

Міністерство освіти і науки України  
Державний заклад  
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій

Кафедра математики та інформатики

**Сокор Тетяна Павлівна**

ПРЯМА І ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМИ ВІСТА ДЛЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ  
РІВНЯНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ

**кваліфікаційна робота**

**здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня**

**освітньої програми «Математика»**

**за спеціальністю 014.04. Середня освіта (Математика)**

Особистий підпис –



Сокор Т.П.

Науковий керівник – \_\_\_\_\_

**Мурзіна Олена Анатоліївна** - доцент  
кафедри математики та інформатики,  
кандидат педагогічних наук

Завідувач кафедри – \_\_\_\_\_

В.о. завідувача кафедри –  
**Козуб Юрій Гордійович**,  
доктор технічних наук, професор.

Лубни 2026

## АНОТАЦІЯ

**Сокор Т. П.**

**Тема:** Пряма і обернена теореми Вієта для алгебраїчних рівнянь та їх застосування.

**Спеціальність:** 014.04 «Середня освіта (Математика)».

**Установа:** ДЗ «Луганський національний університет імені Тараса Шевченка», 2026 р.

**Магістерська робота містить:** 147 с., 4 рис., 42 джерела.

**Об'єктом дослідження** є процес вивчення алгебраїчних рівнянь у шкільному курсі математики.

**Предметом дослідження** є пряма і обернена теореми Вієта, їх узагальнення та застосування до розв'язування алгебраїчних задач.

**Мета роботи** полягає в розробці методики вивчення теми «Пряма і обернена теореми Вієта для алгебраїчних рівнянь», що передбачає дослідження теоретичних засад цих теорем і особливостей їх використання у процесі навчання алгебри в закладах загальної середньої освіти.

### **Результати роботи.**

У роботі досліджено історичні та теоретичні передумови виникнення теорем Вієта, розкрито їх математичний зміст для рівнянь другого та вищих степенів і проаналізовано можливості застосування під час розв'язування алгебраїчних задач різного рівня складності. Розглянуто загальні аспекти методики вивчення теорем Вієта у шкільному курсі математики, визначено їх місце та значення у формуванні алгебраїчного мислення учнів. Розроблено систему вправ, методичні рекомендації та

запропоновано використання інформаційно-комунікаційних технологій, зокрема середовища GeoGebra, для візуалізації зв'язку між коефіцієнтами рівнянь і їх коренями. Ефективність запропонованої методики підтверджено результатами педагогічного експерименту.

**Ключові слова:** ТЕОРЕМА ВІСТА, АЛГЕБРАЇЧНІ РІВНЯННЯ, КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ, СИМЕТРИЧНІ МНОГОЧЛЕНИ, ЗАДАЧІ З ПАРАМЕТРАМИ, МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ, GEOGEBRA.

## ANNOTATION

**Sokor Tetiana**

**Theme:** Direct and Inverse Vieta's Theorems for Algebraic Equations and Their Applications.

**Speciality:** 014.04 "Secondary Education (Mathematics)".

**Institution:** Luhansk Taras Shevchenko National University (LTSNU), 2026 year.

**Master's work of:** 147 p., 4 fig., 42 sources.

**Object of research** – the process of studying algebraic equations in the school mathematics course.

**Subject of research** – direct and inverse Vieta's theorems, their generalizations and application to solving algebraic problems.

**Purpose of work** – to develop a methodology for studying the topic "Direct and Inverse Vieta's Theorems for Algebraic Equations", which includes investigating the theoretical foundations of these theorems and the features of their application in teaching algebra in general secondary education institutions.

**Results of work.**

The paper examines the historical and theoretical prerequisites for the emergence of Vieta's theorems, reveals their mathematical content for equations of the second and higher degrees, and analyzes the possibilities of their application in solving algebraic problems of various levels of complexity. General aspects of the methodology for studying Vieta's theorems in the school mathematics course are considered, and their place and significance in the formation of students' algebraic thinking are determined. A system of exercises and methodological recommendations is developed, and the use of information and communication technologies, in particular the GeoGebra environment, is proposed to visualize the relationship between equation coefficients and roots. The effectiveness of the proposed methodology is confirmed by the results of a pedagogical experiment.

**Keywords:** VIETA'S THEOREM, ALGEBRAIC EQUATIONS, QUADRATIC EQUATIONS, SYMMETRIC POLYNOMIALS, PARAMETER PROBLEMS, MATHEMATICS TEACHING METHODOLOGY, GEOGEBRA.

## ЗМІСТ

ВСТУП	7
РОЗДІЛ 1. ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ ВИНИКНЕННЯ ТА РОЗВИТКУ ТЕОРЕМ ВІЄТА	13
1.1. Витоки алгебраїчних рівнянь у стародавніх цивілізаціях	13
1.2. Франсуа Вієт і формування символічної алгебри. Зміст теорем Вієта	15
1.3. Розвиток ідей Вієта у подальшій математиці	22
Висновки до розділу 1	25
РОЗДІЛ 2. ПРЯМА І ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМИ ВІЄТА ДЛЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ	27
2.1. Алгебраїчні рівняння та зв'язок коефіцієнтів із коренями	27
2.2. Прямі й обернені теореми Вієта для квадратного рівняння	29
2.3. Узагальнені формули Вієта для рівнянь вищих степенів	35
2.4. Теоретичне та практичне значення теорем Вієта	38
Висновки до розділу 2	41
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ВІЄТА ТА МЕТОДИКА ЇХ ВИВЧЕННЯ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ	44
3.1. Роль і місце теорем Вієта в курсі алгебри	44
3.2. Основні напрями застосування та типи задач.	47
3.3. Методичні аспекти вивчення теорем Вієта у шкільному курсі математики.	64

3.4. Типові труднощі учнів застосування та типи задач та шляхи їх подолання.	71
Висновки до розділу 3	108
ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ	109
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	111
ДОДАТКИ	

## ВСТУП

Алгебра як одна з найдавніших галузей математики посідає центральне місце у формуванні логічного та аналітичного мислення. Вивчення алгебраїчних рівнянь є не лише важливим елементом математичної освіти, а й основою для розуміння законів функціональної залежності та структури многочленів. Одним із найважливіших результатів у цій галузі є теореми Вієта, які встановлюють безпосередній зв'язок між коефіцієнтами алгебраїчного рівняння та його коренями.

Франсуа Вієт (François Viète, 1540–1603) вважається одним із засновників сучасної алгебри. Саме він уперше ввів символічні позначення для коефіцієнтів і невідомих, що стало переломним моментом у розвитку математичної символіки [5, с. 42; 32]. Його підхід дозволив виражати загальні співвідношення між коренями та коефіцієнтами рівнянь, що нині відомі як формули Вієта [39].

**Актуальність теми** зумовлена тим, що теореми Вієта мають універсальний характер і знаходять застосування в різних галузях математики — від елементарної алгебри до теорії многочленів, чисельних методів і навіть аналітичної геометрії [33; 23]. Крім того, у сучасній шкільній практиці спостерігається потреба в оновленні методики викладання теми, що включає не лише механічне використання формул, а й глибше розуміння їх змісту та логіки виведення [14, с. 123; 2, с. 23].

Вивчення прямої та оберненої теорем Вієта створює умови для розвитку аналітичного мислення учнів, формування навичок

математичного моделювання, а також застосування узагальнених алгебраїчних підходів до розв'язування задач із параметрами [13, с. 17; 7, с. 35].

Таким чином, дослідження цієї теми має як теоретичне, так і практичне значення для сучасної математичної науки та освіти.

**Мета дослідження** — комплексне вивчення прямих і обернених теорем Вієта для алгебраїчних рівнянь різних степенів, аналіз їх історичного розвитку, математичного змісту та педагогічних аспектів застосування у шкільному курсі алгебри.

Для досягнення мети поставлено такі **завдання**:

- Проаналізувати історичні передумови виникнення теорем Вієта та їхній внесок у розвиток алгебри [30; 40].
- Розглянути математичні доведення прямої та оберненої теорем Вієта для рівнянь другого і вищих степенів [33].
- Визначити можливості застосування цих теорем при розв'язуванні алгебраїчних задач різного рівня складності [16; 6, с. 35].
- Узагальнити методику викладання теми у середній школі та запропонувати систему вправ, що сприяють розвитку логічного мислення [2, с. 24; 9, с. 42].
- Розробити методичні рекомендації для використання ІКТ при вивченні формул Вієта [10, с. 59].

**Об'єкт дослідження**: алгебраїчні рівняння та їхні властивості.



**Предмет дослідження:** пряма і обернена теореми Вієта, їх узагальнення на рівняння вищих степенів і застосування у математичній та педагогічній практиці.

**Методи дослідження :**

- аналітичний метод — аналіз математичних джерел, підручників та історико-наукових матеріалів [30];
- історико-математичний метод — дослідження становлення алгебраїчної символіки від Вієта до сучасності [37];
- системно-порівняльний метод — порівняння різних підходів до формулювання теорем і доведень;
- педагогічний аналіз — дослідження методичних прийомів викладання теми у шкільній практиці [14, с. 130];
- моделювання — розробка прикладів і системи завдань для формування компетентностей учнів.

**Наукова новизна одержаних результатів:**

- Уточнено та узагальнено формулювання прямої та оберненої теорем Вієта для алгебраїчних рівнянь  $n$ -го степеня.
- Систематизовано методи застосування теорем Вієта при розв'язуванні рівнянь із параметрами.
- Запропоновано модель методичного підходу до вивчення теми в закладах загальної середньої освіти з використанням інформаційно-комунікаційних технологій [10, с. 60].
- Визначено дидактичні умови ефективного формування аналітичного мислення учнів при роботі з формулами Вієта.

**Практичне значення роботи.** Результати дослідження можуть бути використані:

- у курсі алгебри 8–11 класів під час вивчення теми «Квадратне рівняння»;
- у математичних гуртках та факультативах для розвитку логічного мислення;
- у підготовці до олімпіад і ЗНО, де часто зустрічаються задачі на застосування формул Вієта [2, с. 25];
- при розробці навчально-методичних посібників і рекомендацій для вчителів;
- у цифрових освітніх середовищах (GeoGebra, Desmos) для візуалізації зв'язків між коефіцієнтами та коренями [26].
- становлять праці Ф. Вієта [5; 39], дослідження з історії математики (М. Клайн [30], Дж. Стиллвелл [37]), матеріали з теорії рівнянь і многочленів [31; 33; 23] та праці з методики навчання математики [14; 2; 9].

Практична частина базується на аналізі підручників з алгебри (Г. Бевз [1], А. Мерзляк [11], О. Істер [17]) та результатах педагогічних спостережень у закладах загальної середньої освіти.

### **Апробація результатів дослідження**

Апробація результатів магістерського дослідження здійснювалася у процесі педагогічної діяльності в **Святилівській гімназії Градизької селищної ради Кременчуцького району Полтавської області**. У ході апробації було впроваджено розроблені методичні матеріали та систему вправ із використанням прямих і обернених теорем Вієта під час

вивчення теми «Квадратні рівняння» в курсі алгебри основної та старшої школи.

Під час навчальних занять застосовувалися різні форми роботи: фронтальна, індивідуальна та групова, а також елементи проблемного навчання й використання інформаційно-комунікаційних технологій (зокрема, динамічні математичні середовища). Результати спостережень засвідчили підвищення рівня розуміння учнями зв'язку між коефіцієнтами рівняння та його коренями, зростання інтересу до алгебраїчних задач і формування навичок логічного міркування.

Окремі положення та методичні підходи дослідження узгоджуються з *результатами підвищення кваліфікації автора, підтвердженими відповідними сертифікатами*, зокрема:

- сертифікатом про успішне завершення семінару-тренінгу «Нова українська школа: перехід на наступний рівень» (45 годин / 1,5 кредити ЄКТС, Полтавська академія неперервної освіти ім. М. В. Остроградського);
- сертифікатом про проходження тренінгу з математики (онлайн) обсягом 15 годин (0,5 кредити ЄКТС);
- сертифікатом про участь у вебінарі «Сучасні підходи до формування математичної компетентності учнів у контексті STEM-освіти» (10 годин / 0,33 кредити ЄКТС).

Здобуті під час підвищення кваліфікації компетентності сприяли впровадженню інноваційних методів навчання, компетентнісного

підходу та сучасних освітніх технологій у процесі апробації результатів магістерської роботи.

### **Структура магістерської роботи**

Магістерська робота складається зі **вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків.**

У **вступі** обґрунтовано актуальність теми дослідження, визначено мету, завдання, об'єкт і предмет дослідження, методи наукового пізнання, наукову новизну та практичне значення отриманих результатів.

**Перший розділ** присвячено історико-теоретичному аналізу становлення теорем Вієта, їх місця в розвитку алгебри та еволюції алгебраїчної символіки від праць Ф. Вієта до сучасних узагальнень.

У **другому розділі** розглянуто математичний зміст прямих і обернених теорем Вієта для рівнянь другого та вищих степенів, наведено доведення, приклади застосування та аналіз задач із параметрами.

**Третій розділ** має методичну спрямованість і висвітлює особливості викладання теми у закладах загальної середньої освіти, містить розроблену систему вправ, методичні рекомендації та приклади використання інформаційно-комунікаційних технологій у навчальному процесі.

У **висновках** узагальнено результати дослідження та окреслено перспективи подальшого вивчення проблеми.

## РОЗДІЛ 1. ІСТОРИЧНІ АСПЕКТИ ВИНИКНЕННЯ ТА РОЗВИТКУ ТЕОРЕМ ВІЄТА

### 1.1. Витоки алгебраїчних рівнянь у стародавніх цивілізаціях

Поняття рівняння та операцій з невідомими величинами бере свій початок ще у глибоку давнину. Уже за три тисячі років до нашої ери давньоєгипетські жерці розв'язували задачі, що фактично відповідали рівнянням першого степеня. У знаменитому папірусі Рінда (приблизно XVII ст. до н.е.) наведено приклади арифметичних задач, у яких невідому величину позначали словом аху («купа»), а розв'язання виконували шляхом послідовних підстановок [30]. Таким чином, хоча символічної форми рівнянь ще не існувало, сам принцип знаходження невідомого через відомі дані вже був сформований.

У вавилонській математиці (II тис. до н.е.) зустрічаються глиняні таблиці з прикладами розв'язування задач типу, що фактично є квадратними рівняннями з додатними коефіцієнтами. Вавилоняни застосовували геометричний підхід, еквівалентний сучасному методу додавання квадрата до обох частин рівняння для добування коренів [30]. Отже, навіть без символічної нотації вони володіли певним аналогом алгебраїчного методу.

Ці знання були переосмислені й розвинені в математиці Стародавньої Греції, особливо у працях Евкліда, Діофанта та Герона Александрійського.

Діофант Александрійський (III ст. н.е.) у своїй знаменитій праці «Арифметика» зробив першу спробу систематизувати рівняння з невідомими, використовуючи спеціальні знаки для позначення

невідомої величини. Саме тому його вважають одним із засновників алгебраїчного символізму [40]. У грецькій традиції рівняння трактувалися геометрично, але вже простежувалася тенденція до абстрагування від конкретних вимірювань.

У староіндійській математичній школі Брахмагупта (VII ст.) сформулював правила для операцій з від'ємними числами та нулем, а також дав загальну формулу для розв'язування квадратного рівняння, яка майже ідентична сучасній [37]. Його послідовник Бхаскара II (XII ст.) розвинув ці ідеї, зробивши перші спроби розв'язувати рівняння третього та четвертого степенів, що свідчить про суттєве просування до поняття многочлена.

Значний внесок у розвиток алгебри зробили також арабські математики. Найвідомішим серед них є Мухаммад ібн Муса аль-Хорезмі, автор трактату «Аль-джабр валь-мукабала» (IX ст.), який вважається основоположником класичної алгебри [40]. Саме від назви його праці походить сучасне слово «алгебра».

Аль-Хорезмі описав систематичні методи розв'язування рівнянь першого та другого степенів і дав геометричне обґрунтування формул для квадратних рівнянь, створивши основу для подальшого символічного узагальнення.

Таким чином, на етапі стародавніх цивілізацій — від єгипетської та вавилонської до індійсько-арабської — відбувся поступовий перехід від конкретних числових та геометричних методів до абстрактного мислення, що підготувало ґрунт для появи справжньої символічної алгебри в добу Відродження.

## **1.2. Франсуа Вієт і формування символічної алгебри. Зміст теорем Вієта**

Середньовіччя стало періодом активного обміну науковими знаннями між Сходом і Заходом. Після перекладу арабських математичних трактатів латинською мовою (переважно у XII–XIII ст.) почалося поступове засвоєння й осмислення ідей аль-Хорезмі, Омара Хайяма, Бхаскари II та інших східних учених. Саме тоді в європейських університетах з'явилися перші курси «ars numerandi» — мистецтва обчислення, де увага приділялася і розв'язуванню алгебраїчних задач [30].

Починаючи з XV століття, у Європі формується новий етап розвитку математики, який історики науки називають передсимволічним періодом. Хоча алгебра ще залишалася риторичною, тобто всі операції й рівняння записувалися словами, саме тоді закладалися методи, що вимагали більш узагальненого способу запису [30].

Особливо вагомим став внесок італійської школи алгебри. Упродовж першої половини XVI ст. її представники — Сципіон дель Ферро, Нікколо Тарталья, Джироламо Кардано та Лодовіко Феррарі — розв'язали проблему, над якою працювало кілька поколінь математиків, а саме: знаходження загальних формул для кубічних і біквадратних рівнянь [30].

Ці результати стали проривом не лише в алгебрі, а й у розвитку аналітичного мислення загалом.

Праця Джироламо Кардано «Ars Magna» («Велике мистецтво», 1545) [30] узагальнила всі відомі на той час методи і вперше систематично представила способи розв'язування кубічних рівнянь. Сам Кардано визнавав, що частину ідей отримав від Тартальї, однак саме він увів їх у науковий обіг, поєднавши аналітичні міркування з геометричними інтерпретаціями.

Його учень Лодовіко Феррарі запропонував формули для розв'язування рівнянь четвертого степеня, заклавши основу майбутніх спроб узагальнення на випадок довільного степеня.

Цей період можна охарактеризувати як перехід від риторичної алгебри до синтетичної, або алгебри скорочених записів.

Математики поступово відходили від повних словесних описів і починали використовувати окремі символи для позначення дій і невідомих величин. З'являються перші умовні позначення: крапка або лінія для множення, окремі літери для невідомих, позначення степенів числа через повторення слова *sensus* (квадрат) або *cubus* (куб) [37].

Однак загальної системи символів, що дозволяла б працювати з будь-якими рівняннями незалежно від їхнього змісту, ще не існувало.

Важливою передумовою становлення нової мови алгебри стало прагнення математиків Ренесансу до універсальності та абстракції. Від конкретних числових задач на спадок і відсотки, характерних для комерційної математики середньовічних міст, вони переходили до розгляду рівнянь як об'єктів, що підлягають загальним законам. Завдяки розвитку друкарства й поширенню наукових трактатів (зокрема праць Кардано, Тартальї та Регіомонтана), ідеї алгебраїчного аналізу охопили всю Європу — від Італії до Франції, Німеччини й Англії [32].



Потреба у новій, узагальненій символічній мові стала очевидною. Вона мала забезпечити єдність запису, незалежність від мови й скорочення тексту при описі операцій. Саме цю задачу блискуче розв'язав Франсуа Вієт (François Viète, 1540–1603), якого недарма називають батьком сучасної алгебри [32]. Його праці відкрили нову епоху в історії математики — епоху аналітичної або символічної алгебри, де невідомі, коефіцієнти й параметри отримали універсальні позначення, а рівняння стали предметом загальних аналітичних законів.

Отже, еволюція алгебри від античної та арабської риторики до європейського символізму XVI століття демонструє закономірний розвиток від конкретного до абстрактного мислення. Італійські математики підготували ґрунт для формування аналітичного методу, а відкриття Кардано і Феррарі створили передумови для появи універсальної системи позначень, яку пізніше реалізував Франсуа Вієт.

### **Життя і наукова діяльність Франсуа Вієта**

Франсуа Вієт (François Viète, 1540–1603) народився у французькому місті Фонтене-ле-Конт у сім'ї нотаріуса. За освітою він був юристом і певний час працював адвокатом та радником у парламенті міста Пуатьє. Однак глибокий інтерес до точних наук, зокрема до геометрії та арифметики, з юних років визначив головний напрям його інтелектуальних пошуків [32].

Упродовж життя Вієт поєднував державну службу з науковими дослідженнями. Як радник при дворі короля Генріха IV, він користувався великою повагою за свій аналітичний розум і неодноразово застосовував математичні знання на практиці.

Найвідомішим випадком стало розшифрування секретних іспанських дипломатичних шифрів під час військових кампаній, що принесло йому славу «першого криптографа Франції» [32]. Цей епізод свідчить про глибину його аналітичного мислення, здатність до систематизації та абстрагування — якостей, що згодом проявилися в його математичних працях.

Основна наукова спадщина Вієта охоплює кілька праць, серед яких найвідомішою є «*In artem analyticem isagoge*» («Вступ до аналітичного мистецтва», 1591 р.) [39]. Саме в ній учений запропонував систему буквеної символіки, яка започаткувала епоху символічної (аналітичної) алгебри. У його позначеннях невідомі величини позначалися голосними літерами (A, E, I, O, U), а відомі — приголосними. Такий підхід дозволив уперше відокремити структуру рівняння від конкретних числових значень і зробив можливим розгляд загальних залежностей між змінними.

Ідея Вієта полягала в тому, що алгебра є універсальним аналітичним мистецтвом, яке дозволяє «через відомі величини виводити невідомі». На відміну від своїх попередників, які ще мислили в межах геометричних образів або конкретних чисел, він побачив у рівняннях загальні закономірності, незалежні від числових прикладів [5, с. 42]. Таким чином, Вієт перетворив алгебру з прикладної дисципліни на самостійну аналітичну науку.

У тій же праці Вієт сформулював закон залежності між коренями і коефіцієнтами квадратного рівняння, який нині відомий як теорема Вієта. Вона стала першим чітким прикладом вираження аналітичного зв'язку між структурою многочлена та його коренями.

Символічна мова Вієта дала змогу узагальнити поняття рівняння і створила підґрунтя для подальшого розвитку теорії многочленів, теорії рівнянь та алгебраїчного аналізу [30].

На думку дослідників, «саме Вієт звільнив математику від геометричних обмежень античності, відкривши шлях до сучасного аналітичного методу» [32]. Його система символів, термінологія та метод аналітичного виводу стали зразком для таких учених, як Рене Декарт, Ісаак Ньютон і Готфрід Лейбніц.

Таким чином, Франсуа Вієт виступив переломним діячем у розвитку математичної думки. Він створив мову символічної алгебри, яка зробила можливим перехід від конкретних обчислень до загальних аналітичних міркувань.

Його праці не лише започаткували нову епоху в історії математики, а й визначили напрям подальшого розвитку алгебри, аналітичної геометрії та всієї європейської науки Нового часу.

### **Зміст і значення теорем Вієта**

Формули (теореми) Вієта встановлюють строгий зв'язок між коефіцієнтами алгебраїчного рівняння та його коренями. Їхня цінність полягає в тому, що вони дозволяють знаходити важливі характеристики коренів **без прямого обчислення** самих коренів. Уперше ці співвідношення були системно подані Франсуа Вієтом у праці «*In artem analyticem isagoge*» (1591), і відтоді вони стали одним із фундаментальних результатів елементарної алгебри [5, с. 115].

