в обчислювальній математиці (Ітераційні методи):

Назва програми	Мова програмування	Функціональність
Метод Ньютона (дотичних)	Python	Ітераційна послідовність $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ для знаходження кореня заданої функції. Код має включати

		перевірку швидкості збіжності.
Метод простих ітерацій	Python	Реалізація послідовності $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ та перевірка умови збіжності (стискаюче відображення).
Обчислення або π або $\sqrt{2}$	Python	Програма, що демонструє збіжність послідовності (наприклад, метод Герона для квадратного кореня або послідовності, пов'язані з рядами) для обчислення відомих ірраціональних констант.