### **Розглянемо квадратне рівняння**

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$$

і нехай  $x_1$  та  $x_2$  — його корені. Тоді виконуються співвідношення:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Ці рівності й називають **формулами Вієта** для квадратного рівняння. Вони показують, що за коефіцієнтами рівняння можна відразу отримати **суму** та **добуток** коренів, а в зворотному напрямі — скласти рівняння із наперед заданими коренями або заданими властивостями коренів. Саме тому формули Вієта особливо зручні в задачах із параметрами й у тих ситуаціях, де важливі не конкретні значення коренів, а їхня сума, добуток, знак або співвідношення між ними.

Ідеї Вієта фактично змінюють підхід до розв’язування: вони переводять задачу від “пошуку коренів” до аналізу внутрішніх зв’язків між величинами. Як підкреслював сам Вієт, «у кожному рівнянні існує гармонія між величинами, яку можна описати аналітичними символами» [5, с. 115]. У цьому висловлюванні відчутна його головна ідея: структура рівняння не випадкова — вона відображає закономірні співвідношення між відомим і невідомим.

Подальший розвиток цих ідей привів до узагальнення формул Вієта на многочлени вищих степенів. Для кубічного рівняння

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0,$$

з коренями  $x_1, x_2, x_3$  маємо:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

У загальному випадку для многочлена степеня  $n$

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0, a_n \neq 0,$$

із коренями  $x_1, x_2, \dots, x_n$  формули Вієта стверджують, що  
**елементарні симетричні суми** коренів виражаються через коефіцієнти:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n},$$

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n},$$

$$\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} \dots x_{i_k} = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n},$$

$$x_1x_2 \dots x_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

Отже, коефіцієнти многочлена є (з точністю до знаків)  
елементарними симетричними функціями його коренів. Саме це робить  
формули Вієта універсальним інструментом: вони дозволяють

досліджувати властивості коренів і будувати рівняння з потрібними характеристиками без зайвих обчислень.

Ці співвідношення стали важливою основою для розвитку теорії симетричних функцій, яку згодом розвинули, зокрема, Ісаак Ньютон і Жозеф Лагранж [23]. Зокрема, формули Ньютона, що пов'язують степеневі суми коренів з елементарними симетричними сумами, можна розглядати як подальший розвиток ідей, закладених формулами Вієта.

### **Значення теорем (формул) Вієта є багатограним:**

- теоретичне — вони встановлюють фундаментальний зв'язок між алгебраїчною структурою рівняння та його коренями;
- практичне — дозволяють розв'язувати широкий клас задач без явного знаходження коренів, зокрема задачі на складання рівнянь, оцінювання коренів, задачі з параметрами;
- методичне — сприяють розвитку аналітичного мислення учнів, уміння узагальнювати та працювати зі структурою математичного об'єкта, а не лише з обчисленнями.

Формули Вієта стали одним із перших системних результатів, що пов'язали коефіцієнти рівнянь із властивостями їхніх коренів. Вони поєднали числову конкретику з аналітичною загальністю та відкрили шлях до подальшого розвитку теорії многочленів і симетричних функцій, а також до поглиблення методів розв'язування алгебраїчних рівнянь. У цьому полягає їхнє історичне й наукове значення [5, с. 115; 23].

### **1.3. Розвиток ідей Вієта у подальшій математиці**

Ідеї Франсуа Вієта мали глибокий і тривалий вплив на подальший розвиток світової математики. Вони заклали основи нового способу мислення — аналітичного методу, у якому символічна мова стала головним інструментом наукового пізнання. Завдяки введеній Вієтом системи позначень алгебра вперше перетворилася на універсальну мову, здатну описувати будь-які закономірності у вигляді рівнянь [30].

Першим, хто розвинув ці ідеї, став Рене Декарт (1596–1650). У своїй праці «La Géométrie» (1637 р.) він спирався на символіку Вієта й створив координатну (аналітичну) геометрію, що об'єднала алгебру та геометрію в єдину систему [30]. Декарт запровадив сучасний запис рівнянь ліній і кривих на координатній площині, тим самим показавши, що будь-яке геометричне місце точок можна описати алгебраїчним рівнянням. Цей крок став справжньою революцією, адже він перетворив геометрію з візуальної науки на алгебраїчну, де кожна форма має символічний аналог.

Подальший розвиток ідей Вієта пов'язаний з іменами Ісаака Ньютона та Жозефа Луї Лагранжа. Ньютон розробив формули для елементарних симетричних функцій коренів многочленів, що стали відомими як формули Ньютона, і тим самим продовжив логіку Вієта у вигляді узагальнених співвідношень між степеневими сумами коренів і коефіцієнтами рівняння [23]. Лагранж, у свою чергу, створив аналітичну теорію рівнянь, у якій ключовим елементом стала ідея дослідження перестановок коренів — фактично зародок майбутньої теорії груп.

У XIX столітті розвиток цих ідей привів до справжнього перевороту в алгебрі. Нільс Генрік Абель (1802–1829) та Еваріст Галуа

(1811–1832) довели, що загальне рівняння  $p$ 'ятого степеня не розв'язується в радикалах. Галуа показав, що структура можливих розв'язків рівняння визначається властивостями груп перестановок його коренів. При цьому саме формули Вієта, які виражають симетричні комбінації коренів через коефіцієнти, стали відправною точкою для побудови цієї теорії [36]. Так виникла теорія Галуа — одна з найглибших ідей сучасної математики, що об'єднала алгебру, теорію чисел і геометрію.

Ідеї Вієта також вплинули на розвиток чисельних методів. Символічні залежності між коефіцієнтами та коренями стали основою для побудови ітераційних алгоритмів наближеного розв'язування рівнянь, які згодом застосовувалися в роботах Ньютона, Коші, Лагерра та інших учених XIX–XX століть.

Таким чином, ідеї Вієта стали ключовими для становлення всієї сучасної алгебри та аналітичної математики. Недарма відомий історик науки Фелікс Клейн підкреслював: «Без символічної мови Вієта неможливо уявити ні Декарта, ні Ньютона, ні сучасну алгебру взагалі» [30].

Франсуа Вієт започаткував новий тип математичного мислення, у якому головним інструментом стала символічна мова. Його ідеї не лише започаткували розвиток аналітичної геометрії та теорії рівнянь, а й вплинули на становлення всієї алгебраїчної традиції XIX–XX століть. Через праці Декарта, Ньютона, Лагранжа, Абеля та Галуа вчення Вієта перетворилося на універсальний аналітичний метод — основу сучасної математичної науки.



## Висновки до розділу 1

У першому розділі здійснено історико-математичний аналіз витоків алгебраїчних рівнянь і простежено еволюцію підходів до роботи з невідомими величинами — від практичних обчислювальних прийомів стародавніх цивілізацій до становлення символічної алгебри Нового часу. Показано, що вже в давньоєгипетській традиції (папірус Рінда) сформувався сам принцип знаходження невідомого за допомогою послідовних перетворень і підстановок, хоча ще без універсального запису рівнянь [30]. У вавилонській математиці відображено перші алгоритмічні процедури розв’язування задач, еквівалентних квадратним рівнянням, з опорою на геометричні міркування, що фактично передбачали ідею «доповнення до квадрата» [30]. Відтак зроблено висновок, що поняття рівняння історично виникло не як абстракція, а як відповідь на прикладні потреби — вимірювання, поділи, обчислення площ і об’ємів, розрахунки в господарстві та торгівлі.

З’ясовано, що подальше поглиблення алгебраїчних уявлень відбувалося через поступове узагальнення прийомів і розширення числового апарату. У грецькій математиці, зокрема в працях Діофанта, простежується перехід від суто геометричних трактувань до елементів символізму (позначення невідомих, скорочений запис дій), що стало важливим кроком до алгебраїчного стилю мислення [40]. В індійській школі (Брахмагупта, Бхаскара II) підкреслено роль введення правил для від’ємних чисел і нуля, а також наближення до сучасного вигляду формули розв’язування квадратного рівняння [37]. В арабській традиції (аль-Хорезмі) показано становлення системного підходу до класифікації та розв’язування рівнянь першого і другого степенів, а також

закріплення алгебри як окремої галузі знань, що підготувало методичну основу для її подальшого розвитку в Європі [40].

Доведено, що ключовим історичним рубежем стало формування в Європі XVI століття потреби в універсальній мові алгебри. Розглянуто передумови цього процесу: розвиток друкарства, активне поширення перекладів наукових трактатів, успіхи італійської школи в розв'язуванні кубічних і біквадратних рівнянь (Кардано, Феррарі), а також поступовий відхід від риторичного опису до скорочених записів і перших умовних позначень [30; 37]. Саме на цьому ґрунті стало можливим виникнення символічної алгебри як системи, що дозволяє працювати не з окремими задачами, а з класами рівнянь і загальними закономірностями.

Таким чином, у розділі 1 показано закономірний історичний шлях алгебри: від емпіричних способів знаходження невідомого — до формування символічної мови, яка зробила можливими загальні теореми й універсальні методи. Роль Франсуа Вієта визначено як системоутворюючу: він заклав підвалини символічної алгебри та сформулював співвідношення, що стали фундаментом подальшого розвитку теорії рівнянь і важливим інструментом математичної освіти [30; 37; 40].

## РОЗДІЛ 2. ПРЯМА І ОБЕРНЕНА ТЕОРЕМИ ВІЄТА ДЛЯ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

### 2.1. Алгебраїчні рівняння та зв'язок коефіцієнтів із коренями

У загальному вигляді алгебраїчне рівняння степеня  $n$  записується так:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0.$$

Тут коефіцієнти  $a_0, a_1, \dots, a_n$  є відомими числами, які можуть належати до множини дійсних або комплексних чисел, а невідоме  $x$  — змінна, для якої шукають усі значення, що задовольняють рівняння. Такі значення називають коренями рівняння або його розв'язками. Якщо для деякого числа  $x = x_0$  виконується рівність

$$a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \dots + a_1 x_0 + a_0 = 0,$$

то  $x_0$  є коренем даного рівняння.

Величини  $a_0, a_1, \dots, a_n$  називаються коефіцієнтами рівняння, а вираз

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

— алгебраїчним многочленом (поліномом) степеня  $n$ . Старший коефіцієнт  $a_n$  визначає основні властивості многочлена, зокрема його поведінку при великих значеннях  $|x|$  і характер графіка у випадку дійсних коефіцієнтів.

Загальна теорія алгебраїчних рівнянь спирається на фундаментальні твердження. Основна теорема алгебри (К. Ф. Гаус, 1799) стверджує, що кожне алгебраїчне рівняння степеня  $n$  із комплексними коефіцієнтами має рівно  $n$  комплексних коренів з

урахуванням кратності. Важливим є також подання многочлена через його корені. Якщо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — корені рівняння  $P(x) = 0$ , тоді многочлен можна подати у вигляді добутку лінійних множників:

$$P(x) = a_n(x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_n).$$

Саме це подання лежить в основі співвідношень між коефіцієнтами многочлена та його коренями.

Окремої уваги потребує поняття кратності кореня. Якщо деякий корінь  $x = x_0$  повторюється  $k$  разів, тобто

$$P(x) = a_n(x - x_0)^k Q(x), Q(x_0) \neq 0,$$

то кажуть, що корінь  $x_0$  має кратність  $k$ . Кратні корені є важливими під час дослідження властивостей многочлена та аналізу поведінки функції, зокрема в задачах, де потрібно оцінити характер коренів або особливості графіка.

В аналізі рівнянь значне місце займають симетричні функції коренів, оскільки вони дозволяють виражати комбінації на кшталт  $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ ,  $\sum_{i < j} x_i x_j$  або  $x_1 x_2 \cdots x_n$  через коефіцієнти многочлена. Саме цей зв'язок становить сутність теорем Вієта, які встановлюють аналітичну залежність між коефіцієнтами рівняння та його коренями. Як зазначено в [23; 33], формули Вієта стали основою для подальшого розвитку теорії симетричних функцій і важливим кроком у становленні аналітичної теорії рівнянь.

Для практичного застосування рівнянь часто використовують зведену форму, коли старший коефіцієнт дорівнює одиниці. Для цього рівняння ділять на  $a_n$ , отримуючи

$$x^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} x^{n-1} + \dots + \frac{a_1}{a_n} x + \frac{a_0}{a_n} = 0.$$

У такій формі співвідношення між коренями й коефіцієнтами записуються простіше, оскільки всі залежності виражаються через відносні коефіцієнти  $\frac{a_{n-1}}{a_n}, \dots, \frac{a_0}{a_n}$ .

Отже, алгебраїчні рівняння є центральним об'єктом алгебри, оскільки поєднують числові, аналітичні та симетричні властивості. Розуміння структури рівняння, поняття кореня, факторизації та кратності є необхідною основою для доведення й застосування теорем Вієта, які логічно продовжують ці загальні положення.

## **2.2. Прямі й обернені теореми Вієта для квадратного рівняння**

Нехай задано квадратне рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0,$$

і його корені дорівнюють  $x_1$  та  $x_2$ . Прямі теорема Вієта встановлює зв'язок між коефіцієнтами рівняння та сумою і добутком його коренів:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Доведення цих співвідношень можна отримати безпосередньо з формули коренів квадратного рівняння:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Складаючи корені, маємо

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

Перемножуючи корені, одержуємо

$$\begin{aligned} x_1 x_2 &= \frac{(-b + \sqrt{b^2 - 4ac})(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} \\ &= \frac{c}{a}. \end{aligned}$$

Отже, формули Вієта для квадратного рівняння доведено.

Історично це твердження пов'язують із працями Франсуа Вієта, який у 1591 році у праці «*In artem analyticem isagoge*» систематизував символічний підхід до роботи з рівняннями. Формули Вієта стали одним із перших чітких прикладів того, як властивості коренів можна описувати через коефіцієнти рівняння, тобто аналізувати розв'язки, не знаходячи їх явно [5, с. 114–115]. Завдяки цьому алгебра отримала універсальний інструмент для дослідження рівнянь і побудови нових рівнянь із заданими характеристиками.

Формули Вієта мають також наочний геометричний зміст. Якщо розглянути функцію

$$y = ax^2 + bx + c,$$

то корені рівняння відповідають абсцисам точок перетину параболи з віссю  $Ox$ . Відомо, що абсциса вершини параболи дорівнює

$$x_v = -\frac{b}{2a}.$$

З формули Вієта випливає, що

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2},$$

тобто вершина параболи розташована посередині між коренями (якщо вони дійсні). Добуток коренів  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$  відображає зв'язок між вільним членом і старшим коефіцієнтом, що також впливає на розміщення графіка відносно осей координат. Таким чином, зв'язок “коефіцієнти  $\leftrightarrow$  корені” має не лише аналітичний, а й геометрично зрозумілий зміст.

Обернена теорема Вієта формулюється як твердження про побудову рівняння за відомими характеристиками його коренів. Якщо два числа  $x_1$  та  $x_2$  задовольняють систему

$$x_1 + x_2 = S, x_1 x_2 = P,$$

то вони є коренями квадратного рівняння

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Доведення випливає з факторизації: якщо  $x_1$  і  $x_2$  — корені, тоді

$$(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = x^2 - Sx + P.$$

Отже, знаючи суму й добуток коренів, можна відновити відповідне рівняння без використання дискримінанта.

Розглянемо короткі приклади застосування. Якщо потрібно скласти квадратне рівняння з коренями 2 і 5, то  $S = 2 + 5 = 7$ ,  $P = 2 \cdot 5 = 10$ , отже рівняння має вигляд

$$x^2 - 7x + 10 = 0.$$

Якщо дано рівняння  $3x^2 - 6x - 9 = 0$ , то за формулами Вієта сума коренів дорівнює

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{-6}{3} = 2,$$

а добуток коренів дорівнює

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-9}{3} = -3.$$

Таким чином, навіть не знаходячи коренів, можна швидко отримати їхні ключові характеристики.

Підсумуємо, пряма й обернена теореми Вієта є базовими інструментами алгебри, які поєднують структуру квадратного рівняння з властивостями його коренів. Вони лежать в основі раціональних прийомів розв'язування задач, зокрема задач із параметрами, задач на побудову рівнянь за заданими умовами та задач на аналіз суми й добутку коренів. Саме з цих тверджень починається систематичне вивчення зв'язку між коефіцієнтами та коренями многочленів.

### **Обернена теорема Вієта**

Обернена теорема Вієта описує зворотний зв'язок між коефіцієнтами квадратного рівняння та його коренями й фактично



дозволяє “побудувати” рівняння, якщо відомі певні характеристики коренів. Нехай два числа  $x_1$  і  $x_2$  задовольняють систему

$$x_1 + x_2 = S, x_1 x_2 = P.$$

Тоді ці числа є коренями квадратного рівняння

$$x^2 - Sx + P = 0.$$

Доведення ґрунтується на факторизації. Якщо  $x_1$  і  $x_2$  — корені деякого квадратного рівняння, то відповідний многочлен розкладається на множники:

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Розкриваючи дужки, одержуємо

$$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2 = 0.$$

Позначивши  $S = x_1 + x_2$  та  $P = x_1 x_2$ , маємо рівняння

$$x^2 - Sx + P = 0,$$

тобто числа  $x_1$  і  $x_2$  справді є його коренями.

Обернена теорема Вієта є логічним продовженням прямої теореми, однак має самостійне практичне значення. Вона дає можливість будувати рівняння за заданими властивостями коренів без складних перетворень і без обов’язкового використання дискримінанта. У задачах це часто працює як “інструмент синтезу”: від умови про корені — до рівняння, з яким уже зручно виконувати аналіз, перетворення або дослідження параметрів. У методичному плані ця теорема важлива тим, що формує в учнів уміння мислити не лише від рівняння до коренів, а й навпаки — від заданих властивостей результату до побудови математичної моделі.

Розглянемо кілька типових прикладів. Якщо сума коренів дорівнює 6, а добуток — 8, то  $S = 6$ ,  $P = 8$ , отже шукане рівняння:

$$x^2 - 6x + 8 = 0.$$

Його корені можна знайти будь-яким способом, зокрема факторизацією:

$$x^2 - 6x + 8 = (x - 2)(x - 4) = 0,$$

тому  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 4$ .

Нехай один корінь на 3 більший за інший, а добуток коренів дорівнює 10. Позначимо менший корінь через  $t$ , тоді другий дорівнює  $t + 3$ , а з умови маємо

$$t(t + 3) = 10 \Rightarrow t^2 + 3t - 10 = 0.$$

Звідси

$$t = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 40}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2},$$

тобто  $t = 2$  або  $t = -5$ . Отже, пари коренів:  $(2, 5)$  або  $(-5, -2)$ .

Відповідні рівняння можна записати за теоремою Вієта: у першому випадку  $S = 7$ ,  $P = 10$ , тому

$$x^2 - 7x + 10 = 0,$$

у другому випадку  $S = -7$ ,  $P = 10$ , тому

$$x^2 + 7x + 10 = 0.$$

Приклад із параметром показує, що обернена теорема Вієта зручна не лише для побудови рівнянь, а й для аналізу умов існування

коренів. Якщо сума коренів дорівнює  $a$ , а добуток —  $a - 1$ , то рівняння має вигляд

$$x^2 - ax + (a - 1) = 0.$$

Для існування дійсних коренів необхідно, щоб дискримінант був невід'ємним:

$$D = a^2 - 4(a - 1) = a^2 - 4a + 4 = (a - 2)^2 \geq 0.$$

Отже, для будь-якого дійсного  $a$  рівняння має дійсні корені (при  $a = 2$  — кратний корінь). Таким чином, обернена теорема допомагає не тільки скласти рівняння, а й одразу побачити залежність його властивостей від параметра.

Обернена теорема Вієта встановлює зворотний зв'язок між коефіцієнтами та коренями квадратного рівняння і доповнює пряму теорему до логічно завершеної системи. Вона має важливе практичне значення в задачах на побудову рівнянь, у перетвореннях і в дослідженні параметричних залежностей. У навчанні її цінність полягає в тому, що вона розвиває аналітичне мислення та вміння переходити від умов про корені до математичної моделі рівняння.

### 2.3. Узагальнені формули Вієта для рівнянь вищих степенів

Ідеї Франсуа Вієта щодо залежності між коефіцієнтами рівняння та його коренями не обмежуються лише квадратними рівняннями. Вони природно узагальнюються на рівняння будь-якого степеня, що стало важливим кроком у розвитку теорії многочленів і симетричних функцій. Нехай дано алгебраїчне рівняння степеня  $n$ :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0, a_n \neq 0,$$

і його корені дорівнюють  $x_1, x_2, \dots, x_n$  (з урахуванням кратності). Тоді формули Вієта встановлюють співвідношення між коефіцієнтами многочлена та елементарними симетричними сумами коренів:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_n &= -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j &= \frac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} &= (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}, \\ x_1 x_2 \dots x_n &= (-1)^n \frac{a_0}{a_n}. \end{aligned}$$

Зміст цих формул полягає в тому, що кожен коефіцієнт многочлена (з точністю до знаку) відповідає певній елементарній симетричній функції коренів, помноженій на старший коефіцієнт  $a_n$ .

Обґрунтування формул впливає з факторизації многочлена. Якщо  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — корені рівняння, то

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n).$$

Розкриваючи дужки, отримуємо многочлен, у якому коефіцієнти при степенях  $x^{n-1}, x^{n-2}, \dots, x^0$  виражаються через суми попарних добутоків, потрійних добутоків і т. д. коренів. Порівняння коефіцієнтів при однакових степенях  $x$  дає наведені співвідношення. У такому вигляді формули Вієта фактично вбудовуються в загальну теорію симетричних функцій, яку розвивали І. Ньютон і Ж. Лагранж [23].

Щоб побачити, як ці співвідношення працюють на практиці, розглянемо типові застосування. Нехай задано кубічне рівняння

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

з коренями  $x_1, x_2, x_3$ . Тоді за формулами Вієта маємо:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = q, x_1x_2x_3 = -r.$$

Зокрема, якщо потрібно знайти суму всіх попарних добутків коренів, достатньо взяти коефіцієнт при  $x$  (з урахуванням знаку та нормування).

Як приклад задачі на побудову рівняння розглянемо ситуацію, коли корені утворюють геометричну прогресію. Нехай корені  $x_1, x_2, x_3$  мають вигляд

$$x_1 = a, x_2 = aq, x_3 = aq^2.$$

Тоді сума коренів дорівнює

$$S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = a(1 + q + q^2),$$

сума попарних добутків дорівнює

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = a^2(q + q^2 + q^3) = a^2q(1 + q + q^2),$$

а добуток коренів дорівнює

$$S_3 = x_1x_2x_3 = a^3q^3.$$

Отже, відповідне кубічне рівняння можна записати як

$$x^3 - S_1x^2 + S_2x - S_3 = 0,$$

тобто

$$x^3 - a(1 + q + q^2)x^2 + a^2q(1 + q + q^2)x - a^3q^3 = 0.$$

Цей приклад демонструє зручність обернених міркувань: від відомих закономірностей коренів — до рівняння.

У задачах із параметром формули Вієта також дають змогу робити висновки про корені без їх явного знаходження. Наприклад, якщо відомо, що для кубічного рівняння  $x_1 + x_2 + x_3 = S$  та  $x_1 x_2 x_3 = P$ , то зручно одразу виражати потрібні симетричні суми через коефіцієнти, а потім досліджувати, як вони змінюються при зміні параметра. Такий підхід особливо корисний тоді, коли завдання вимагає не самих коренів, а їхніх властивостей (знак, порівняння, оцінка, існування певного типу коренів).

Подальший розвиток ідей Вієта пов'язують із формулами Ньютона, які дають змогу виражати степеневі суми коренів  $x_1^k + x_2^k + \dots + x_n^k$  через коефіцієнти многочлена та елементарні симетричні функції. У ширшому контексті ці результати стали важливою частиною аналітичної теорії рівнянь і підготували ґрунт для більш глибоких підходів, зокрема для ідей, що пізніше розвинулися у теорії Галуа.

**Висновок.** Узагальнені формули Вієта для рівнянь будь-якого степеня розкривають закономірний зв'язок між коефіцієнтами многочлена та симетричними комбінаціями його коренів. Вони мають не лише теоретичне значення для теорії многочленів і симетричних функцій, а й практичну цінність у задачах на побудову рівнянь, аналіз коренів і дослідження параметрів.

## 2.4. Теоретичне та практичне значення теорем Вієта

Формули Вієта посідають особливе місце в сучасній алгебрі, оскільки встановлюють безпосередній і чіткий зв'язок між

коефіцієнтами алгебраїчного рівняння та його коренями. У цьому полягає їхня головна ідея: властивості розв’язків можна аналізувати через структуру многочлена, не переходячи щоразу до обчислення самих коренів. Фактично, теореми Вієта дозволяють “читати” інформацію про корені з рівняння, а інколи — і навпаки, від заданих властивостей коренів переходити до побудови відповідного рівняння. Саме тому формули Вієта є важливим інструментом як для теоретичного аналізу рівнянь, так і для практичного розв’язування задач.

У теоретичному аспекті формули Вієта є фундаментом теорії симетричних функцій і теорії многочленів. Вони дозволяють описувати корені через симетричні комбінації — суми, попарні добутки, добуток усіх коренів тощо — і тим самим пояснюють внутрішню “узгодженість” структури рівняння. Власне, співвідношення Вієта демонструють, що коефіцієнти многочлена не є випадковими числами: вони відображають певні закономірності, пов’язані з коренями, та виступають їхнім алгебраїчним “відбитком”. У ширшому контексті це є підставою для аналізу рівнянь як об’єктів, де значущими є не лише окремі розв’язки, а й симетричні властивості всієї системи коренів. Саме через це стає можливим побудова узагальнених моделей і дослідження рівнянь із параметрами, коли важливо встановити, як зміна коефіцієнтів впливає на поведінку коренів (наприклад, на їхню кількість, знак, взаємне розташування).

Крім того, формули Вієта логічно пов’язані з подальшими узагальненнями у теорії рівнянь. Зокрема, вони лежать в основі ідей, які приводять до формул Ньютона (зв’язку степеневих сум коренів із

коефіцієнтами многочлена), а в більш глибокому рівні — до підходів, що згодом були систематизовані у теорії Галуа. Хоча ці напрями виходять за межі елементарної алгебри, саме теореми Вієта дають перший місток до розуміння того, як через коефіцієнти можна описувати структуру коренів і закономірності їхніх комбінацій.

У практичному аспекті формули Вієта цінні тим, що дозволяють швидко знаходити суму й добуток коренів та оцінювати їхні властивості без прямого розв'язання рівняння. Це особливо корисно в задачах, де немає потреби знати точні значення коренів, але потрібно встановити певні характеристики: знак коренів, співвідношення між ними, можливість існування додатних чи від'ємних коренів, або ж зробити висновок про взаємне розташування коренів. Крім того, формули Вієта дають змогу будувати рівняння за заданими характеристиками розв'язків, що є типовим типом задач у шкільній та олімпіадній практиці. Вони суттєво спрощують роботу із завданнями з параметрами та з перетвореннями алгебраїчних виразів, де стандартний шлях через дискримінант чи формули коренів робить розв'язання громіздким або нераціональним [16; 6, с. 36].

Важливо також, що формули Вієта підсилюють культуру математичного міркування. У багатьох задачах вони спонукають не “рахувати”, а аналізувати: шукати закономірність, використовувати структуру рівняння, зіставляти дані умови із симетричними характеристиками коренів. Це робить їх не лише засобом обчислення, а й інструментом логічного контролю: можна перевіряти правильність отриманих коренів через їхню суму і добуток, швидко встановлювати



помилки в перетвореннях, порівнювати кілька можливих варіантів розв'язків.

Окрім суто математичної цінності, теореми Вієта мають помітне педагогічне значення. Робота з ними формує алгебраїчне мислення як уміння узагальнювати, оперувати символами та бачити закономірності в будові виразів. Учні вчаться не лише “використовувати формулу”, а й аналізувати рівняння як об'єкт із внутрішніми зв'язками, розуміти, які елементи рівняння відповідають певним характеристикам коренів, і чому ці співвідношення є сталими. Це сприяє розвитку логічного мислення, уважності до структури многочлена та розуміння причинно-наслідкових залежностей у математиці, зокрема в задачах на доведення, дослідження та моделювання [2, с. 23–24].

Таким чином, теореми Вієта поєднують наукову універсальність із методичною доцільністю. Вони одночасно є фундаментальним результатом теорії многочленів і зручним практичним інструментом для розв'язування широкого кола задач. Саме завдяки такому поєднанню формули Вієта можна вважати одним із найефективніших засобів розвитку математичної культури та аналітичного стилю мислення в алгебрі.

## **Висновки до розділу 2**

У другому розділі розглянуто теоретичні засади формул Вієта як системи співвідношень, що пов'язують коефіцієнти алгебраїчних рівнянь із симетричними комбінаціями їх коренів. Показано, що пряма теорема Вієта встановлює однозначний і зручний для практики зв'язок між коефіцієнтами квадратного рівняння та сумою і добутком його

коренів, а обернена теорема, у свою чергу, дозволяє відновлювати рівняння за заданими значеннями цих характеристик. Такий “двосторонній” підхід (від коефіцієнтів до коренів і від властивостей коренів до рівняння) демонструє логічну завершеність теорем Вієта і пояснює їх особливу роль у курсі алгебри.

У процесі викладу обґрунтовано, що формули Вієта не обмежуються випадком квадратного рівняння: вони узагальнюються на многочлени будь-якого степеня та фактично відображають загальну закономірність, відповідно до якої коефіцієнти многочлена (з точністю до знаків і нормування) відповідають елементарним симетричним функціям його коренів. Саме ця ідея є фундаментальною для теорії многочленів, оскільки дозволяє описувати властивості коренів через структуру рівняння й переходити від конкретних обчислень до аналітичного дослідження рівнянь. Таким чином, у розділі підкреслено зв’язок формул Вієта з ширшим математичним контекстом — теорією симетричних функцій і подальшими узагальненнями в теорії рівнянь.

Встановлено, що практичне значення теорем Вієта полягає в їх здатності суттєво спрощувати розв’язування задач. Використання цих співвідношень дає можливість уникати громіздких обчислень, швидко знаходити суми й добутки коренів, виконувати перетворення без явного знаходження розв’язків, а також ефективно працювати із задачами на побудову рівняння та задачами з параметрами. Особливо важливо, що в багатьох ситуаціях формули Вієта дозволяють перейти до раціональних міркувань і структурного аналізу, коли результат залежить не від точних значень коренів, а від їхніх співвідношень.

Окремо підкреслено методичний потенціал теми: формули Вієта в навчальному процесі виступають дієвим дидактичним інструментом, який розвиває логічне мислення, уміння узагальнювати та встановлювати залежності між абстрактними об'єктами. Вони формують у здобувачів освіти навички “алгебраїчного бачення” — уміння аналізувати рівняння через його будову, пояснювати зв'язок між параметрами та результатом і обирати раціональні способи розв'язання.

Отже, у другому розділі систематизовано формулювання, доведення, узагальнення та основні напрямки застосування прямих і обернених теорем Вієта. Показано, що ці співвідношення становлять важливий елемент аналітичної теорії рівнянь і водночас мають значний прикладний і педагогічний потенціал. Отримані результати створюють теоретичну основу для подальшого розгляду задач на застосування формул Вієта та для розробки методичних підходів до їх вивчення, що стане змістом наступного розділу роботи.

## РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРЕМ ВІЄТА ТА МЕТОДИКА ЇХ ВИВЧЕННЯ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

### 3.1. Роль і місце теорем Вієта в курсі алгебри

Формули (теореми) Вієта належать до ключових елементів курсу алгебри як у середній, так і у вищій школі, оскільки поєднують теоретичне розуміння рівнянь із практичними прийомами їх дослідження. Вони демонструють важливу ідею алгебри: між “зовнішньою” формою рівняння (його коефіцієнтами) та “внутрішньою” характеристикою (коренями) існує закономірний зв’язок. Саме завдяки цій ідеї учні та студенти можуть переходити від механічного знаходження коренів до осмисленого аналізу властивостей розв’язків, працюючи із сумами, добутками, знаками коренів та їх співвідношеннями.

На відміну від стандартної технології розв’язування квадратних рівнянь через дискримінант, застосування теорем Вієта зорієнтоване не на обчислювальний результат, а на аналітичне мислення та структурне бачення. Дискримінант, безперечно, є універсальним способом знайти корені, однак у багатьох задачах він приводить до громіздких обчислень і не підкреслює внутрішньої логіки рівняння. Формули Вієта, навпаки, дозволяють одразу отримати ключові характеристики коренів, виконати перевірку правильності відповіді, скласти рівняння за заданими умовами або зробити висновок про корені без їх явного знаходження. Таким чином, вони виступають своєрідною “альтернативною мовою” опису рівняння, у якій головними є зв’язки, а не обчислення.

У шкільному курсі математики теореми Вієта вперше вивчаються у 8–9 класах у темі «Квадратні рівняння» та виконують важливу функцію узагальнення. Учні переходять від розв’язування окремого рівняння до розуміння того, що будь-яке квадратне рівняння має структурно однакові характеристики: суму та добуток коренів, які визначаються коефіцієнтами. На цьому етапі головне методичне завдання полягає в тому, щоб навчити учнів “бачити” рівняння як систему залежностей: визначати суму і добуток коренів за коефіцієнтами, складати рівняння за умовами про корені, перевіряти знайдені корені через співвідношення Вієта та свідомо обирати раціональний спосіб розв’язання.

Як зазначає Г. П. Бевз, «формули Вієта — це не просто арифметичний прийом, а модель узагальнення від конкретного рівняння до класу рівнянь із подібною структурою» [2, с. 21]. У цьому твердженні підкреслюється важливий дидактичний ефект: формули Вієта допомагають сформувати в учнів уміння мислити узагальнено, працювати зі змінними та залежностями, а не лише підставляти числа в готові формули.

Методична роль теорем Вієта особливо помітна в задачах підвищеної складності: у задачах на складання рівнянь, у задачах з параметрами, у задачах на порівняння коренів або на побудову виразів через корені. У таких випадках формули Вієта часто стають найбільш “економним” інструментом, адже дозволяють перетворювати умову задачі в систему симетричних співвідношень та уникати зайвих обчислень. У шкільній дидактиці це важливо ще й тому, що підводить учнів до усвідомлення різниці між обчислювальними та аналітичними

методами: не завжди найкращий шлях — це той, що дає відповідь через прямі обчислення.

На університетському рівні вивчення теорем Вієта набуває глибшого змісту й системності. Тут вони розглядаються як окремий випадок загальної теорії симетричних функцій коренів многочленів і входять до змісту курсів «Вища алгебра», «Теорія рівнянь», «Алгебраїчні структури» тощо. Студенти працюють з узагальненими формулами Вієта для рівнянь будь-якого степеня, розглядають зв'язки з формулами Ньютона, а також знайомляться з ідеями, які лежать в основі теорії Галуа, де симетрія коренів має вирішальне значення [14, с. 128; 9, с. 42]. У такому контексті формули Вієта перестають бути лише “технікою для квадратних рівнянь” і перетворюються на інструмент доказів та узагальнень.

Важливо також, що теореми Вієта мають міжпредметні зв'язки та застосування у суміжних математичних дисциплінах. В аналітичній геометрії вони допомагають встановлювати зв'язок між параметрами кривої та точками перетину з осями, у математичному аналізі — використовуються при дослідженні поліномів, у чисельних методах — у побудові наближених схем і оцінках, а в задачах прикладного характеру — у моделюванні залежностей, коли відомі певні характеристики “виходу”, але потрібно відновити “модель” рівняння.

Таким чином, теореми Вієта мають системоутворююче значення для навчання алгебри. У школі вони виступають містком від числових прийомів до символічної алгебри та формують культуру аналітичного мислення. У закладах вищої освіти вони розкриваються як частина загальної теорії многочленів і симетричних функцій, забезпечуючи

фундамент для подальших курсів і більш складних теоретичних побудов. У підсумку використання теорем Вієта у навчанні сприяє підвищенню рівня математичної культури, розвитку логіки, узагальнення та дослідницьких умінь.

### 3.2. Основні напрями застосування та типи задач

Теореми Вієта належать до тих результатів елементарної алгебри, які мають широкий спектр застосувань як у навчальній, так і в науково-практичній діяльності. Їхня цінність полягає в тому, що вони задають універсальний “місток” між двома описами рівняння: через коефіцієнти та через корені. Завдяки цьому формули Вієта використовуються не лише для розв’язування квадратних рівнянь, а й для аналітичного дослідження рівнянь, побудови математичних моделей, перетворення виразів та обґрунтування висновків про корені без прямого обчислення. У навчальній практиці це особливо важливо, бо дає змогу змістити акцент із техніки підрахунків на розуміння структури рівняння і логіку міркувань.

У шкільній та університетській практиці напрями застосування теорем Вієта можна узагальнити як систему типових задач, у яких від учня або студента вимагається не просто знайти корені, а встановити певні співвідношення між ними, відновити рівняння за даними про корені або провести дослідження залежностей. Найпоширенішим напрямом є побудова рівняння за заданими властивостями коренів. Якщо відомі сума і добуток коренів, то рівняння відновлюється майже без обчислень: за умов  $x_1 + x_2 = S$  і  $x_1 x_2 = P$  шукане квадратне рівняння має вигляд  $x^2 - Sx + P = 0$ . У складніших варіантах цієї групи задач можуть задаватися не сума й добуток напряму, а похідні

характеристики: різниця коренів, відношення коренів, обернені величини, умова на розташування коренів або на їхню залежність від параметра. Такі завдання фактично формують уміння “перекладати” словесну умову на мову симетричних сум, що є одним із важливих проявів математичного моделювання [16; 13, с. 17].

Другий важливий напрям — перетворення виразів і рівнянь без знаходження коренів. У багатьох задачах корені є проміжними об’єктами, а метою є обчислити або спростити вираз, що містить  $x_1$  і  $x_2$ , наприклад  $x_1^2 + x_2^2$ ,  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ ,  $x_1^3 + x_2^3$ ,  $x_1 x_2 (x_1 + x_2)$  тощо. У таких випадках формули Вієта дозволяють замінити роботу з коренями роботою з коефіцієнтами. Наприклад, якщо  $x_1 + x_2 = S$  і  $x_1 x_2 = P$ , то  $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P$ , а  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P}$  (за умови  $P \neq 0$ ). Саме цей тип задач добре демонструє аналітичну перевагу Вієта: замість громіздких формул коренів використовується коротка симетрична логіка.

Окремий великий клас становлять задачі з параметрами. Коли коефіцієнти рівняння залежать від параметра, пряме знаходження коренів часто не є найкращим шляхом, оскільки приводить до складних виразів і не дає “загального” розуміння ситуації. Теорема Вієта дають змогу сформулювати залежності між коренями та параметром у компактній формі, а також досліджувати умови існування коренів із певними властивостями. Типовими прикладами тут є завдання на знаходження значень параметра, за яких корені є додатними або від’ємними, рівними, взаємно оберненими, або задовольняють певну умову (наприклад, один корінь на кілька одиниць більший за інший). У



таких задачах формули Вієта часто поєднуються з додатковими умовами (дискримінант, нерівності, властивості квадратного тричлена), але саме співвідношення “сума–добуток” стає центральним інструментом аналізу [16; 13, с. 17].

Ще один напрям застосування — геометричні та прикладні задачі, у яких корені рівняння мають конкретний зміст: це можуть бути координати точок перетину графіків, довжини відрізків, параметри геометричних фігур, значення, пов’язані з рухом або фізичними співвідношеннями. У таких випадках формули Вієта дозволяють встановлювати зв’язок між величинами без прямого знаходження коренів, що особливо корисно, коли задача вимагає лише певної характеристики (наприклад, суми довжин, добутку координат, відстані між точками, пов’язаної з різницею коренів). Такі задачі демонструють міжпредметний характер формул Вієта і їхню здатність працювати як “короткий шлях” від алгебраїчного запису до геометричного змісту.

Нарешті, значне місце займають олімпіадні та дослідницькі задачі. Їхня специфіка полягає в тому, що прямий шлях розв’язання (через обчислення коренів) зазвичай або занадто складний, або неефективний. Натомість формули Вієта дозволяють швидко вводити симетричні параметри  $S = x_1 + x_2$  і  $P = x_1 x_2$ , переходити до перетворень та оцінок, знаходити приховані залежності, будувати рівняння з потрібними властивостями та робити узагальнення. У таких задачах Вієт часто виступає не просто “інструментом”, а способом мислення: вмінням бачити структуру й керувати нею.

Отже, основні напрями застосування теорем Вієта в навчальній практиці можна розглядати як методично цілісну систему типів задач: побудова рівнянь за умовами про корені, перетворення виразів через симетричні суми, дослідження параметричних залежностей, прикладні та геометричні інтерпретації, а також задачі підвищеної складності, орієнтовані на аналітичні скорочення. Саме в такій системі формули Вієта виходять за межі “теми про квадратні рівняння” і стають універсальним засобом розвитку математичної культури та логічного мислення [16; 13, с. 17].

### ***Задачі на побудову рівнянь за властивостями коренів***

Одним із найважливіших напрямів застосування оберненої теореми Вієта є побудова рівнянь за відомими властивостями їхніх коренів. Ці задачі мають виразний конструктивний характер: від заданих умов про корені потрібно перейти до самого рівняння, використовуючи співвідношення між сумою і добутком коренів та коефіцієнтами квадратного тричлена. На відміну від задач, де головною метою є обчислити корені, у цьому випадку ключовим є вміння відтворити алгебраїчну модель, що “закодована” в умовах.

Методична цінність таких завдань полягає в тому, що вони формують у здобувачів освіти стійке розуміння двостороннього зв'язку: коефіцієнти визначають певні характеристики коренів, але й навпаки — властивості коренів дозволяють відновити рівняння. Завдяки цьому учні та студенти розвивають вміння аналізувати структуру задачі, формувати математичні припущення, вводити позначення і переходити від словесного опису до символічного запису. У шкільній практиці такі вправи часто виступають першим кроком до задач на параметри та

задач підвищеної складності, де потрібна не стільки обчислювальна техніка, скільки логіка і системність міркувань.

### Приклад 1.

**Умова.** Сума коренів дорівнює 5, а добуток — 6. Побудувати рівняння.

**Розв’язання.** За оберненою теоремою Вієта, якщо  $x_1 + x_2 = 5$  і  $x_1 x_2 = 6$ , то рівняння має вигляд

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

За потреби можна перевірити корені:  $x_1 = 2$ ,  $x_2 = 3$ .

**Коментар.** Задача ілюструє базову ситуацію, коли рівняння відновлюється без використання дискримінанта та формул коренів.

Важливо підкреслювати, що основний результат тут — саме рівняння, а знаходження коренів може бути лише перевіркою.

### Приклад 2.

**Умова.** Один корінь у три рази більший за інший, а їх сума дорівнює 8. Побудувати рівняння.

**Розв’язання.** Нехай менший корінь дорівнює  $t$ , тоді більший —  $3t$ .

Маємо

$$t + 3t = 8 \Rightarrow 4t = 8 \Rightarrow t = 2.$$

Отже, корені: 2 і 6, а їх добуток  $P = 2 \cdot 6 = 12$ . За формулами Вієта шукане рівняння:

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Цей приклад формує вміння створювати модель із “відношенням” між коренями. Учні вчаться вводити змінну, переводити текстову умову в рівність і далі використати теорему Вієта як інструмент побудови.

**Приклад 3.**

**Умова.** Корені рівняння відрізняються на 4, а їх добуток дорівнює 45.

Побудувати рівняння.

**Розв'язання.** Нехай корені дорівнюють  $t$  і  $t + 4$ . Тоді за умовою:

$$t(t + 4) = 45 \Rightarrow t^2 + 4t - 45 = 0.$$

Розв'язуємо допоміжне рівняння:

$$t = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 180}}{2} = \frac{-4 \pm 14}{2}.$$

Отже,  $t = 5$  або  $t = -9$ . Відповідні пари коренів:  $5$  і  $9$ , або  $-9$  і  $-5$ .

У більшості прикладних ситуацій, якщо не зазначено інше, зазвичай обирають додатні корені, тому беремо  $5$  і  $9$ . Тоді сума  $S = 14$ , добуток  $P = 45$ , а шукане рівняння:

$$x^2 - 14x + 45 = 0.$$

Приклад демонструє типову двокрокову модель: спочатку будується допоміжне рівняння для знаходження можливих коренів, а потім за знайденими характеристиками (сума і добуток) записується основне рівняння. Важливо звертати увагу, що інколи умова допускає кілька варіантів коренів, і тоді потрібно вказувати всі можливі рівняння або аргументувати вибір.

**Методичне узагальнення.**

Задачі на побудову рівнянь за властивостями коренів формують уміння працювати з математичною моделлю, а саме: аналізувати умову, виділяти ключові зв'язки між величинами, вводити позначення та будувати рівняння як результат логічного міркування. Такі вправи

розвивають здатність переходити від “результату” (властивостей коренів) до “причини” (вигляду рівняння), що є важливою ознакою алгебраїчного стилю мислення. Як зазначає О. І. Скафа, «побудова рівнянь за відомими властивостями коренів є одним із найефективніших способів розвитку вмінь моделювати реальні залежності в алгебраїчній формі» [9, с. 43].

Особливо важливо, що такі задачі готують до складніших тем: задач із параметрами, задач на перетворення виразів через корені, а також до олімпіадних завдань, де пряме обчислення часто є нераціональним. Вони також дисциплінують математичну мову: учень має чітко відрізняти, що саме задано (сума, добуток, різниця, відношення), і що саме потрібно побудувати (рівняння, коефіцієнти, можливі варіанти).

Задачі на побудову рівнянь за властивостями коренів є важливим компонентом формування аналітичного мислення. Вони демонструють конструктивний характер теорем Вієта: від відомих співвідношень між коренями можна логічно й швидко перейти до рівняння, не використовуючи громіздких обчислень. Такі вправи не лише закріплюють зміст оберненої теореми Вієта, а й створюють методичне підґрунтя для розв’язування задач із параметрами, а також задач у геометричному та прикладному контексті.

### **Задачі на вирази через корені рівнянь**

Формули Вієта дозволяють перетворювати алгебраїчні вирази, що містять корені рівнянь, без їх безпосереднього знаходження. Цей підхід є особливо ефективним у задачах підвищеної складності, оскільки зменшує обсяг обчислень і переводить розв’язання в площину

аналітичних міркувань. У практиці розв'язування задач найчастіше використовують те, що для квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  з коренями  $x_1$  і  $x_2$  маємо

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Після знаходження суми  $S = x_1 + x_2$  і добутку  $P = x_1 x_2$  можна виражати значну кількість інших комбінацій коренів. Наприклад,

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P,$$

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = S^2 - 4P,$$

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{S}{P} (P \neq 0),$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = S^3 - 3PS.$$

Таким чином, у багатьох задачах достатньо знайти лише  $S$  і  $P$ , після чого потрібний вираз обчислюється через стандартні алгебраїчні перетворення.

Приклад 4.

Умова. Знайти значення виразу  $x_1^2 + x_2^2$ , якщо  $x_1$  і  $x_2$  — корені рівняння  $x^2 - 6x + 5 = 0$ .

Розв'язання. За формулами Вієта маємо

$$x_1 + x_2 = 6, x_1 x_2 = 5.$$

Тоді

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 6^2 - 2 \cdot 5 = 36 - 10 = 26.$$

Розв'язання виконано без знаходження самих коренів. Задача демонструє, що для обчислення симетричних виразів достатньо знати суму та добуток коренів.

Приклад 5.

Умова. Знайти  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ , якщо  $x_1$  і  $x_2$  — корені рівняння  $2x^2 - 7x + 3 = 0$ .

Розв'язання. За формулами Вієта:

$$x_1 + x_2 = \frac{7}{2}, x_1 x_2 = \frac{3}{2}.$$

Оскільки

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2},$$

то

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{3}.$$

Задача тренує вміння переходити від виразів із оберненими величинами до співвідношень Вієта. Важливо підкреслювати, що такий прийом коректний лише за умови  $x_1 x_2 \neq 0$ .

Приклад 6.

Умова. Знайти значення виразу  $x_1^3 + x_2^3$ , якщо  $x_1$  і  $x_2$  — корені рівняння  $x^2 - 4x + 1 = 0$ .

Розв'язання. За формулами Вієта:

$$S = x_1 + x_2 = 4, P = x_1 x_2 = 1.$$

Використаємо формулу:

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS.$$

Тоді

$$x_1^3 + x_2^3 = 4^3 - 3 \cdot 1 \cdot 4 = 64 - 12 = 52.$$

Цей приклад показує, що навіть вирази вищих степенів можна обчислювати через  $S$  і  $P$ , якщо правильно використати тотожності.

Задачі на вирази через корені формують у здобувачів освіти алгебраїчну інтуїцію: вони вчать оперувати рівняннями не як із “числовими прикладами”, а як із формальними об’єктами, для яких існують стійкі правила перетворення. Учні та студенти привчаються мислити через інваріанти — симетричні характеристики коренів, які легко обчислюються через коефіцієнти рівняння. Саме такі вправи розвивають символічне мислення, гнучкість у виборі методу розв’язання та готують до вивчення симетричних функцій і теорії рівнянь у ширшому розумінні [6, с. 35–36]. Отже, використання формул Вієта у задачах на вирази через корені дозволяє значно скоротити обчислення й отримувати результат шляхом аналітичних перетворень. Такі задачі є важливим етапом переходу від “обчислювальної” алгебри до “структурної”, де головним стає вміння бачити закономірності та користуватися ними.

### **Застосування у задачах з параметрами**



Одним із найважливіших напрямів практичного використання теорем Вієта є розв’язування задач із параметрами. У таких задачах коефіцієнти рівняння залежать від змінної величини  $a$ , і потрібно встановити, як змінюються властивості коренів: їхня кількість, знак, рівність чи відмінність, взаємне розташування. Особливість параметричних задач полягає в тому, що пряме знаходження коренів часто призводить до громіздких формул, тоді як співвідношення Вієта дозволяють аналізувати ситуацію через суму та добуток коренів, працюючи зі структурою рівняння.

У методичному плані такі вправи є цінними, бо формують аналітичний стиль мислення: учні та студенти вчать не лише “розв’язувати рівняння”, а й досліджувати його як математичний об’єкт, роблячи висновки про корені на основі умов і залежностей між коефіцієнтами.

#### Приклад 6.

Умова. Знайти всі значення параметра  $a$ , при яких рівняння

$$x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

має рівні корені.

Розв’язання. Рівні корені можливі тоді й лише тоді, коли дискримінант дорівнює нулю:

$$D = (-2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a^2 - 1) = 4a^2 - 4a^2 + 4 = 4.$$

Оскільки  $D = 4 \neq 0$ , то рівні корені неможливі за жодного значення  $a$ .

Цей приклад добре показує важливий методичний момент: у задачах із параметрами не варто одразу “шукати  $a$ ”, потрібно спершу перевірити, чи взагалі можлива задана властивість. Дискримінант тут не залежить від параметра, тому відповідь отримуємо одразу.

Якщо у твоєму початковому прикладі було інше рівняння (де реально виходить  $a$ ), просто надішли його — і я перероблю саме під твій варіант.

#### Приклад 7.

Умова. Знайти всі значення параметра  $a$ , при яких обидва корені рівняння

$$x^2 + (a - 3)x + a = 0$$

є від’ємними.

Розв’язання. Нехай  $x_1$  і  $x_2$  — корені рівняння. За формулами Вієта:

$$x_1 + x_2 = -(a - 3) = 3 - a, x_1 x_2 = a.$$

Щоб обидва корені були від’ємними, необхідно виконання трьох умов:

1. корені є дійсними:  $D \geq 0$ ;
2. їхній добуток додатний:  $x_1 x_2 > 0$ ;
3. їхня сума від’ємна:  $x_1 + x_2 < 0$ .

Перевіримо ці умови.

1. Дискримінант:

$$D = (a - 3)^2 - 4a = a^2 - 6a + 9 - 4a = a^2 - 10a + 9.$$

Тоді

$$a^2 - 10a + 9 \geq 0.$$

Знайдемо корені квадратичного тричлена:

$$a = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}.$$

Отже,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 9$ , тому

$$D \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 1 \text{ або } a \geq 9.$$

2. Добуток коренів:

$$x_1 x_2 = a > 0 \Rightarrow a > 0.$$

3. Сума коренів:

$$x_1 + x_2 = 3 - a < 0 \Rightarrow a > 3.$$

Об'єднаємо умови:  $a > 3$ ,  $a > 0$  і  $a \leq 1$  або  $a \geq 9$ . Єдиний сумісний варіант:

$$a \geq 9.$$

Отже, обидва корені рівняння є від'ємними при  $a \geq 9$ .

Задача демонструє, як у параметричних задачах формули Вієта працюють разом із загальними умовами існування дійсних коренів. Саме така логіка дозволяє уникнути громіздких обчислень коренів і швидко встановлювати їхні властивості через  $S = x_1 + x_2$  і  $P = x_1 x_2$  [13, с. 17–18].

Застосування теорем Вієта в задачах на вирази та параметри демонструє їхню універсальність і практичну ефективність. Формули Вієта дають змогу виконувати алгебраїчні перетворення без обчислення коренів і досліджувати залежності між коефіцієнтами рівняння та властивостями його розв'язків. У задачах із параметрами вони дозволяють раціонально встановлювати умови існування коренів, визначати знак коренів, перевіряти можливість їх рівності або інших заданих характеристик. У методичному плані такі вправи формують аналітичний стиль мислення, розвивають уміння узагальнювати, бачити структуру рівняння та застосовувати алгебраїчні знання в нових ситуаціях.

### **Геометричні задачі з використанням формул Вієта**

Геометричні задачі з використанням формул Вієта демонструють, як алгебраїчні співвідношення між коренями рівняння та його коефіцієнтами можуть описувати властивості графіка квадратичної функції. У цьому випадку корені рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  мають геометричний зміст: це абсциси точок перетину параболи  $y = ax^2 + bx + c$  з віссю  $Ox$ . Відповідно, сума коренів пов'язана з віссю симетрії параболи, а добуток — із положенням графіка відносно координатних осей.

#### **Приклад 8.**

Умова. Знайти рівняння параболи, яка перетинає вісь  $Ox$  у точках з абсцисами  $x_1$  і  $x_2$ , якщо вершина лежить на осі симетрії  $x = h$  (тобто вісь симетрії параболи має рівняння  $x = h$ ).

Розв'язання. Оскільки абсциса вершини параболи дорівнює

$$x_{\text{верш}} = -\frac{b}{2a},$$

а також відомо, що для коренів квадратного рівняння

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$

то маємо важливе співвідношення:

$$x_{\text{верш}} = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

Отже, умова “вершина лежить на осі симетрії  $x = h$ ” означає

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = h \Rightarrow x_1 + x_2 = 2h.$$

Якщо парабола має нулі  $x_1$  і  $x_2$ , то її можна записати у вигляді

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) = a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2).$$

Використовуючи  $x_1 + x_2 = 2h$ , одержуємо

$$y = a(x^2 - 2hx + x_1x_2).$$

Якщо, наприклад, задано  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ , тоді  $h = \frac{1+3}{2} = 2$  і

$$y = a(x - 1)(x - 3) = a(x^2 - 4x + 3).$$

Вибираючи для простоти  $a = 1$ , маємо

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

У таких задачах формули Вієта фактично дозволяють “прочитати” рівняння параболи за геометричними характеристиками: за точками перетину з віссю  $Ox$  та за віссю симетрії. Це економить обчислення і робить зв’язок між алгеброю та геометрією наочним [6, с. 37].

*Олімпіадні та логічні задачі*

Олімпіадні задачі часто “маскують” використання формул Вієта: замість прямого прохання знайти корені пропонується встановити певну залежність або обчислити параметр, використовуючи лише властивості коренів. Саме тому теореми Вієта в цьому блоці працюють як інструмент логічного скорочення та аналітичного пошуку.

Приклад 9.

Умова. Відомо, що корені рівняння

$$x^2 - px + q = 0$$

відрізняються на 3. Знайти значення виразу  $p^2 - 4q$ .

Розв’язання. Нехай корені  $x_1$  і  $x_2$ , причому

$$|x_1 - x_2| = 3 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9.$$

За формулами Вієта:

$$x_1 + x_2 = p, x_1 x_2 = q.$$

Тоді

$$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = p^2 - 4q.$$

Отже,

$$p^2 - 4q = 9.$$

Розв’язання показує типову “олімпіадну” ідею: замість обчислення коренів використовується симетрична формула, яка напряду веде до відповіді.

Приклад 10.

Умова. Корені квадратного рівняння є взаємно оберненими. Знайти умову на його коефіцієнти.

Розв'язання. Нехай маємо рівняння

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

а його корені  $x_1$  і  $x_2$  задовольняють умову

$$x_2 = \frac{1}{x_1}.$$

Тоді їхній добуток

$$x_1 x_2 = 1.$$

За формулами Вієта

$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

Отже,

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow c = a.$$

Отримана умова  $c = a$  є класичною: квадратне рівняння має взаємно обернені корені тоді, коли вільний член дорівнює старшому коефіцієнту (і, звісно,  $a \neq 0$ ) [16].

Розглянуті приклади підтверджують, що теореми Вієта є не лише засобом розв'язування окремих рівнянь, а універсальним інструментом аналізу, який дозволяє працювати з коренями опосередковано — через коефіцієнти. У задачах із параметрами формули Вієта допомагають встановлювати умови на суму, добуток і знаки коренів, а також робити висновки про властивості розв'язків ще до їх обчислення. У геометричних задачах вони поєднують аналітичний і графічний підходи: корені набувають змісту точок перетину, а сума коренів відображає положення осі симетрії параболи. В олімпіадних і логічних

задачах формули Вієта часто стають “ключем”, який замінює довгі обчислення короткою симетричною ідеєю.

У навчанні використання таких задач сприяє розвитку логічного та узагальнювального мислення, формує вміння будувати модель, бачити структуру рівняння та вибрати раціональний шлях розв’язання. Практика показує, що саме впевнене володіння формулами Вієта та вміння застосовувати їх у різних контекстах є важливою умовою успішного опанування алгебри й підготовки до математичних змагань.

### **3.3. Методичні аспекти вивчення теорем Вієта у шкільному курсі математики**

Тема «Формули Вієта» є однією з ключових у курсі алгебри 8–9 класів, оскільки вона забезпечує перехід від переважно обчислювального підходу до більш змістовного й аналітичного бачення рівнянь. На цьому етапі учні вперше усвідомлюють, що квадратне рівняння можна розглядати не тільки як “приклад для знаходження  $x$ ”, а як математичний об’єкт, у якому закладено інформацію про корені. Іншими словами, формули Вієта показують учням, що властивості розв’язків пов’язані зі структурою рівняння, а отже їх можна аналізувати через коефіцієнти, не виконуючи кожного разу повного розв’язання.

Вивчення формул Вієта має важливе загальноосвітнє значення, оскільки формує в учнів елементи алгебраїчної культури: вміння працювати із символами, встановлювати зв’язки між величинами, робити узагальнення та перевіряти результат різними способами. За словами З. І. Слєпканя, «вивчення формул Вієта сприяє розвитку



символічного мислення, адже учень починає мислити не конкретними числами, а зв'язками між ними» [14, с. 176]. Саме тому ця тема є своєрідною “точкою росту”: вона допомагає учневі перейти від простого застосування алгоритму до усвідомленого аналізу математичних залежностей.

Методична роль теми «Формули Вієта» полягає також у тому, що вона систематизує та поглиблює вже набуті знання про квадратні рівняння. Якщо на попередніх уроках домінує алгоритм розв'язування через дискримінант, то формули Вієта вводять альтернативний інструмент, який у багатьох ситуаціях є швидшим, логічнішим і “економнішим”. Учні починають бачити, що в математиці можливі різні підходи до однієї проблеми, а вибір методу залежить від умови задачі та мети розв'язання.

Методично правильно побудоване вивчення формул Вієта дозволяє:

По-перше, закріпити й переосмислити навички розв'язування квадратних рівнянь. Формули Вієта дають змогу перевіряти правильність знайдених коренів, що дисциплінує обчислення і привчає до контролю результату. Учні вчаться здійснювати “зворотну перевірку” не підстановкою, а через суму і добуток коренів, що є важливим кроком до формування математичної грамотності.

По-друге, розвинути вміння узагальнювати й скорочувати обчислення. У багатьох задачах (особливо на обчислення виразів через корені або на властивості коренів) формули Вієта дають змогу розв'язати завдання без знаходження коренів, що формує в учнів

раціональний стиль мислення: не робити зайвих дій, якщо результат можна отримати простіше.

По-третє, сформулювати поняття про залежність між коефіцієнтами і коренями рівняння як про фундаментальну закономірність. Учні починають розуміти, що коефіцієнти — не випадкові числа, а “носії інформації” про розв’язки. Це важливо для подальшого вивчення тем, пов’язаних із многочленами, розкладанням на множники, перетвореннями виразів.

По-четверте, закласти підґрунтя для майбутніх тем алгебри та початків аналізу, зокрема для роботи з многочленами, параметричними задачами, симетричними виразами. Як підкреслюється в методичній літературі, формули Вієта є ефективним засобом підготовки до більш складних узагальнень у старшій школі [2, с. 22].

Крім того, значення теми проявляється і в практико-орієнтованому аспекті: задачі на формули Вієта часто трапляються в підсумкових контрольних роботах, на вступних випробуваннях, у підготовці до математичних конкурсів. Проте важливо, щоб шкільне вивчення не зводилося до механічного запам’ятовування двох формул. Методична мета полягає у формуванні розуміння: звідки беруться ці співвідношення, у яких випадках їх доцільно застосовувати і як логічно обґрунтувати свій вибір.

Отже, тема «Формули Вієта» у шкільному курсі алгебри має системоутворююче значення. Вона допомагає перейти від алгоритмічного виконання дій до аналізу структури рівняння, формує аналітичну культуру, готує до задач із параметрами та сприяє розвитку

логічного й узагальнювального мислення, що є важливою умовою успішного опанування математики в цілому.

### **Методичні підходи до вивчення теми «Формули Вієта» у закладах загальної середньої освіти**

Відповідно до концепції Нової української школи та положень Державного стандарту базової середньої освіти, навчання математики має забезпечувати не лише засвоєння фактів і алгоритмів, а й формування компетентностей, які дозволяють учневі застосовувати знання, міркувати, аргументувати та приймати обґрунтовані рішення. Тема «Формули Вієта» є особливо придатною для такого підходу, оскільки безпосередньо демонструє учням, що рівняння — це не тільки «спосіб знайти  $x$ », а система взаємопов'язаних величин, у якій коефіцієнти несуть інформацію про корені, їхні властивості та взаємозв'язки.

**Компетентнісний підхід** у навчанні математики, як підкреслюють українські дослідники, передбачає формування досвіду діяльності учнів: уміння діяти в типових і нових ситуаціях, обирати раціональний метод розв'язання, перевіряти отриманий результат і аргументувати хід міркувань [14, с. 45–47; 15, с. 12–15]. Такий підхід є одним із провідних у сучасній методиці навчання математики й спрямований на розвиток ключових і предметних компетентностей школярів.

У контексті теми «Формули Вієта» це означає, що навчальна мета виходить за межі механічного запам'ятовування співвідношень

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \quad [2, \text{с. 22; 3}].$$

Важливо, щоб учні вміли використовувати ці формули як інструмент математичного аналізу:

визначати можливі властивості коренів квадратного рівняння, складати рівняння за заданими характеристиками, працювати з параметрами, порівнювати різні способи розв'язування (через дискримінант і за допомогою формул Вієта), а також встановлювати зв'язок між коренями рівняння, графіком квадратичної функції та геометричними інтерпретаціями [6, с. 34–36; 7, с. 18–24; 13, с. 16–18].

**Діяльнісний підхід** забезпечує активну позицію учня у процесі навчання. Він передбачає організацію уроку як системи послідовних дій: спостереження, аналізу, висування гіпотез, їх перевірки, узагальнення та рефлексії [14, с. 52–54]. Для теми «Формули Вієта» діяльнісний підхід є особливо важливим, оскільки дає змогу не подавати формули як готове правило, а «відкрити» їх разом з учнями. Навчальний ефект суттєво підвищується тоді, коли учні самостійно знаходять корені кількох квадратних рівнянь, обчислюють їхню суму й добуток та встановлюють закономірний зв'язок з коефіцієнтами рівняння [2, с. 23–24; 6, с. 35].

**Застосування компетентнісного та діяльнісного підходів** під час вивчення теми «Формули Вієта» сприяє розвитку в учнів універсальних навчальних умінь: аналізувати умову задачі, працювати з математичною моделлю, здійснювати логічні висновки, аргументувати власні твердження та контролювати правильність результату [9, с. 42–44; 15, с. 28–30]. Крім того, у межах цієї теми природно формуються навички самоконтролю, оскільки учні можуть перевіряти знайдені корені не лише шляхом підстановки, а й за допомогою співвідношень між сумою та добутком коренів, що підвищує культуру математичних міркувань і точність розв'язань [1, с. 146–148; 11, с. 112–114].

Методичні засади формування математичної компетентності на матеріалі теми

Формування предметної математичної компетентності під час вивчення теми «Формули Вієта» має спиратися на поєднання трьох компонентів: змістового (розуміння суті формул), операційного (володіння прийомами застосування) та рефлексивного (уміння пояснити, перевірити, обґрунтувати). Для цього важливо будувати навчання як поступовий перехід від простих репродуктивних вправ до задач аналітичного, проблемного й дослідницького характеру, а також забезпечувати систематичне повернення до зв'язку «коефіцієнти  $\leftrightarrow$  корені» як центральної ідеї теми [14; 15].

Одним із ключових методичних положень є свідоме засвоєння формул Вієта, тобто таке, що базується на розумінні їх походження, змісту й меж застосування. Учні мають усвідомити, що формули працюють не “самі по собі”, а як наслідок загальної структури квадратного рівняння та властивостей множників  $(x - x_1)(x - x_2)$ . Тому методично доцільним є поєднання аналітичного та операційного компонентів: пояснення (або коротке виведення) формул і подальше тренування на різних типах задач.

Ефективним є індуктивно-дедуктивний шлях введення формул. На початку учням пропонують кілька конкретних рівнянь, які вони розв'язують відомим способом (через дискримінант), а потім аналізують: як пов'язані сума й добуток коренів із коефіцієнтами. Далі на основі узагальнення формулюється правило. Такий підхід не лише

підвищує мотивацію, а й робить знання більш стійким: учень розуміє, «звідки береться формула», і тому краще її застосовує.

Суттєвим методичним завданням є формування вмінь використовувати формули Вієта в різних навчальних ситуаціях.

Доцільно передбачити щонайменше такі лінії вправ:

- по-перше, вправи на знаходження суми й добутку коренів без обчислення самих коренів;
- по-друге, задачі на перевірку правильності знайдених коренів;
- по-третє, вправи на складання рівняння за заданими коренями або їх характеристиками;
- по-четверте, задачі на обчислення виразів через корені;
- по-п'яте, задачі з параметрами й на встановлення умов (наприклад, коли корені рівні, додатні, від'ємні тощо);
- по-шосте, задачі з геометричним змістом (зв'язок коренів із точками перетину параболи з віссю  $Ox$ , вісь симетрії тощо).

Саме різноманітність типів задач забезпечує учням розуміння універсальності формул Вієта та формує гнучкість мислення: учень навчається не лише виконувати дію за зразком, а обирати інструмент під задачу. Це особливо важливо в умовах компетентнісного навчання, де оцінюється здатність застосовувати знання.

Окремо слід підкреслити роль задач дослідницького характеру, які допомагають перейти від “механічного” до “осмисленого” застосування формул. До таких завдань належать: дослідження впливу коефіцієнтів на можливі значення суми й добутку коренів; встановлення умов, за яких корені можуть бути однаковими або протилежними; аналіз впливу

параметра на знак коренів; зв'язок коефіцієнтів із розташуванням графіка квадратичної функції. Такі завдання формують у школярів досвід математичного дослідження: висунути припущення, перевірити на прикладах, обґрунтувати загальний висновок.

Таким чином, методичні підходи до вивчення теми «Формули Вієта» мають бути спрямовані на поєднання розуміння, дії та рефлексії. Компетентнісний і діяльнісний підходи дозволяють зробити тему не “набором формул”, а змістовним інструментом аналізу рівнянь, який розвиває логічне мислення, математичну грамотність і готовність учня застосовувати знання у різних ситуаціях навчальної та практичної діяльності.

### **3.4. Типові труднощі учнів та шляхи їх подолання**

Методичні спостереження свідчать, що труднощі під час вивчення формул Вієта найчастіше зумовлені не складністю самих формул, а формальним (поверхневим) засвоєнням теми й невмінням пов'язувати коефіцієнти рівняння з властивостями його коренів. У роботах, присвячених методиці навчання алгебри, підкреслюється: учні нерідко «знають правило», але не вміють використати його в нетиповій ситуації. Зокрема, Г. П. Бевз звертає увагу на типові помилки зі знаками та на механічний характер відтворення формул без розуміння логіки їх отримання [2, с. 24], а Н. В. Кузьміна акцентує, що слабе осмислення зв'язку між коренями та коефіцієнтами ускладнює перехід до задач на побудову рівнянь і до задач дослідницького типу [9, с. 42].

Нижче подаю систематизований перелік найпоширеніших труднощів та методичних рішень, які допомагають їх попередити й подолати.

*1) Механічне запам'ятовування формул без розуміння походження*

Сутність труднощі полягає у тому, що чень відтворює співвідношення  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ ,  $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ , але не розуміє, звідки вони беруться і що означають. У результаті при нестандартному записі рівняння, під час перетворень або при словесній умові (задачі «на складання») він губиться, а правильне застосування формул стає випадковим. Таку проблему як одну з ключових відзначає Г. П. Бевз [2, с. 24].

Шляхи подолання:

- *введення формул через “відкриття закономірності”.*

Запропонувати 2–3 квадратні рівняння, розв'язати їх дискримінантом, знайти корені, а потім окремо обчислити їхню суму й добуток та порівняти з коефіцієнтами. Після кількох прикладів учні самі «виходять» на узагальнення.

- *пояснення через розклад на множники.* Показати, що  $(x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2$ , і далі співставити з  $ax^2 + bx + c$  (або зі зведеним випадком).

- *фіксація смислу кожної формули.* Не просто «вивчити», а проговорити: *перша формула описує суму, друга – добуток*, і обидві «зчитуються» з рівняння.



- *поступовий перехід від числових прикладів до символічних.* Саме такий рух від конкретного до загального вважається ефективним для розуміння й запам'ятовування [14, с. 177].

2) Плутанина зі знаками та коефіцієнтами (особливо коли  $b < 0$  або  $a \neq 1$ )

Сутність труднощі у тому, що найпоширеніший тип помилок: учні «підставляють  $b$ » без урахування того, що у формулі вже закладений знак «мінус». Також проблемою є незведені рівняння, де потрібно ділити на  $a$ . У підсумку виникають типові помилки:

- $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$  замість  $-\frac{b}{a}$ ;
- хибні знаки при  $b < 0$ ;
- ігнорування того, що  $a \neq 1$  (або неправильне визначення  $a, b, c$ , якщо рівняння не приведене до стандартного вигляду).

*Шляхи подолання:*

- алгоритм “2 кроки”.
  1. Привести рівняння до стандартного вигляду  $ax^2 + bx + c = 0$ ;
  2. Виписати  $a, b, c$  і лише після цього застосовувати формули.

- Вправи-“пастки”. Дати серію рівнянь із  $b < 0$ ,  $a \neq 1$ , а також рівнянь із переставленими членами (наприклад,  $5x^2 - 3 = 2x$ ). Такі вправи формують «увагу до структури».

- Перевірка змістом. Якщо  $-\frac{b}{a} > 0$ , то сума коренів має бути додатною; якщо  $\frac{c}{a} < 0$  – корені різних знаків тощо. Це привчає учнів робити швидку логічну перевірку результату.

3) Труднощі у застосуванні оберненої теореми (складання рівняння за умовою про корені)

Сутність труднощі: учні часто намагаються «спочатку знайти корені», хоча задача вимагає скласти рівняння. Інша проблема – невміння перекласти словесну умову у модель (наприклад, «на 3 більший», «у 2 рази більший», «обернений»).

Шляхи подолання:

- показати ідею “алгебраїчного конструктора”. Якщо відомі  $S$  і  $P$ , то для зведеного випадку одразу отримуємо  $x^2 - Sx + P = 0$ .

- навчити моделювати мовні умови.

«на 3 більший»  $\rightarrow x$  і  $x + 3$ ;

«у 2 рази більший»  $\rightarrow x$  і  $2x$ ;

«взаємно обернені»  $\rightarrow x$  і  $\frac{1}{x}$ .

- підтримка опорами (шаблон розв’язання).

1. позначити корені;

2. виразити  $S$  і  $P$ ;
3. скласти рівняння;
4. (за потреби) перевірити. Це переводить діяльність із хаотичних проб у чіткий алгоритм дій.

4) Звужене розуміння: «формули Вієта — це тільки “знайти суму і добуток”»

Сутність труднощі: учень не бачить аналітичної сили формул і використовує їх лише для «швидкого обчислення». У такому разі втрачається головний дидактичний ефект теми: формування вміння робити висновки про корені до їх знаходження.

Шляхи подолання:

- системно включати задачі на властивості коренів: «коли обидва корені додатні/від’ємні?»; «коли корені різні/рівні?»; «коли корені різних знаків?»; «що можна сказати про розташування коренів?»

- пов’язувати з графіком квадратичної функції. Показати, що вісь симетрії  $x = \frac{x_1+x_2}{2}$  пов’язана із сумою коренів, а добуток — із параметрами параболи та перетином із віссю  $Oy$ .

- порівнювати методи. Розв’язати одну задачу двома способами (через дискримінант і через Вієта) та обговорити, де який підхід ефективніший.

5) Труднощі перенесення знань у задачі з параметрами та нестандартні ситуації

Сутність труднощі у тому, що у задачах із параметрами учні часто не розрізняють, що треба довести/знайти: умови існування коренів, їх знак, рівність, кратність, залежність від параметра. Через це помилково застосовують лише дискримінант або роблять неповні висновки.

Шляхи подолання:

- чітка “карта умов” для коренів (короткий конспект-опора):

обидва додатні  $\rightarrow S > 0, P > 0$  (і за потреби умова існування коренів);

обидва від’ємні  $\rightarrow S < 0, P > 0$ ;

різних знаків  $\rightarrow P < 0$ ;

рівні корені  $\rightarrow D = 0$  (для квадратного).

- завдання з поетапним ускладненням: спочатку параметр лише у  $b$ , потім у двох коефіцієнтах, потім – у всіх трьох.

- обов’язкова рефлексія після задачі: *які умови застосував? чому саме їх?*

### **STEM-орієнтований підхід як засіб подолання труднощів**

STEM-орієнтований підхід у вивченні формул Вієта є особливо результативним саме тоді, коли потрібно подолати типові «шкільні» труднощі: механічне запам’ятовування, плутанину зі знаками, нерозуміння сенсу оберненої теореми та невміння застосовувати формули в нестандартних задачах. На відміну від традиційного пояснення «формула  $\rightarrow$  тренування», STEM-логіка будується як

«спостереження → гіпотеза → перевірка → узагальнення». Тобто учні не просто відтворюють співвідношення, а бачать, як вони «працюють» у реальних моделях і візуальних об'єктах, а відтак починають сприймати формули Вієта як інструмент аналізу, а не як правило для підстановки.

1) Візуально-дослідницький блок: «коефіцієнти керують коренями»

Одним із найбільш ефективних STEM-прийомів є дослідження зв'язку між коефіцієнтами  $a, b$ , ста коренями рівняння через графік квадратичної функції. Учням пропонується розглядати параболу як “модель даних”, де:

- корені — це точки перетину з віссю  $Ox$ ;
- сума коренів пов'язана з положенням осі симетрії:  $x = \frac{x_1+x_2}{2}$ ,
- знак і величина впливають на перетин з віссю  $Oy$ , а через це — на можливі варіанти розташування коренів.

У практичній роботі учні змінюють параметри  $a, b, c$  (наприклад, за допомогою повзунків у динамічному середовищі) і фіксують спостереження:

- що відбувається з коренями, якщо змінювати лише  $b$ ?
- як зміниться сума коренів, якщо  $b$  поміняти на протилежний знак?
- що відбувається з кількістю дійсних коренів при зміні  $c$ ?

Таке «графічне експериментування» знімає одну з головних

проблем: учні перестають плутати знаки, бо починають осмислювати їх через результат на графіку (де може бути вісь симетрії, в який бік “зсувається” парабола і чому).

2) Моделювальний блок: «умова задачі  $\rightarrow$  рівняння  $\rightarrow$  висновок»

Ще одна характерна трудність — невміння працювати з оберненою теоремою Вієта і скласти рівняння за властивостями коренів. STEM-підхід дає природну рамку для цього: учні будують математичну модель ситуації і підбирають рівняння під задані умови (тобто працюють як “конструктори моделей”).

Перспективні сюжети для моделювання:

- траєкторія руху (фізика): висота тіла, кинутого вгору, описується квадратною функцією; моменти часу, коли тіло на землі, — це корені рівняння. Учні можуть отримати умову на суму/добуток коренів (наприклад, через час підйому й спуску) і далі «збирати» рівняння.
- оптимізація (математика/інформатика): задачі на найбільше/найменше значення квадратичної функції, де координата вершини напряду пов’язана із сумою коренів.
- підбір рівняння під умову: наприклад, «корені різних знаків», «обидва від’ємні», «відрізняються на 4», «один удвічі більший» — усе це швидко переводиться у мову  $S$  і  $P$  та формує вміння моделювати.

Таким чином учні засвоюють: формули Вієта — це не «після» розв’язання, а спосіб побудови та аналізу рівняння.

### 3) Інженерно-дослідницький блок: мініпроєкти та навчальні експерименти

Мініпроєкти у стилі STEM добре працюють для закріплення теми й переходу від репродуктивних вправ до осмисленого застосування. Вони можуть бути короткими (на 1–2 уроки) і мати чіткий продукт: таблицю спостережень, постер, коротку презентацію або висновок.

Приклади мініпроєктів:

- «Параметр змінюється — як змінюються корені?»

Учні беруть сімейство рівнянь  $x^2 + px + q = 0$  і досліджують:

- як змінюється сума коренів при зміні  $p$ ;
- як добуток пов'язаний із  $q$ ;
- коли корені будуть одного знака/різних знаків.

Результат: короткі правила + приклади + ілюстрації.

- «Коефіцієнти як “паспорт” коренів»

Учні складають набір «швидких висновків» про корені, маючи лише  $a, b, c$  (знак суми, знак добутку, можливі варіанти розташування).

- «Одна задача — два способи»

Дослідити, коли метод Вієта ефективніший за дискримінант (за часом, кількістю обчислень, прозорістю міркувань). Це формує рефлексію способів діяльності.

Проектність особливо корисна для учнів, які зазвичай «застрягають» на формальному рівні: їм легше зрозуміти тему, коли вона подається як дослідження закономірностей.

#### 4) Інтеграція з ІКТ як природний STEM-інструмент

У STEM-підході цифрові інструменти не є «додатком для краси», а виконують роль лабораторії. Динамічна візуалізація дає змогу:

- швидко перевіряти гіпотези (що буде з коренями при зміні  $a$  або  $c$ );
- отримувати зворотний зв'язок через експеримент;
- бачити зв'язок між алгебраїчною формою та геометричним змістом.

Це особливо ефективно для подолання помилок зі знаками і для усвідомлення, що формули Вієта — не «окремий трюк», а частина загальної логіки квадратної функції.

Отже, STEM-орієнтований підхід підсилює вивчення формул Вієта тим, що:

- переводить засвоєння з рівня «вивчив і підставив» на рівень «побачив, пояснив, перевінив»;
- формує модельне мислення (умова  $\rightarrow$  математична модель  $\rightarrow$  висновки);
- зменшує кількість типових помилок через візуалізацію та дослідницьку діяльність;
- підвищує мотивацію, бо учні бачать практичний сенс формул і їхню роль як інструмента аналізу, а не лише обчислень.

#### Використання ІКТ та інтерактивних ресурсів



Інформаційно-комунікаційні технології роблять тему «Формули Вієта» наочною й “живою”, адже дозволяють учням не лише виконувати підстановки, а й спостерігати закономірності в динаміці: як змінюються корені, вісь симетрії параболи, точки перетину з віссю  $Ox$  та поведінка графіка при зміні коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Особливо важливо, що ІКТ підтримують навчальний експеримент: учень бачить наслідок своєї дії (змінив  $b$  або  $c$  — змінилися корені), а отже поступово переходить від формального знання до змістового розуміння.

Найдоцільнішими ресурсами під час вивчення формул Вієта є:

**GeoGebra, Desmos** — динамічні моделі квадратичної функції з “повзунками” для  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Учні можуть:

- фіксувати значення коренів і відразу перевіряти суму та добуток;
- спостерігати, як змінюється вісь симетрії  $x = -\frac{b}{2a}$  і співвідносити її з  $\frac{x_1+x_2}{2}$ ;
- бачити, як коефіцієнт впливає на перетин з  $Oy$  та опосередковано — на можливі варіанти розміщення коренів.

**Інтерактивні модулі та середовища для уроку** (наприклад, GeoGebra Classroom та подібні платформи) — зручні для організації роботи в класі: учитель задає модель і завдання, а учні виконують короткі дослідження, роблять висновки, обговорюють результати. Перевага таких модулів у тому, що вони підтримують діяльнісний підхід: учні “відкривають” формули через серію спостережень і перевірок, а не лише отримують їх у готовому вигляді.

**Швидкі діагностики та зворотний зв'язок** (Kahoot, Quizizz та інші) — ефективні для фіксації типових помилок (плутанина зі знаками, неправильно визначені  $a, b, c$ , невміння привести рівняння до стандартного вигляду). Такі інструменти корисні саме тоді, коли після тесту обов'язково проводиться корекційний етап: розбір “пасток”, пояснення, чому виникла помилка, і коротке повторне тренування.

Окремої уваги заслуговує **змішане навчання**, яке добре підходить для цієї теми. Теоретичний мініблок (коротке відео або інтерактивний модуль з прикладами) учні опрацьовують вдома, а на уроці виконують практику: розв'язують задачі, аналізують типові помилки, працюють у парах/групах із задачами на моделювання й параметри. Такий формат дозволяє зекономити час уроку для найважливішого — осмислення й застосування.

### **Практичні методичні прийоми**

Щоб профілакувати типові помилки та сформувати “аналітичну звичку” працювати з формулами Вієта, доцільно системно використовувати комплекс прийомів:

- **Вправи «рівняння  $\leftrightarrow$  корені»** (встановлення відповідності): учні або добирають можливі корені до рівняння, або складають рівняння за заданими коренями. Це тренує розуміння двостороннього зв'язку між коефіцієнтами та коренями, а не лише підстановку.
- **«Математичний конструктор»:** складання рівняння за умовами про корені (сума, добуток, різниця, відношення,

“обернені корені” тощо). Такий формат особливо корисний для відпрацювання оберненої теореми Вієта та навичок моделювання.

- **Завдання з “навмисними помилками”:** учням пропонується готовий розв’язок з помилкою (наприклад, неправильно враховано знак у  $-\frac{b}{a}$  або переплутано коефіцієнти). Потрібно знайти й виправити помилку, пояснивши її причину. Це розвиває критичне мислення й самоконтроль.

- **Задачі відкритого типу:** завдання, де можливі кілька правильних відповідей або різні моделі. Наприклад: “Складіть два різні рівняння, для яких сума коренів дорівнює 4, а добуток — 1” або “Запропонуйте три рівняння, у яких обидва корені від’ємні”. Такі вправи знімають “страх однієї правильної відповіді” і стимулюють творчий підхід.

- **Короткі обговорення стратегій у парах/групах** (кооперативне навчання): учні порівнюють підходи (дискримінант vs. Вієта), обґрунтовують вибір способу, пояснюють логіку. Це робить знання не “приватним”, а проговореним і зрозумілим.

Ефективним інструментом формувального оцінювання є **коротка діагностика** на 6–8 завдань, яка перевіряє не тільки запам’ятовування формул, а й здатність застосовувати їх змістовно. Доцільно включати:

- тестові завдання на визначення  $S$  і  $P$  (суми й добутку коренів);
- завдання на приведення рівняння до стандартного вигляду та правильне визначення  $a, b, c$ ;

- 1–2 задачі на складання рівняння за умовою (обернена теорема);
- 1 задача на властивості коренів або параметр (наприклад, умова на знаки/рівність коренів).

Такий формат дозволяє побачити, чи учень **розуміє сенс** формул Вієта, чи тільки механічно їх відтворює, і дає матеріал для адресної корекції.

Отже, подолання типових труднощів під час вивчення формул Вієта потребує не “додаткового заучування”, а методично продуманої системи: введення формул через смислове відкриття, тренування на структурних перетвореннях і “пастках”, поступовий перехід до задач на моделювання, параметри та дослідження. Раціональне поєднання проблемного, дослідницького, кооперативного й змішаного навчання, доповнене ІКТ та STEM-елементами, забезпечує глибше розуміння теми й формує в учнів стійке аналітичне мислення, необхідне для подальшого вивчення алгебри [2, с. 24; 9, с. 42; 14, с. 177].

### **Методика вивчення прямої теореми Вієта**

Дидактичні цілі та роль прямої теореми Вієта в курсі алгебри

Вивчення прямої теореми Вієта є важливим етапом у формуванні в учнів умінь аналізувати квадратні рівняння та робити висновки про їх корені без застосування формули квадратного рівняння. Пряма теорема Вієта вводиться у 8 класі та слугує основою для подальшого вивчення оберненої теореми, задач з параметрами, розв’язування рівнянь різних

видів, а також встановлення зв'язків між коефіцієнтами рівняння і властивостями коренів.

*Основна дидактична мета* вивчення прямої теореми Вієта полягає у формуванні вміння учнів знаходити суму і добуток коренів квадратного рівняння та використовувати ці співвідношення у процесі розв'язування задач. Крім того, дана тема сприяє розвитку алгебраїчного та логічного мислення, навичок узагальнення та вміння виконувати перехід від числових обчислень до оперування алгебраїчними виразами.

Відповідно до чинної програми з математики та підручників для закладів загальної середньої освіти, у процесі вивчення прямої теореми Вієта учні мають усвідомити зміст теореми, область її застосування, а також навчитися використовувати її під час аналізу рівнянь різного типу. У більшості підручників (наприклад, Мерзляк А., Полонський В. для 8 класу; Бурда М., Тарасенкова О. для базової школи) подання матеріалу здійснюється через ознайомлення з теоремою після вивчення формули для коренів квадратного рівняння, що створює логічну наступність і підводить учнів до ідеї скорочення обчислень.

Вивчення прямої теореми Вієта забезпечує перехід від репродуктивного до аналітичного рівня розв'язування квадратних рівнянь. Таким чином, дана тема відіграє важливу роль у формуванні понять про структуру алгебраїчних виразів, залежності між елементами рівняння та особливості поведінки коренів залежно від зміни коефіцієнтів.

Методика вивчення прямої теореми Вієта повинна забезпечити не лише засвоєння формул, а й усвідомлення їх змісту, логічне обґрунтування та формування умінь застосовувати теорему у різних навчальних ситуаціях. *Ефективним є використання проблемно-пошукового, діяльнісного та наочно-індуктивного підходів.*

*Проблемно-пошуковий підхід передбачає* створення на уроці проблемної ситуації, яка спонукає учнів самостійно відкрити нове правило. Зазвичай учням пропонують розв'язати декілька квадратних рівнянь із цілими коренями за формулою та порівняти суму і добуток знайдених коренів із коефіцієнтами рівняння. Повторюваність результатів підводить їх до відкриття закономірності. Такий шлях сприяє кращому розумінню змісту теореми, оскільки знання здобуте учнем самостійно.

*Діяльнісний підхід* полягає в організації різних видів навчальної діяльності учнів: індивідуальної, парної, групової, дослідницької. Під час вивчення прямої теореми Вієта важливо, щоб учні не лише прослухали формулювання теореми, а й виконали систему вправ на її застосування, порівняли різні способи розв'язання задач, проаналізували умови коректного використання співвідношень між коренями і коефіцієнтами. Це формує цілісне розуміння теми.

*Наочно-індуктивний підхід* полягає у використанні прикладів, на основі яких учні самостійно формулюють загальний висновок. Подача кількох конкретних прикладів квадратних рівнянь із різними коефіцієнтами дає можливість учням узагальнити результати та сформулювати закономірність. Такий підхід є доступним для учнів 8

класу, оскільки опирається на їх попередній досвід виконання алгебраїчних дій.

У процесі введення прямої теореми Вієта доцільно поєднувати зазначені підходи, що сприяє більш глибокому засвоєнню навчального матеріалу та формуванню стійких умінь застосовувати теорему у практичних ситуаціях.

Методично доцільним є введення прямої теореми Вієта через *поетапне опрацювання* навчального матеріалу. Орієнтовна поурочна модель може містити такі етапи:

*Актуалізація опорних знань.* На цьому етапі учням пропонується пригадати формулу для коренів квадратного рівняння, поняття коефіцієнтів, вміння виконувати операції з коренями та підставляти значення у формули. Можна використати короткі усні або письмові вправи на знаходження коренів рівнянь із цілими коренями, щоб підвести учнів до спостереження закономірності.

*Мотивація навчальної діяльності.* Учителю доцільно поставити перед учнями проблему, яка потребує економного або більш раціонального способу розв'язання. Наприклад: “Чи можна знайти суму та добуток коренів рівняння, не обчислюючи самі корені?” або “Чи можна сказати щось про корені, лише знаючи коефіцієнти рівняння?”. Усвідомлення актуальності питання створює мотиваційну готовність до опанування нового матеріалу.

*Відкриття нового знання.* На цьому етапі учні, виконуючи низку вправ, самостійно приходять до висновку, що для квадратного рівняння з коефіцієнтами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  справджується співвідношення між коренями та

коефіцієнтами. Учитель пропонує кілька прикладів рівнянь із зручними для обчислення коренями ( $a=1$ ), а учні порівнюють суму і добуток коренів із коефіцієнтами рівняння. Після узагальнення результатів формулюється пряма теорема Вієта та записується в зошитах.

*Первинне закріплення знань.* На цьому етапі учні виконують вправи на безпосереднє застосування прямої теореми Вієта у стандартних завданнях: знаходження суми та добутку коренів, перевірка правильності обчислення коренів, порівняння коренів, встановлення їх властивостей. Важливо, щоб учні усвідомили умови застосування теореми ( $a \neq 0$ ).

*Розвиток умінь застосовувати теорему у нестандартних ситуаціях.* Учням пропонується розв'язання задач більш високого рівня: відновлення рівняння за заданими коренями, пошук невідомих коефіцієнтів рівняння, встановлення умов існування рівнянь із певними властивостями коренів (наприклад, рівних, протилежних, взаємно обернених). Учитель може організувати групову або парну роботу з подальшим обговоренням різних стратегій розв'язання.

*Рефлексія та оцінювання результатів.* Завершальним етапом є обговорення труднощів, яких зазнали учні, аналіз типових помилок і виділення ключових моментів, що потребують запам'ятовування. Короткий самоаналіз сприяє усвідомленню учнями власних навчальних досягнень.

Ефективне формування навичок застосування прямої теореми Вієта передбачає *систему вправ*, що охоплює різні рівні складності та



різні типи навчальної діяльності. Пропонується орієнтовна група завдань.

*Базові завдання.* Спрямовані на відпрацювання умінь знаходити суму і добуток коренів квадратного рівняння за її коефіцієнтами.

Наприклад: знайти суму та добуток коренів рівняння  $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ; встановити, чи можуть корені бути додатними, від'ємними, рівними.

*Завдання середнього рівня.* Передбачають застосування прямої теореми Вієта у більш складних ситуаціях: обчислення значень виразів, які містять корені; складання рівняння за заданою сумою і добутком коренів; знаходження коренів рівняння на основі теореми Вієта та перевірка результату. Наприклад, скласти рівняння, корені якого дорівнюють 3 і  $-5$ ; знайти корені рівняння, якщо відомо, що їх сума дорівнює 6, а добуток 5.

*Ускладнені завдання.* Містять елементи дослідження, аналізу та роботи з параметрами. Наприклад, знайти значення параметра  $m$ , при якому корені рівняння є протилежними; дослідити рівняння на наявність цілих коренів; встановити умови, за яких добуток коренів буде від'ємним або більшим за певне число. Такі завдання сприяють розвитку логічного та аналітичного мислення.

Важливо, щоб добір задач був поступовим та поетапним: від простих до складних, від репродуктивних до дослідницьких.

Фрагмент уроку з використанням прямої теореми Вієта (НУШ-формат)

### *Тема: Пряма теорема Вієта*

Мета: сформувати в учнів уміння застосовувати пряму теорему Вієта для знаходження суми та добутку коренів квадратного рівняння; розвивати логічне та критичне мислення, навички співпраці; формувати здатність робити математичні висновки на основі спостережень.

Форма організації: урок відкриття нового знання з елементами роботи в групах та ІКТ.

#### Етап 1. Організаційно-мотиваційний

Учитель пропонує учням ситуацію: “Ви — команда математичних дослідників. Сьогодні вам належить знайти спосіб дізнаватися про корені квадратного рівняння, навіть не обчислюючи їх повністю. Як це можна зробити?” Учні висловлюють припущення.

#### Етап 2. Актуалізація знань

Учні в парах виконують коротке завдання: розв’язати два квадратні рівняння за формулою та знайти їх корені. Результати записують у спільну таблицю (можна використати інтерактивну дошку або Google Jamboard). Учитель звертає увагу на зв’язок між сумою, добутком коренів та коефіцієнтами.

#### Етап 3. Відкриття нового знання

Учні об’єднуються у групи по 3–4 учні та отримують завдання: розв’язати ще два рівняння, знайти суму та добуток коренів, порівняти з коефіцієнтами. Групи формулюють закономірність своїми словами. Після обговорення клас формулює пряму теорему Вієта та записує в зошити.

#### Етап 4. Первинне закріплення

Учні виконують інтерактивне завдання на LearningApps: “Встанови відповідність між рівнянням та сумою і добутком його коренів”. Далі пропонується 3 швидкі усні вправи “Правда чи неправда?” із поясненням.

#### Етап 5. Застосування у навчальних ситуаціях

Учні отримують три типи завдань із вибором рівня складності (диференціація за рівнями):

- мінімальний: знайти суму і добуток коренів;
- середній: скласти рівняння за заданою сумою і добутком;
- високий: завдання з умовами щодо коренів.

Робота в групах: кожна група обирає одне завдання, розв’язує, на листку оформлює спільне розв’язання, презентує класу.

#### Етап 6. Рефлексія

Учні завершують речення: “Сьогодні я дізнався...”, “Мені було цікаво...”, “Тепер я можу...”. Учитель коротко підсумовує, звертаючи увагу на практичність нового знання.

Методика вивчення прямої теореми Вієта має забезпечувати поєднання логічного обґрунтування теоретичного матеріалу та активного застосування отриманих знань у різноманітних навчальних ситуаціях. Раціональне використання проблемно-пошукового, діяльнісного та наочно-індуктивного підходів сприяє глибокому засвоєнню змісту теореми та формує в учнів уміння самостійно встановлювати математичні закономірності.

Ефективність навчання значно зростає за умови організації роботи учнів у парах і групах, застосування ІКТ, інтерактивних завдань, диференціації за рівнем складності. Це створює умови для формування ключових компетентностей, зокрема критичного, логічного та математичного мислення, уміння співпрацювати та аргументувати власну позицію. Застосування запропонованої методики дозволяє підвищити результативність навчання та забезпечити усвідомлене, глибоке опанування теореми Вієта учнями основної школи.

### **Методика вивчення оберненої теореми Вієта**

#### **Дидактичне значення оберненої теореми Вієта**

Обернена теорема Вієта є логічним продовженням вивчення прямої теореми у курсі алгебри 8–9 класів і спрямована на формування в учнів уміння складати квадратне рівняння за відомими коренями або за заданою сумою і добутком коренів. Ця тема має важливе місце в шкільному курсі, оскільки забезпечує розвиток алгебраїчного мислення, сприяє усвідомленню структури квадратного рівняння та формує здатність до узагальнення математичних закономірностей.

Вивчення оберненої теореми Вієта відіграє ключову роль у формуванні в учнів умінь розв'язувати задачі конструктивного характеру. Учні навчаються будувати рівняння відповідно до поставлених умов, працювати з різними формулюваннями математичних тверджень і виконувати перехід від словесної умови задачі до алгебраїчного запису. Таким чином зміцнюється розуміння функціональної залежності між коефіцієнтами рівняння та його коренями.

У більшості сучасних підручників математики для закладів загальної середньої освіти (зокрема, у виданнях авторських колективів Мерзляка та Бурди з Тарасенковою) обернена теорема Вієта подається після опрацювання прямої теореми, що забезпечує логічний перехід від аналізу коренів до побудови рівняння. Така послідовність відповідає принципам розвивального навчання, оскільки спирається на вже сформовані знання учнів, активізує їх пізнавальний досвід та сприяє усвідомленому засвоєнню нового матеріалу.

Дидактичне значення теми полягає також у тому, що вона продовжує формування компетентності математичного моделювання. Учні отримують можливість переконатися, що рівняння може бути інструментом для опису ситуацій, у яких відомі певні відношення між числами, величинами або змінними. Таким чином обернена теорема Вієта сприяє розвитку дослідницьких умінь та здатності застосовувати математику для розв'язання практичних задач.

Принципи та підходи до введення оберненої теореми Вієта (НУШ-формат)

Згідно з концепцією Нової української школи, навчання має бути діяльнісним, компетентісно спрямованим, орієнтованим на самостійність учнів і здобуття знань шляхом активної участі у навчальному процесі. Тому вивчення оберненої теореми Вієта доцільно організовувати не як повідомлення готової формули, а як процес її відкриття, осмислення та застосування у різних типах навчальних ситуацій.

Першим принципом є **діяльнісний підхід**. Учням пропонується серія завдань, у яких подано корені квадратних рівнянь, а необхідно встановити відповідні рівняння. Виконуючи подібні вправи, учні поступово виявляють закономірність, що коефіцієнти рівняння можна виразити через суму та добуток коренів. Завдяки цьому нове знання не нав'язується, а здобувається самостійно.

Другим принципом є **індуктивність**. Введення оберненої теореми рекомендується здійснювати через аналіз конкретних прикладів і поступовий перехід до узагальнення. Після виконання кількох завдань різного типу учні формулюють загальне правило: якщо числа  $p$  і  $q$  є коренями рівняння, то його можна записати у вигляді  $x^2 - (p + q)x + pq = 0$  (при  $a = 1$ ). Такий індуктивний шлях є доступним для учнів середньої ланки та відповідає принципу розвивального навчання.

Третім принципом є **інтерактивність** навчання. Доцільно застосовувати роботу в парах і групах, навчальні дискусії, інтерактивні вправи для перевірки гіпотез, дидактичні ігри. Це забезпечує високу пізнавальну активність учнів, сприяє формуванню критичного і логічного мислення.

Четвертим принципом виступає **практична спрямованість**. Обернена теорема Вієта має бути показана учням як інструмент, який спрощує побудову і аналіз квадратних рівнянь. Важливо включати задачі, які демонструють застосування теореми у реальних або наближених до життєвих ситуаціях, що підвищує мотивацію учнів.

*Ефективне засвоєння оберненої теореми Вієта забезпечується поетапною організацією уроку, що відповідає діяльнісному та*

*компетентнісному підходам. Орієнтовний алгоритм опрацювання теми може мати таку структуру.*

#### Етап 1. Актуалізація ключових знань

Учні пригадують зміст прямої теореми Вієта, умови її застосування, а також попередній досвід роботи з коренями квадратних рівнянь. Доцільно коротко повторити поняття суми і добутку коренів, варіанти формулювання умов задач, пов'язаних із коренями. Як швидко активність можна використати вправу “Мікрофон”: учні по черзі називають факти, пов'язані з прямою теоремою Вієта.

#### Етап 2. Створення проблемної ситуації і мотивація

Учитель пропонує учням завдання: “Відомо, що числа 3 і 5 є коренями деякого квадратного рівняння. Запишіть це рівняння”. Учні намагаються відновити рівняння, використовуючи відомі їм способи. У ході обговорення з'являється потреба знайти раціональніший спосіб побудови рівняння за коренями. Це мотивує до відкриття нового знання.

#### Етап 3. Відкриття оберненої теореми Вієта

Учням пропонується розв'язати декілька подібних завдань із заданими коренями. Поступово учні помічають закономірність: якщо корені рівняння дорівнюють  $p$  і  $q$ , то при  $a = 1$  його можна записати як  $x^2 - (p + q)x + pq = 0$ . Після аналізу результатів учні формулюють обернену теорему Вієта, яку записують у зошити. Учитель коригує формулювання за потреби.

#### Етап 4. Первинне закріплення

Учні виконують прості вправи на застосування оберненої теореми: складання рівняння за заданими коренями; за заданими сумою і добутком коренів; переведення словесних умов у математичну модель. Важливо звернути увагу на випадок  $a \neq 1$  та розглянути приклади, де коефіцієнт  $a$  не дорівнює одиниці.

#### Етап 5. Розширення та поглиблення вмінь

На цьому етапі учні застосовують обернену теорему Вієта у варіативних ситуаціях. Можна запропонувати вправи на відновлення рівняння на основі властивостей коренів (наприклад, корені відрізняються на 4; корені взаємно обернені; корені додатні числа, добуток дорівнює 6). Доцільно організувати групову роботу з аналізу задач підвищеної складності, що сприяє розвитку логічного мислення.

#### Етап 6. Рефлексія, самооцінювання і корекція

Учні оцінюють власний прогрес, виділяють корисні прийоми, які застосовували. Учитель разом з учнями формулює найбільш важливі висновки, що сприяє усвідомленню та закріпленню нового знання.

#### Система вправ для формування та закріплення навичок

Для якісного формування навичок застосування оберненої теореми Вієта необхідно забезпечити різнорівневий добір завдань. Пропонується орієнтовна система вправ.

##### Базові вправи

Скласти квадратне рівняння з коренями 4 і  $-2$ .



Скласти квадратне рівняння, якщо сума коренів дорівнює 7, а їх добуток дорівнює 12.

Знайти корені рівняння, складеного за умовою: сума коренів дорівнює  $-3$ , добуток 2.

Завдання середнього рівня

Побудуйте рівняння з коренями  $1/2$  і  $-3$ .

Складіть рівняння, якщо один корінь дорівнює 5, а другий удвічі більший.

Побудуйте рівняння, корені якого мають суму  $-1$  і добуток  $-6$ .  
Перевірте корені.

Завдання підвищеної складності

Складіть квадратне рівняння, корені якого відрізняються на 4 і мають добуток 21.

Один корінь рівняння дорівнює  $m$ , а другий на 3 менший.  
Побудуйте рівняння.

Знайдіть значення параметра  $k$ , за якого рівняння має корені, сума яких дорівнює 8.

Логічні та дослідницькі вправи

Чи існує квадратне рівняння з коренями 7 і  $-7$ , якщо добуток коренів має бути додатним? Поясніть.

Побудуйте всі можливі квадратні рівняння з коренями 2 і  $q$ , якщо  $q$  є цілим числом від  $-5$  до 5.

Доведіть або спростуйте твердження: «Якщо добуток коренів від'ємний, то корені різних знаків».

### **Використання інформаційно-комунікаційних технологій у вивченні формул Вієта**

Роль ІКТ у вивченні алгебри та їх значення в контексті НУШ

Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання математики відповідає стратегічним цілям Нової української школи, відповідно до яких учень виступає активним учасником освітнього процесу, а навчання має бути сучасним, практичним і орієнтованим на розвиток ключових компетентностей. Інтеграція ІКТ під час вивчення формул Вієта сприяє підвищенню мотивації учнів, створює умови для залучення їх до дослідницької діяльності, забезпечує можливість візуалізації математичних залежностей та формування навичок самостійного здобуття знань.

Застосування сучасних цифрових засобів дозволяє організувати освітній процес на засадах інтерактивності, співпраці, доступності та особистісно орієнтованого навчання. Учні отримують можливість експериментувати з математичними об'єктами, перевіряти власні гіпотези та аналізувати зміни у побудованих моделях. Це особливо важливо при вивченні формул Вієта, оскільки вони характеризуються тісним зв'язком між коефіцієнтами рівняння та властивостями його коренів, що легко демонструється з використанням спеціальних освітніх платформ.

ІКТ є засобом реалізації діяльнісного навчання, оскільки сприяють організації групової роботи, проведенню математичних

досліджень, створенню інтерактивних завдань та забезпечують індивідуалізацію навчання. Вони надають можливість учням отримувати миттєвий зворотний зв'язок, самостійно коригувати власні помилки та відстежувати прогрес у засвоєнні матеріалу. Таким чином, використання цифрових ресурсів у темі «Формули Вієта» відповідає сучасним вимогам до математичної освіти та сприяє розвитку математичної, інформаційно-цифрової та інноваційної компетентностей учнів.

#### Методичні підходи до інтеграції ІКТ при вивченні формул Вієта

Методично грамотне застосування цифрових інструментів у процесі вивчення формул Вієта ґрунтується на принципах системності, доцільності, інтерактивності та практичної спрямованості. Цифрові технології не повинні замінювати математичну суть навчання, а мають підсилювати розуміння, полегшувати пояснення складних моментів, сприяти самостійному виявленню закономірностей та розвитку аналітичного мислення.

По-перше, важливо забезпечити індуктивне входження у тему через візуалізацію. Під час вивчення як прямої, так і оберненої теорем Вієта можна використати динамічні математичні середовища (наприклад, GeoGebra або Desmos) для дослідження залежності між коефіцієнтами рівняння та коренями. Учні можуть маніпулювати значеннями  $a$ ,  $b$ ,  $c$  та спостерігати, як змінюються розв'язки, що дозволяє самостійно сформулювати правила та закономірності.

По-друге, доцільним є застосування інтерактивних вправ для закріплення навчального матеріалу. Платформи Wordwall,

LearningApps, Classtime, Quizizz та інші дають можливість створювати адаптивні завдання різного типу: на вибір правильної відповіді, відповідність, заповнення пропусків, математичні пазли, задачі з короткою відповіддю. Такі вправи підвищують зацікавленість учнів та сприяють формуванню міцних навичок.

По-третє, необхідно впроваджувати проблемно-пошукові методи із застосуванням ІКТ. Наприклад, учням можна запропонувати у групах дослідити за допомогою GeoGebra умови існування рівнянь із заданими властивостями коренів (рівні, протилежні, взаємно обернені тощо) та представити результати у вигляді короткої презентації або цифрової міні-моделі.

По-четверте, важливо забезпечити інтеграцію синхронного та асинхронного навчання. Для дистанційних або змішаних форм уроку можна використовувати відеоінструкції, інтерактивні дошки, цифрові робочі аркуші та онлайн-тести, що дозволяє організувати повноцінне, безперервне та ефективне опанування теми.

Огляд цифрових інструментів та можливості їх використання у вивченні формул Вієта

Ефективне впровадження ІКТ під час опрацювання теми «Формули Вієта» передбачає використання різних типів цифрових інструментів, що виконують навчальні, тренувальні, діагностичні та дослідницькі функції. Наведений нижче огляд містить найбільш доцільні платформи для практичного застосування у роботі з учнями.

**GeoGebra** надає можливість досліджувати залежність між коефіцієнтами квадратного рівняння та його коренями у динамічному

режимі. Учні можуть змінювати значення коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ ,  $c$  за допомогою повзунків і спостерігати, як це впливає на вигляд графіка параболи, розташування її нулів та вершини. Це сприяє глибшому розумінню зв'язку між коефіцієнтами та коренями рівняння, що лежить в основі формул Вієта. Учитель може запропонувати учням створити власні моделі або дослідити готові інтерактивні файли з параметричними рівняннями.

**Desmos** є зручним інструментом для візуалізації та функціональних досліджень. На платформі легко побудувати графіки квадратичних функцій, змінювати параметри рівняння та аналізувати корені за графіком. Для теми формул Вієта доцільно використовувати Desmos Activity Builder, де можна створити покрокове індуктивне дослідження: учні самостійно аналізують приклади, роблять висновки, переходять від графіка до формулювання теореми.

**LearningApps** дозволяє створювати інтерактивні вправи для перевірки знань, закріплення та тренування. Для теми формул Вієта корисними будуть шаблони «Відповідність», «Групування», «Заповнення пропусків», «Вікторина». Учитель може створити вправи на знаходження суми та добутку коренів, складання рівняння за коренями, визначення правильних тверджень про властивості коренів. Перевагою є миттєвий зворотний зв'язок і можливість працювати як індивідуально, так і в парах чи групах.

**Wordwall** доцільно використовувати для ігрових та тренувальних форм роботи. Платформа пропонує різноманітні види завдань, що сприяють залученню учнів до активної діяльності: «Правда чи неправда», «Знайди пару», «Випадкове колесо», «Анаграми». При

вивченні формул Вієта Wordwall допомагає закріпити базові поняття та понятійний апарат, адже учні в ігровій формі тренуються визначати суму і добуток коренів або встановлювати відповідність між рівнянням і властивостями його коренів.

**Quizizz** забезпечує проведення інтерактивних тестів у реальному часі, що стимулює пізнавальну активність учнів і створює елемент змагання. Учитель може підготувати тест із різними типами запитань: з вибором відповіді, числовою відповіддю, на відповідність, із таймером. Для формул Вієта доцільно використовувати Quizizz для швидкої діагностики знань, тематичних міні-контрольних та рефлексивних оцінювань після завершення теми.

**Classtime** є платформою для формувального оцінювання, що дозволяє відстежувати індивідуальний прогрес учнів. Особливо цінною є можливість використання завдань відкритого типу, логічних задач та завдань із поясненням. Під час вивчення формул Вієта можна запропонувати учням задачі з параметрами, складніші вправи на аналіз властивостей коренів та побудову рівнянь за умовою. Учитель отримує статистику результатів, що дає змогу коригувати подальшу роботу.

**Padlet** доцільно використовувати як інтерактивну онлайн-дошку для спільної діяльності учнів. У процесі вивчення формул Вієта учні можуть розміщувати на Padlet власні приклади, міні-розв'язання задач, дослідницькі проекти, пояснення або короткі відео з демонстрацією виконання завдання. Учитель може організувати колективний банк задач або віртуальну «галерею рішень», що розвиває уміння учнів презентувати результати та коментувати роботи однокласників.

**Miro або Google Jamboard** - інтерактивні дошки створюють умови для колективного обговорення ідей, проведення мозкових штурмів та спільного розв'язування задач. Під час вивчення формул Вієта можна організувати роботу в групах, де учні на спільній дошці виконують вправи, виділяють ключові закономірності, моделюють рівняння, виконують порівняння різних способів розв'язання. Такий формат сприяє розвитку навичок співпраці, критичного мислення та математичної комунікації.

### **Приклади інтерактивних завдань для уроків з формул Вієта**

Використання цифрових інструментів під час опрацювання теми «Формули Вієта» дозволяє урізноманітнити форми діяльності учнів та зробити процес навчання більш інтересовим, зорієнтованим на самостійне відкриття знань та їх практичне застосування. Наведені нижче приклади завдань можуть бути безпосередньо використані на уроці або у позакласній роботі.

Для тренування базових навичок можна створити вправи на платформах Wordwall або LearningApps, у яких учням пропонується встановити відповідність між квадратним рівнянням і сумою або добутком його коренів. Такі вправи можуть бути реалізовані у вигляді гри «Знайди пару» або «Відповідність»:

- Знайдіть пару: досягніть відповідності між рівнянням та сумою коренів.
- Оберіть правильне твердження щодо коренів рівняння: додатні, від'ємні, протилежні, рівні.

- Розподіліть рівняння на три групи: корені додатні, корені від'ємні, корені різних знаків.

Ці завдання можна виконувати індивідуально або у форматі командного змагання.

Для створення умов самотійного «відкриття» теоретичних положень можна використати Desmos або GeoGebra. Учні отримують завдання змінювати коефіцієнти квадратного рівняння та спостерігати, як змінюються його корені. Наприклад:

- Маніпулюючи повзунками  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , визначте, як зміна коефіцієнта  $b$  впливає на суму коренів.
- Дослідіть, як добуток коренів залежить від коефіцієнта  $c$ , якщо  $a = 1$ .
- Зробіть висновок: як пов'язані корені з коефіцієнтами квадратного рівняння.

Учні можуть презентувати результати у вигляді коротких відео, скріншотів або міні-доповідей.

Для активізації мислення можна створити математичні пазли або квест-завдання, які учні виконують у групах. Такі завдання можна реалізувати через LearningApps, Wordwall або Padlet у вигляді віртуальної дошки:

- Розв'яжіть серію завдань, кожне з яких розкриває частину шифру. Визначте ключове слово.
- Зберіть пазл: кожен шматочок містить рівняння, суму, добуток або корені. Потрібно скласти правильні трійки.



- Дослідницький ланцюжок: виконайте 6 міні-завдань, правильні відповіді яких утворюють пароль.

Для перевірки засвоєння матеріалу доцільно використовувати платформи Quizizz або Classtime, що дозволяють здійснювати миттєве формувальне оцінювання. Учителю рекомендується включати завдання відкритого типу, що вимагають короткого пояснення:

- Складіть рівняння за заданою сумою та добутком і поясніть, як ви його утворили.
- Наведіть приклад рівняння з коренями 2 і  $-3$ , а потім сформулюйте висновок про суму та добуток.
- Виконайте завдання «3 питання – 3 рівні»: базовий, середній, ускладнений.

Для розвитку дослідницьких і комунікативних навичок можна використати Padlet або Miro. Учням пропонується виконати групове завдання:

- Дослідіть властивості рівнянь, у яких корені взаємно обернені, та створіть цифрову міні-презентацію.
- Побудуйте серію рівнянь, корені яких різняться на фіксоване число, і зобразіть результати на спільній дошці.
- Виконайте міні-проєкт «Квадратні рівняння навколо нас»: знайдіть приклади задач із реального життя, де корисно використати формули Вієта.

Такі завдання підсилюють практичний компонент навчання та сприяють формуванню міжпредметних зв'язків.

Організація дистанційного та змішаного навчання з використанням ІКТ

Застосування цифрових інструментів під час вивчення формул Вієта є особливо ефективним у форматах дистанційної та змішаної освіти. Використання ІКТ дає змогу забезпечити безперервність навчання, створити умови для індивідуальної траєкторії учня, а також підтримувати зворотний зв'язок і контроль за прогресом.

По-перше, для пояснення нового матеріалу доцільно використовувати відеоконтент. Учитель може підготувати власні відеоінструкції або скористатися матеріалами з освітніх платформ (наприклад, YouTube-канали, онлайн-уроки, інтерактивні симуляції), які містять пояснення формул Вієта з прикладами. Це дозволяє учням опрацьовувати матеріал у зручному темпі та повертатися до складних моментів за потреби.

По-друге, важливо забезпечити інтерактивність під час онлайн-уроків. У синхронному режимі можна організувати роботу на інтерактивних дошках (Jamboard, Miro), де учні виконують спільні завдання, аналізують рівняння, порівнюють корені та формулюють висновки. Такі активності сприяють формуванню навичок математичної комунікації та співпраці.

По-третє, для закріплення знань та перевірки засвоєння матеріалу доцільно використовувати онлайн-тестування, тренажери та інтерактивні вправи. Платформи Classtime, Quizizz, LearningApps, Wordwall дозволяють організувати швидку діагностику, тематичні тренування, а також проводити формувальне й підсумкове оцінювання з

теми «Формули Вієта». Учень отримує миттєвий результат, а вчитель — аналітику виконання завдань.

По-четверте, під час змішаного навчання важливо дотримуватися принципу розумного балансу між традиційними та цифровими формами роботи. Цифровий компонент має посилювати можливості учнів у засвоєнні матеріалу, забезпечувати варіативність завдань та індивідуалізацію навчання, але не замінювати повністю роботу з підручником і письмову практику.

Застосування ІКТ у дистанційному та змішаному форматах створює умови для формування важливих умінь ХХІ століття: самостійного навчання, цифрової грамотності, уміння навчатися в команді та ефективно використовувати інформаційні ресурси.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі вивчення формул Вієта значно підвищує ефективність навчання, сприяє активізації пізнавальної діяльності учнів, розвитку їх логічного мислення, дослідницьких та цифрових компетентностей. ІКТ забезпечують можливість візуалізації математичних залежностей, організації інтерактивної та індивідуалізованої роботи, застосування диференційованих завдань і створюють умови для творчості та самоосвіти учнів.

Використання різних цифрових інструментів дозволяє реалізувати діяльнісний і компетентнісний підходи відповідно до вимог Нової української школи. Платформи GeoGebra, Desmos, LearningApps, Wordwall, Quizizz, Classtime, Padlet, Miro та інші сприяють засвоєнню

формул Вієта на різних етапах навчання: від первинного сприйняття матеріалу до його закріплення, застосування та узагальнення.

Ефективність використання ІКТ значно зростає за умов системності, методичної продуманості та орієнтації на результат. Цифрові засоби повинні бути не самоціллю, а дієвим інструментом формування в учнів глибокого розуміння теми та стійких навчальних умінь.

### **Висновки до розділу 3**

У розділі 3 узагальнено основні напрями застосування теорем Вієта та окреслено методичні підходи до їх вивчення у шкільному курсі алгебри. Показано, що формули Вієта дають змогу розв'язувати типові та нестандартні задачі через роботу із сумою і добутком коренів, побудову рівнянь за заданими властивостями, спрощення виразів, аналіз параметричних залежностей і встановлення зв'язків із геометричними інтерпретаціями. Методичний блок підтвердив доцільність поетапного формування вмінь (від відтворення співвідношень до застосування в комбінованих задачах), використання «мови» симетричних сум, диференціації завдань та залучення ІКТ для візуалізації й формувального оцінювання. Особливої уваги потребують типові труднощі учнів (підміна знаків, нерозуміння зв'язку з коефіцієнтами, формальне застосування без аналізу умови), які долаються системою тренувальних вправ, роботою з помилками та використанням опорних схем.

## ЗАГАЛЬНІ ВИСНОВКИ

У процесі виконання магістерської роботи на тему «Пряма і обернена теореми Вієта для алгебраїчних рівнянь та їх застосування» було досягнуто поставлену мету та виконано всі основні завдання дослідження.

Проаналізовано історичні аспекти розвитку алгебри — від давніх цивілізацій до епохи Відродження. Установлено, що саме Франсуа Вієт заклав основи символічної алгебри, ввів поняття коефіцієнта, невідомої та аналітичного зв'язку між ними [5; 30; 32].

Розглянуто пряму і обернену теореми Вієта для алгебраїчних рівнянь другого та вищих степенів. Доведено, що формули Вієта є частковим випадком загальної системи симетричних функцій, що пов'язують корені многочлена з його коефіцієнтами [33; 23].

Узагальнено застосування теорем Вієта при розв'язуванні алгебраїчних задач:

- складання рівнянь за заданими властивостями коренів;
- спрощення виразів без знаходження коренів;
- дослідження рівнянь із параметрами;
- розв'язування геометричних і логічних задач.

Формули Вієта виявилися ефективним інструментом для аналітичного мислення та оптимізації розв'язань [6; 2; 13].

Розроблено методичні рекомендації щодо викладання теми «Формули Вієта» у шкільному курсі математики. Запропоновано систему вправ трьох рівнів складності, яка формує поступовий перехід

від відтворення знань до творчих досліджень. Показано роль використання ІКТ (GeoGebra, Desmos) для візуалізації залежностей між коефіцієнтами й коренями рівнянь [10; 7].

Установлено педагогічне значення теми. Вивчення теорем Вієта сприяє формуванню в учнів логічного, аналітичного та символічного мислення, умінь узагальнювати, робити висновки та застосовувати знання в нових ситуаціях [14; 9].

Отже, прямі та обернені теореми Вієта не лише є класичним результатом алгебри, але й мають потужний пізнавальний і виховний потенціал, оскільки навчають логічного підходу, аналітичності мислення й уміння бачити закономірності.

Їх використання у сучасному навчальному процесі залишається актуальним і перспективним напрямом розвитку методики навчання математики.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П. Алгебра. 10 клас / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – Київ : Генеза, 2018. – 256 с.
2. Бевз Г. П. Теореми Вієта в шкільному курсі математики // Математика в школі. – 2017. – № 5. – С. 21–25.
3. Вікіпедія. Формули Вієта [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Формули\\_Вієта](https://uk.wikipedia.org/wiki/Формули_Вієта) (дата звернення: 18.12.2025).
4. Вікіпедія. Франсуа Вієт [Електронний ресурс]. – Режим доступу: [https://uk.wikipedia.org/wiki/Франсуа\\_Вієт](https://uk.wikipedia.org/wiki/Франсуа_Вієт) (дата звернення: 27.10.2025).
5. Вієт Ф. Математичні твори / Ф. Вієт. – Київ : Наукова думка, 1986. – 312 с.
6. Головін Н. О. Теореми Вієта і властивості коренів рівнянь // Математика в сучасній школі. – 2018. – № 9. – С. 33–39.
7. Козак Л. В. Методика розв’язування задач із застосуванням формул Вієта / Л. В. Козак. – Тернопіль : Астон, 2015. – 72 с.
8. Кравчук М. П. Курс елементарної математики / М. П. Кравчук. – Київ : Рад. школа, 1962. – 428 с.
9. Кузьміна Н. В. Розвиток логічного мислення учнів через задачі на формули Вієта // Математика в сучасній школі. – 2020. – № 3. – С. 41–45.

10. Мартинюк О. Л. Використання ІКТ при вивченні алгебраїчних рівнянь // Інформатика та освіта. – 2021. – № 1. – С. 58–62.
11. Мерзляк А. Г., Полонський В. Б., Якір М. С. Алгебра і початки аналізу. 10–11 класи. – Харків : Гімназія, 2019. – 384 с.
12. Нелін Є. П. Алгебра в таблицях (з додатком) : навч. посіб. для 7–11 класів / Є. П. Нелін. – Харків : Світ дитинства, 1998. – 116 с.
13. Оріщенко Т. М. Розв’язування задач з параметрами за допомогою формул Вієта // Математика в школі. – 2016. – № 12. – С. 15–19.
14. Слєпкань З. І. Методика навчання математики / З. І. Слєпкань. – Київ : Знання, 2006. – 430 с.
15. Черкасова І. В. Методичні рекомендації до теми «Квадратне рівняння» / І. В. Черкасова. – Київ : ОРІОН, 2019. – 68 с.
16. Ізюмченко Л., Ткачевська А. Теорема Вієта: природничо-математичний і краєзнавчий аспект // Фізико-математична освіта. – 2024. – Т. 39, № 4. – С. 20–27.
17. Істер О. С. Алгебра. 8–9 класи / О. С. Істер. – Київ : Генеза, 2020. – 312 с.
18. Artin M. Algebra / M. Artin. – Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2011. – 624 p.
19. Britannica. François Viète [Electronic resource]. – Available at: <https://www.britannica.com/biography/Francois-Viete> (accessed: 18.12.2025).



20. Cox D. A. Galois Theory / D. A. Cox. – New York : Wiley, 2004. – 320 p.
21. Desmos [Electronic resource]. – Available at:  
<https://www.desmos.com> (accessed: 18.12.2025).
22. Dummit D. S., Foote R. M. Abstract Algebra / D. S. Dummit, R. M. Foote. – 3rd ed. – Hoboken, NJ : Wiley, 2004. – 932 p.
23. Encyclopedia of Mathematics. Viète theorem [Electronic resource]. – Available at: [https://encyclopediaofmath.org/wiki/Vi%C3%A8te\\_theorem](https://encyclopediaofmath.org/wiki/Vi%C3%A8te_theorem) (accessed: 18.12.2025).
24. Gallian J. A. Contemporary Abstract Algebra / J. A. Gallian. – 10th ed. – Boca Raton : Chapman & Hall/CRC, 2021. – 654 p.
25. Gallica (BnF). In artem analyticem isagoge (F. Viète, 1591) [Electronic resource]. – Available at:  
<https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k108865t.image> (accessed: 18.12.2025).
26. GeoGebra. Visualization of Vieta's relations [Electronic resource]. – Available at: <https://www.geogebra.org/> (accessed: 18.12.2025).
27. Herstein I. N. Topics in Algebra / I. N. Herstein. – New York : Wiley, 2006. – 388 p.
28. Hungerford T. W. Algebra / T. W. Hungerford. – New York : Springer, 2003. – 536 p.
29. Khan Academy. Quadratic Equations and Vieta's Theorem [Electronic resource]. – Available at:  
<https://www.khanacademy.org/math/algebra> (accessed: 18.12.2025).

30. Kline M. *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* / M. Kline. – New York : Oxford University Press, 1990. – 1292 p.
31. Lang S. *Algebra* / S. Lang. – 3rd ed. – New York : Springer, 2002. – 914 p.
32. MacTutor History of Mathematics. François Viète [Electronic resource]. – Available at: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Viete/> (accessed: 18.12.2025).
33. MathWorld. Vieta's Formulas [Electronic resource]. – Available at: <https://mathworld.wolfram.com/VietasFormulas.html> (accessed: 18.12.2025).
34. OpenStax. *Algebra and Trigonometry 2e* [Electronic resource]. – Available at: <https://openstax.org/details/books/algebra-and-trigonometry-2e> (accessed: 18.12.2025).
35. Stedall J. *Mathematics Emerging: A Sourcebook 1540–1900* / J. Stedall. – Oxford ; New York : Oxford University Press, 2008. – 653 p.
36. Stewart I. *Galois Theory* / I. Stewart. – London : Chapman & Hall, 2015. – 272 p.
37. Stillwell J. *Mathematics and Its History* / J. Stillwell. – 3rd ed. – New York : Springer, 2010. – 660 p.
38. Viète F. *In artem analyticam isagoge. Seorsim excussa ab Opere restitutae mathematicae analyseos, seu Algebra nova* / F. Viète. – Turonis [Tours] : apud Jametium Mettayer, 1591.
39. Viète F. *Opera Mathematica* / F. Viète. – Leiden : Elzevier, 1646. – 620 p.

40. Waerden B. L. van der. A History of Algebra: From al-Khwārizmī to Emmy Noether / B. L. van der Waerden. – Berlin ; Heidelberg : Springer, 1985. – 274 p.

41. WolframAlpha [Electronic resource]. – Available at: <https://www.wolframalpha.com> (accessed: 18.12.2025).

42. YouTube. Vieta's Theorem Explained (Mathologer) [Electronic resource]. – Available at: [https://www.youtube.com/watch?v=s4xnsSF\\_g2Y](https://www.youtube.com/watch?v=s4xnsSF_g2Y) (accessed: 18.12.2025).

## ДОДАТОК А

**ДИДАКТИЧНІ МАТЕРІАЛИ ДО ТЕМИ «ФОРМУЛИ ВІЄТА»****А.1. Конспект уроку 1**

Тема: Формули Вієта для квадратного рівняння. Зв'язок між коефіцієнтами та коренями.

Клас: 10 (рівень стандарт/профіль – за потреби).

Тип уроку: вивчення нового матеріалу з первинним закріпленням.

Мета уроку

навчальна: сформувати уявлення про формули Вієта; навчити застосовувати їх для знаходження суми та добутку коренів квадратного рівняння і для складання рівняння за відомими коренями;

розвивальна: розвивати логічне мислення, вміння міркувати від загального до часткового, навички самоперевірки;

виховна: формувати акуратність у записах, відповідальність за результат, культуру математичного мовлення.

*Очікувані результати навчання*

учень/учениця пояснює зміст формул Вієта для рівняння виду  $x^2 + px + q = 0$ ;

обчислює суму і добуток коренів без знаходження самих коренів;

перевіряє правильність знайдених коренів за допомогою формул Вієта;

складає квадратне рівняння за заданими коренями.

Обладнання та ресурси: підручник/зошит, дошка або мультимедійна дошка; картки-опори (див. А.3); за наявності: комп'ютер/проектор (слайд зі схемою та прикладами).

Хід уроку (орієнтовний розподіл часу – 45 хв)

Ключові формули (для запису в зошит)

Для рівняння  $x^2 + px + q = 0$  ( $x_1, x_2$  – корені):

$$x_1 + x_2 = -p;$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Для рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ):

$$x_1 + x_2 = -b/a;$$

$$x_1 \cdot x_2 = c/a.$$

## А.2. Конспект уроку 2

*Тема: Застосування формул Вієта. Складання рівнянь за коренями. Задачі з параметрами (вступний рівень).*

Клас: 10 (або 9 – залежно від програми).

Тип уроку: формування вмінь і навичок (практичний).

Мета уроку: закріпити вміння застосовувати формули Вієта у стандартних і прикладних задачах; навчити складати квадратне рівняння за умовами на суму/добуток коренів; формувати навички розв'язування задач із параметром з опорою на суму та добуток коренів.

### Очікувані результати

учень/учениця розв'язує задачі на знаходження параметра, якщо відомі сума/добуток коренів; складає рівняння за заданими коренями або за заданими симетричними виразами; пояснює хід розв'язання та робить перевірку результату.

Хід уроку (45 хв)

Домашнє завдання (варіативно)

обов'язкове: 6–10 задач на складання рівнянь і симетричні вирази;

за бажанням: задача з параметром (1–2), підготовка міні-пояснення «Як формули Вієта економлять час».

### *А.3. Картки з опорними схемами та типові перетворення*

#### **Картка 1. Формули Вієта (шпаргалка)**

Якщо  $x^2 + px + q = 0$  має корені  $x_1, x_2$ , то:  $x_1 + x_2 = -p$ ,  $x_1 \cdot x_2 = q$ .

Якщо  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ), то:  $x_1 + x_2 = -b/a$ ,  $x_1 \cdot x_2 = c/a$ .

Сенс: коефіцієнти «зашифровують» суму та добуток коренів.

Приклад(и)

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 7, \quad x_1 \cdot x_2 = 10.$$

$$2x^2 + 3x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = -3/2, \quad x_1 \cdot x_2 = -5/2.$$

#### **Картка 2. Алгоритм застосування формул Вієта**

- 1) Приведіть рівняння до вигляду  $ax^2 + bx + c = 0$  (за потреби перенесіть усе в одну частину).
- 2) Визначте  $a, b, c$ . Якщо зручно – поділіть на  $a$ , щоб отримати  $x^2 + px + q = 0$ .
- 3) Запишіть:  $S = x_1 + x_2 = -b/a$ ,  $P = x_1 \cdot x_2 = c/a$ .
- 4) Якщо потрібні вирази типу  $x_1^2 + x_2^2$ , використайте перетворення з Картки 3.

#### Приклад(и)

Не знаходячи коренів  $x^2 - 6x + 5 = 0$ :  $S = 6, P = 5 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 36 - 10 = 26$ .

#### Картка 3. Типові перетворення через $S$ і $P$

Позначення:  $S = x_1 + x_2$ ,  $P = x_1 \cdot x_2$ .

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = S^3 - 3PS.$$

$$(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P.$$

$$1/x_1 + 1/x_2 = S/P \text{ (за умови } P \neq 0\text{)}.$$

$$x_1/x_2 + x_2/x_1 = (S^2 - 2P)/P \text{ (за умови } P \neq 0\text{)}.$$

#### Приклад(и)

Для  $x^2 + 4x - 5 = 0$ :  $S = -4, P = -5 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 16 - 4 \cdot (-5) = 36 \Rightarrow |x_1 - x_2| = 6$ .

#### Картка 4. Як скласти рівняння за коренями

Якщо корені задані:  $x_1, x_2$ , то рівняння:  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ .

Після розкриття дужок:  $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0$ .

Якщо задані  $S$  і  $P$ :  $x^2 - Sx + P = 0$ .

Приклад(и)

Корені 2 і 3  $\Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ .

$S = 5, P = 6 \Rightarrow x^2 - 5x + 6 = 0$ .

Картка 5. Швидка перевірка знайдених коренів

Якщо ви знайшли  $x_1$  і  $x_2$  (будь-яким способом), перевірте:

1)  $x_1 + x_2 \stackrel{?}{=} -b/a$ ;

2)  $x_1 \cdot x_2 \stackrel{?}{=} c/a$ .

Це швидше, ніж підставляти кожен корінь у рівняння.

Приклад(и)

$x^2 - 6x + 5 = 0$ , корені 1 і 5:  $1 + 5 = 6$ ,  $1 \cdot 5 = 5$  – збігається.

Картка 6. Типові помилки і як їх уникнути

Плутанина знаків: у  $x^2 + px + q = 0$  сума коренів дорівнює  $-p$  (з «мінусом»).

Забули поділити на  $a$  у  $ax^2 + bx + c = 0$ :  $S = -b/a$ ,  $P = c/a$ .

Переплутали знак у рівнянні  $x^2 - Sx + P = 0$  (перед  $S$  завжди «мінус»).



Для дробових виразів з коренями перевірте умову  $P \neq 0$  (щоб не ділити на нуль).

Самоперевірка

Міні-чеклист: (1) стандартний вигляд? (2)  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ? (3) знаки  $S$  і  $P$

## ДОДАТОК Б

## ДОБІРКА ЗАДАЧ І ВПРАВ ДО ТЕМИ «ФОРМУЛИ ВІЄТА»

## Б.1. Вправи базового рівня (застосування формул Вієта)

Використовуйте формули Вієта для квадратного рівняння  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ):

$$S = x_1 + x_2 = -b/a;$$

$$P = x_1 \cdot x_2 = c/a.$$

У більшості завдань НЕ потрібно знаходити корені, якщо це не вимагається умовою.

Для рівняння  $x^2 - 9x + 14 = 0$  знайдіть  $S$  та  $P$ .

Для рівняння  $x^2 + 5x - 6 = 0$  знайдіть суму та добуток коренів.

Для рівняння  $2x^2 - 7x + 3 = 0$  знайдіть  $S$  та  $P$ .

Не знаходячи коренів рівняння  $x^2 - 4x - 5 = 0$ , обчисліть  $x_1^2 + x_2^2$ .

Не знаходячи коренів рівняння  $x^2 + 6x + 1 = 0$ , обчисліть  $(x_1 - x_2)^2$ .

Для рівняння  $x^2 - 2x - 8 = 0$  перевірте, чи числа 4 і  $-2$  є його коренями (через формули Вієта).

Для рівняння  $x^2 + 3x - 10 = 0$  перевірте, чи числа 2 і  $-5$  є його коренями (через формули Вієта).

Складіть квадратне рівняння, корені якого 1 і 7.

Складіть квадратне рівняння, корені якого  $-3$  і 5.

Складіть квадратне рівняння, якщо  $S = 8$ ,  $P = 15$ .

Складіть квадратне рівняння, якщо  $S = -1$ ,  $P = -12$ .

Для рівняння  $x^2 - 6x + 5 = 0$  знайдіть  $1/x_1 + 1/x_2$  (вважаючи, що корені ненульові).

Для рівняння  $x^2 + 2x - 3 = 0$  знайдіть  $x_1^3 + x_2^3$ .

Для рівняння  $x^2 - 5x + 1 = 0$  знайдіть значення виразу  $x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2$ .

Для рівняння  $3x^2 + 12x + 7 = 0$  знайдіть  $x_1^2 + x_2^2$ .

Для рівняння  $x^2 + px + q = 0$  відомо, що  $S = -6$  і  $P = 8$ . Знайдіть  $p$  і  $q$ .

Для рівняння  $x^2 + px + q = 0$  відомо, що  $S = 3$  і  $P = -10$ . Знайдіть  $p$  і  $q$ .

Не розв'язуючи рівняння  $x^2 - 10x + 21 = 0$ , знайдіть різницю коренів  $|x_1 - x_2|$ .

Для рівняння  $x^2 + 4x + 4 = 0$  знайдіть  $S$ ,  $P$  та зробіть висновок про кількість різних дійсних коренів.

Для рівняння  $x^2 - 1 = 0$  знайдіть суму та добуток коренів.

Відповіді (коротко) до вправ Б.1

$S=9$ ,  $P=14$ .

$S=-5$ ,  $P=-6$ .

$S=7/2$ ,  $P=3/2$ .

$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 16 - 2(-5) = 26$ .

$$(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P = 36 - 4 \cdot 1 = 32.$$

$$\text{Так } (S=2, P=-8).$$

$$\text{Так } (S=3, P=-10).$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0.$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0.$$

$$x^2 + x - 12 = 0.$$

$$S/P = 6/5.$$

$$S^3 - 3PS = (-2)^3 - 3(-3)(-2) = -8 - 18 = -26 \text{ (для } x^2 + 2x - 3 = 0: S=-2, P=-3).$$

$$x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2 = x_1 x_2 (x_1 + x_2) = P \cdot S = 1 \cdot 5 = 5 \text{ (для } x^2 - 5x + 1 = 0: S=5, P=1).$$

$$S=-4, P=7/3 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 16 - 14/3 = 34/3.$$

$$p=6, q=8.$$

$$p=-3, q=-10.$$

$$|x_1 - x_2| = \sqrt{(S^2 - 4P)} = \sqrt{(100 - 84)} = 4.$$

$$S=-4, P=4; \text{ один корінь кратності } 2.$$

$$S=0, P=-1.$$

Б.2. Завдання підвищеного рівня (параметри, доведення, оцінка коренів)

1. У задачах використовуйте позначення  $S = x_1 + x_2$ ,  $P = x_1 x_2$  та перетворення симетричних виразів.
2. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , за яких рівняння  $x^2 - 2ax + a = 0$  має корені, сума яких дорівнює їх добутку.
3. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , за яких рівняння  $x^2 + ax + 1 = 0$  має корені різних знаків.
4. Знайдіть усі значення параметра  $a$ , за яких рівняння  $x^2 - ax + 4 = 0$  має два додатні корені.
5. Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Обчисліть значення виразу  $1/(x_1 - 1) + 1/(x_2 - 1)$ .
6. Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 + px + q = 0$ . Доведіть:  $x_1^2 + x_2^2 = p^2 - 2q$ .
7. Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 + px + q = 0$  ( $x_1, x_2 \neq 0$ ). Доведіть:  $1/x_1 + 1/x_2 = -p/q$ .
8. Знайдіть  $p$ , якщо рівняння  $x^2 + px + 9 = 0$  має корені, один з яких у 2 рази більший за інший.
9. Знайдіть усі  $a$ , за яких рівняння  $x^2 - (a+3)x + a = 0$  має корені, що відрізняються на 1.
10. Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 4x + 1 = 0$ . Знайдіть  $x_1^4 + x_2^4$ .
11. Доведіть, що для будь-якого квадратного рівняння  $x^2 + px + q = 0$  виконується:  $(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q$ .
12. Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 6x + 2 = 0$ . Оцініть суму  $x_1^2 + x_2^2$  і порівняйте її з 30.
13. Знайдіть усі значення  $a$ , за яких рівняння  $x^2 + (a-2)x + (a-3) = 0$  має цілий корінь.
14. Знайдіть найменше можливе значення  $x_1^2 + x_2^2$ , якщо корені рівняння  $x^2 + px + q = 0$  дійсні та  $P = q = 1$ .

15. Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 + 2x - 5 = 0$ . Знайдіть  $x_1/x_2 + x_2/x_1$ .

16. Знайдіть  $a$ , якщо рівняння  $x^2 - (2a-1)x + (a^2 - a) = 0$  має корінь  $0,5$ .

### Б.3. Еталонні розв'язання (10 задач з поясненнями)

Наведені розв'язання можна використати як зразок оформлення та міркувань.

#### Еталон 1

Умова: Не знаходячи коренів рівняння  $x^2 - 4x - 5 = 0$ , обчисліть  $x_1^2 + x_2^2$ .

Розв'язання:

За формулами Вієта:  $S = x_1 + x_2 = 4$ ,  $P = x_1 x_2 = -5$ .

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = S^2 - 2P.$$

$$\text{Підставимо: } S^2 - 2P = 16 - 2(-5) = 26.$$

Відповідь: 26.

#### Еталон 2

Умова: Складіть квадратне рівняння, корені якого  $-3$  і  $5$ .

Розв'язання:

Якщо корені  $x_1$  і  $x_2$ , то  $(x - x_1)(x - x_2) = 0$ .

$$(x + 3)(x - 5) = 0.$$

Розкриємо дужки:  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .

Відповідь:  $x^2 - 2x - 15 = 0$ .

## Еталон 3

Умова: Знайдіть  $p$ , якщо рівняння  $x^2 + px + 9 = 0$  має корені, один з яких у 2 рази більший за інший.

Розв'язання:

Нехай корені:  $x_1 = 2t$ ,  $x_2 = t$ .

Тоді  $P = x_1 x_2 = 2t^2$ . За Вієта  $P = 9 \Rightarrow 2t^2 = 9 \Rightarrow t^2 = 9/2$ .

Сума  $S = x_1 + x_2 = 3t$ . За Вієта  $S = -p \Rightarrow p = -3t$ .

Оскільки  $t = \pm 3/\sqrt{2}$ , то  $p = -3(\pm 3/\sqrt{2}) = \mp 9/\sqrt{2} = \pm(-9/\sqrt{2})$ .

Зазвичай відповідь подають як два значення:  $p = 9/\sqrt{2}$  або  $p = -9/\sqrt{2}$  (з урахуванням вибору знака  $t$ ).

Відповідь:  $p = \pm 9/\sqrt{2}$  (або  $p = \pm(9\sqrt{2}/2)$ ).

## Еталон 4

Умова: Знайдіть усі  $a$ , за яких рівняння  $x^2 - 2ax + a = 0$  має корені, сума яких дорівнює їх добутку.

Розв'язання:

За Вієта:  $S = 2a$ ,  $P = a$ .

Умова:  $S = P \Rightarrow 2a = a$ .

Звідси  $a = 0$ .

Перевірка: при  $a=0$  маємо  $x^2 = 0$ , корені  $0$  і  $0$ ; сума  $0$ , добуток  $0$  – виконується.

Відповідь:  $a = 0$ .

Еталон 5

Умова: Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Обчисліть  $1/(x_1-1) + 1/(x_2-1)$ .

Розв'язання:

За Вієта:  $S = 5, P = 6$ .

Обчислимо:  $1/(x_1-1) + 1/(x_2-1) = [(x_2-1)+(x_1-1)]/[(x_1-1)(x_2-1)]$ .

Чисельник:  $(x_1+x_2) - 2 = S - 2 = 3$ .

Знаменник:  $(x_1-1)(x_2-1) = x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1 = P - S + 1 = 6 - 5 + 1 = 2$ .

Отже, значення дорівнює  $3/2$ .

Відповідь:  $3/2$ .

Еталон 6

Умова: Доведіть, що для  $x^2 + px + q = 0$  виконується:  $(x_1 - x_2)^2 = p^2 - 4q$ .

Розв'язання:

Знаємо:  $S = x_1+x_2 = -p, P = x_1x_2 = q$ .

Розклад:  $(x_1-x_2)^2 = (x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2 = S^2 - 4P$ .

Підставимо  $S$  і  $P$ :  $S^2 - 4P = (-p)^2 - 4q = p^2 - 4q$ .

Відповідь: Доведено.



## Еталон 7

Умова: Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 4x + 1 = 0$ . Знайдіть  $x_1^4 + x_2^4$ .

Розв'язання:

За Вієта:  $S = 4, P = 1$ .

Спочатку:  $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 16 - 2 = 14$ .

Далі:  $x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2(x_1^2 x_2^2)$ .

Але  $x_1^2 x_2^2 = (x_1 x_2)^2 = P^2 = 1$ .

Отже:  $x_1^4 + x_2^4 = 14^2 - 2 \cdot 1 = 196 - 2 = 194$ .

Відповідь: 194.

## Еталон 8

Умова: Для яких  $a$  рівняння  $x^2 - (a+3)x + a = 0$  має корені, що відрізняються на 1?

Розв'язання:

Нехай корені  $x_1, x_2$ , тоді  $|x_1 - x_2| = 1 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1$ .

За Вієта:  $S = x_1 + x_2 = a + 3, P = x_1 x_2 = a$ .

$(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P = (a + 3)^2 - 4a$ .

Прирівняємо до 1:  $(a + 3)^2 - 4a = 1$ .

Розкриємо:  $a^2 + 6a + 9 - 4a = 1 \Rightarrow a^2 + 2a + 8 = 0$ .

$$D = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 4 - 32 = -28 < 0, \text{ дійсних а немає.}$$

Відповідь: Дійсних значень а немає (за умови роботи з дійсними числами).

Еталон 9

Умова: Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 - 6x + 2 = 0$ . Оцініть  $x_1^2 + x_2^2$  і порівняйте з 30.

Розв'язання:

За Вієта:  $S = 6, P = 2$ .

$$x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 36 - 4 = 32.$$

$32 > 30$ , отже сума квадратів коренів більша за 30.

Відповідь:  $x_1^2 + x_2^2 = 32$ , це більше за 30.

Еталон 10

Умова: Нехай  $x_1, x_2$  – корені рівняння  $x^2 + 2x - 5 = 0$ . Знайдіть  $x_1/x_2 + x_2/x_1$ .

Розв'язання:

За Вієта:  $S = -2, P = -5$  ( $P \neq 0$ , тому вираз коректний).

$$x_1/x_2 + x_2/x_1 = (x_1^2 + x_2^2)/(x_1x_2) = (S^2 - 2P)/P.$$

$$S^2 - 2P = 4 - 2(-5) = 14.$$

$$\text{Отже, } (S^2 - 2P)/P = 14/(-5) = -14/5.$$

Відповідь:  $-14/5$ .

## ДОДАТОК В

КОНТРОЛЬНА (ДІАГНОСТИЧНА) РОБОТА З ТЕМИ  
«ФОРМУЛИ ВІЄТА»

Призначення: перевірка вмінь застосовувати формули Вієта, працювати із симетричними виразами, складати рівняння за коренями, виконувати задачі з параметром.

Час виконання: 40–45 хв. Дозволено: калькулятор (за рішенням учителя).

## Варіант 1

Виконайте завдання. У задачах, де це можливо, використовуйте формули Вієта без знаходження коренів.

Для рівняння  $x^2 - 7x + 10 = 0$  знайдіть суму та добуток коренів.

Не знаходячи коренів рівняння  $x^2 - 4x - 5 = 0$ , обчисліть  $x_1^2 + x_2^2$ .

Складіть квадратне рівняння, корені якого 2 і  $-5$ .

Для рівняння  $2x^2 + 3x - 5 = 0$  знайдіть значення виразу  $1/x_1 + 1/x_2$ .

Знайдіть  $p$ , якщо рівняння  $x^2 + px + 9 = 0$  має корені, один з яких у 2 рази більший за інший.

Знайдіть усі значення  $a$ , за яких рівняння  $x^2 - 2ax + a = 0$  має корені, сума яких дорівнює їх добутку.

Чернетка (місце для обчислень)

## Варіант 2

Виконайте завдання. У задачах, де це можливо, використовуйте формули Вієта без знаходження коренів.

Для рівняння  $x^2 + 5x - 6 = 0$  знайдіть суму та добуток коренів.

Не знаходячи коренів рівняння  $x^2 - 6x + 5 = 0$ , обчисліть  $(x_1 - x_2)^2$ .

Складіть квадратне рівняння, корені якого  $-3$  і  $4$ .

Для рівняння  $3x^2 + 12x + 7 = 0$  знайдіть значення виразу  $x_1^2 + x_2^2$ .

Знайдіть  $p$ , якщо рівняння  $x^2 + px + 9 = 0$  має корені, що відрізняються у 3 рази ( $x_1 = 3x_2$  або  $x_2 = 3x_1$ ).

Знайдіть усі значення  $a$ , за яких рівняння  $x^2 - (a+3)x + a = 0$  має корені, що відрізняються на 1.

Чернетка (місце для обчислень)

Відповіді (ключі)

Ключі до Варіанта 1

$$S = 7, P = 10.$$

$$S = 4, P = -5 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 16 - 2(-5) = 26.$$

$$(x - 2)(x + 5) = 0 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0.$$

$$S = -3/2, P = -5/2 \Rightarrow 1/x_1 + 1/x_2 = S/P = 3/5.$$

$$\text{Нехай корені: } 2t \text{ і } t \Rightarrow 2t^2 = 9 \Rightarrow t = \pm 3/\sqrt{2} \Rightarrow p = -(2t+t) = -3t \Rightarrow p = \pm 9/\sqrt{2} \text{ (або } \pm 9\sqrt{2}/2).$$

$$S = 2a, P = a; \text{ умова } S = P \Rightarrow 2a = a \Rightarrow a = 0.$$

Ключі до Варіанта 2

$$S = -5, P = -6.$$

$$S = 6, P = 5 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P = 36 - 20 = 16.$$

$$(x + 3)(x - 4) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0.$$

$$S = -12/3 = -4, P = 7/3 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 16 - 14/3 = 34/3.$$

Нехай корені:  $3t$  і  $t \Rightarrow P = 3t^2 = 9 \Rightarrow t^2 = 3 \Rightarrow t = \pm\sqrt{3} \Rightarrow S = 4t \Rightarrow p = -S = -4t \Rightarrow p = \pm 4\sqrt{3}$  (залежно від знака  $t$ ).

$|x_1 - x_2| = 1 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 1. S = a+3, P = a.$  Маємо  $S^2 - 4P = (a+3)^2 - 4a = 1 \Rightarrow a^2 + 2a + 8 = 0 \Rightarrow D < 0$ , дійсних  $a$  немає.

Критерії оцінювання за групами результатів (ГР1–ГР3)

Максимум: 12 балів. Оцінювання здійснюється за групами результатів навчання (ГР) з урахуванням виконаних завдань.

Розподіл балів за завданнями (для зручності вчителя)

№1 – 1 бал; №2 – 2 бали; №3 – 2 бали; №4 – 2 бали; №5 – 2 бали; №6 – 3 бали (разом 12 балів).

У Варіанті 2 аналогічно: №1–№6 (перший–шостий пункт варіанта) оцінюються відповідно 1,2,2,2,2,3 бали.

Шкала переведення балів (рекомендація)

11–12 балів – високий рівень;

8–10 балів – достатній рівень;

5–7 балів – середній рівень;

1–4 бали – початковий рівень.

## ДОДАТОК Г

### МАТЕРІАЛИ ІКТ/ВІЗУАЛІЗАЦІЇ ДО ТЕМИ «ФОРМУЛИ ВІЄТА» (GeoGebra)

#### Г.1. Мета та ідея динамічної моделі

Динамічна модель у GeoGebra призначена для візуалізації зв'язку між коефіцієнтами квадратного рівняння та його коренями, а також для демонстрації формул Вієта на графіку параболи.

учень/учениця спостерігає, як зміна коефіцієнтів впливає на положення параболи та корені;

модель автоматично обчислює  $S = x_1 + x_2$  та  $P = x_1 \cdot x_2$  і порівнює їх з  $-b/a$  та  $c/a$ ;

підтримується режим роботи з рівнянням  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ ) або зі спрощеним  $x^2 + px + q = 0$ .

#### Г.2. Структура моделі (що відображається на екрані)

слайдери коефіцієнтів  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (або  $p$ ,  $q$ );

графік функції  $y = ax^2 + bx + c$ ;

точки перетину з віссю  $Ox$  ( $x_1$ ,  $x_2$ ) – якщо корені дійсні;

текстовий блок зі значеннями  $S$  та  $P$  і формулами:  $S = -b/a$ ,  $P = c/a$ ;

додатково (за бажанням): дискримінант  $D = b^2 - 4ac$  і висновок про кількість коренів.

### Г.3. Інструкція зі створення моделі в GeoGebra (покроково)

У GeoGebra Classic (веб або застосунок) виконайте такі кроки:

1) Створіть слайдери  $a$ ,  $b$ ,  $c$  (рекомендовано:  $a \in [-5; -0,2] \cup [0,2; 5]$ ,  $b \in [-10; 10]$ ,  $c \in [-10; 10]$ ).

2) У рядку введення задайте функцію:  $f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ .

3) Побудуйте корені (за наявності дійсних):  $x_1 = \text{Root}(f, 1)$ ,  $x_2 = \text{Root}(f, 2)$ .

4) Створіть точки  $A = (x_1, 0)$ ,  $B = (x_2, 0)$  і підписи до них.

5) Додайте обчислення:  $S = x_1 + x_2$ ,  $P = x_1 \cdot x_2$ .

6) Додайте обчислення за коефіцієнтами:  $S_v = -b/a$ ,  $P_v = c/a$ .

7) Додайте текстовий блок (Text) з виведенням:  $S$ ,  $P$ ,  $S_v$ ,  $P_v$  та порівнянням значень.

8) (Опційно) Обчисліть дискримінант:  $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$  та виводьте повідомлення про кількість коренів.

Примітка: якщо  $a = 0$ , модель повинна повідомити, що це вже не квадратне рівняння; тому значення  $a$  бажано обмежити так, щоб  $a \neq 0$ .

### Г.4. Інструкція для учнів/користувача (як працювати з моделлю)

1) Встановіть значення  $a$ ,  $b$ ,  $c$  за допомогою слайдерів.

2) Перевірте, чи є точки перетину з  $Ox$  (корені). Якщо точок немає – зробіть висновок про відсутність дійсних коренів.

3) Звірте значення  $S$  та  $P$  з виразами  $-b/a$  та  $c/a$  (формули Вієта).

4) Порівняйте кілька наборів коефіцієнтів і сформулюйте висновки: як змінюється сума/добуток коренів при зміні  $b$  та  $c$ .

5) Зробіть скріншот одного прикладу для звіту (або вставте в додаток).

#### Г.5. Скріншоти/ілюстрації візуалізації (приклади)

Нижче наведено ілюстративні приклади (можна замінити на власні скріншоти з GeoGebra).

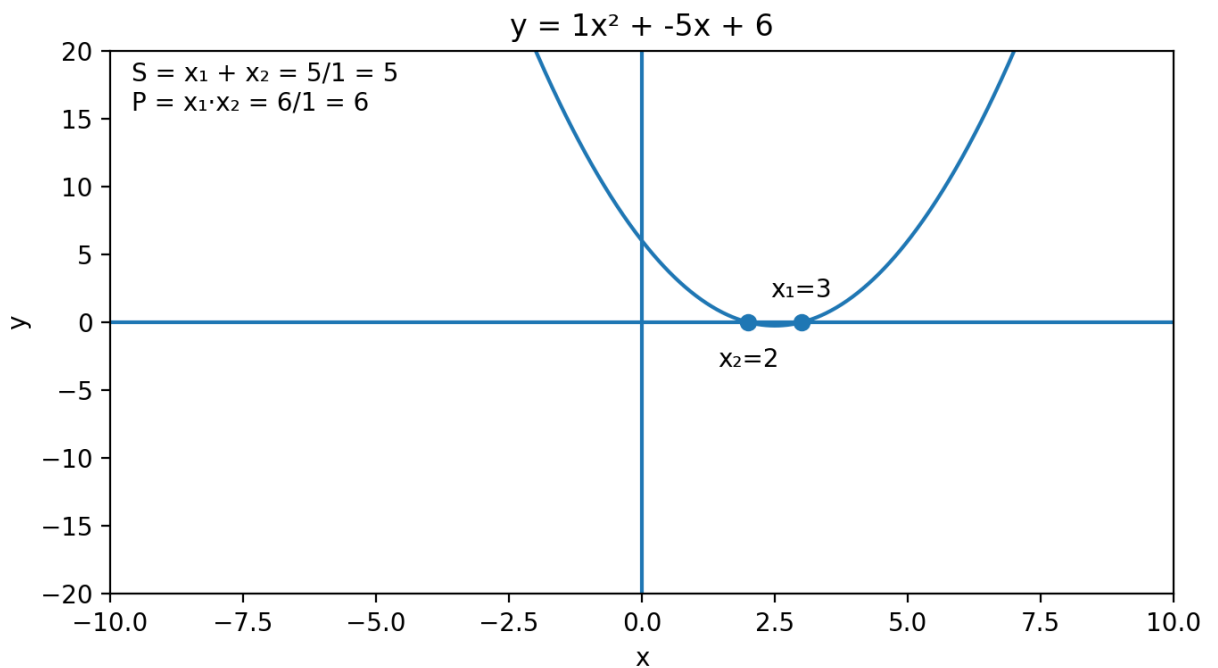


Рис. Г.1. Приклад:  $y = x^2 - 5x + 6$  (корені 2 і 3;  $S = 5$ ,  $P = 6$ ).



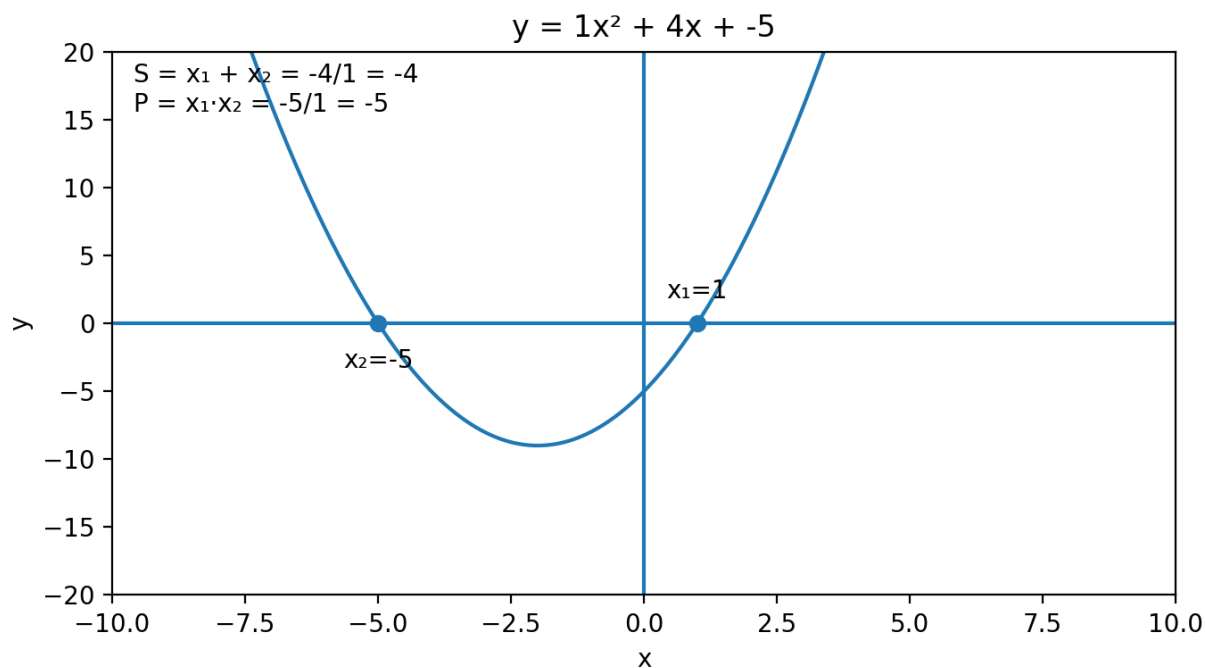


Рис. Г.2. Приклад:  $y = x^2 + 4x - 5$  (корені 1 і -5;  $S = -4$ ,  $P = -5$ ).

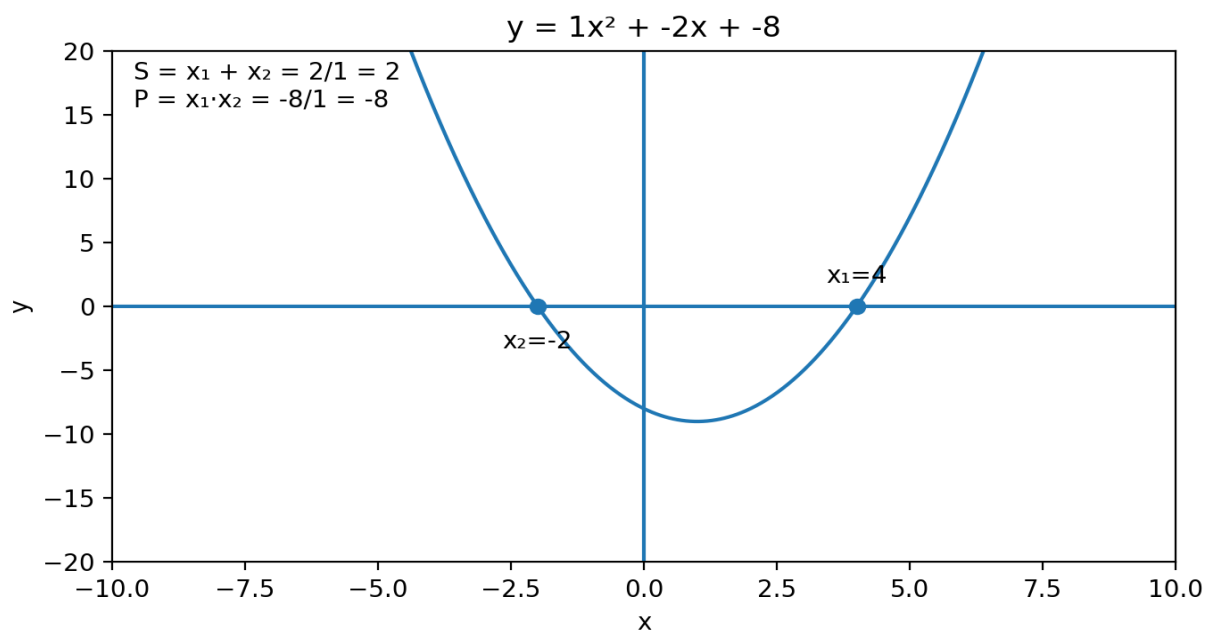


Рис. Г.3. Приклад:  $y = x^2 - 2x - 8$  (корені 4 і -2;  $S = 2$ ,  $P = -8$ ).

## Г.6. Посилання та QR-код

Посилання на GeoGebra (для створення/перегляду моделі):

<https://www.geogebra.org/>

Після того, як ви опублікуєте власну модель, вставте у документ її пряме посилання (формату <https://www.geogebra.org/m/.....>) і згенеруйте QR-код на це посилання.



*Рис. Г.4. QR-код для переходу на GeoGebra*

## ДОДАТОК Д

### МАТЕРІАЛИ ПЕДАГОГІЧНОГО ЕКСПЕРИМЕНТУ

#### Д.1. План педагогічного експерименту

Мета експерименту: перевірити ефективність методики вивчення формул Вієта в 9 класі із використанням візуалізації (GeoGebra) та

системи диференційованих задач (Додатки А–В) для підвищення навчальних результатів учнів.

Учасники та організація

База проведення: Святилівська гімназія Градизької селищної ради Полтавської області (с. Святилівка, Полтавська область).

Контингент: учні 9 клас.

Кількість учасників: 10 осіб.

Формування груп: експериментальна група (ЕГ) – 5 осіб; контрольна група (КГ) – 5 осіб.

Принцип добору: одна паралель (один клас) із поділом на дві підгрупи приблизно однакового стартового рівня (за результатами вхідної діагностики); учні позначені кодами 1–10 (без персональних даних).

Навчально-методичне забезпечення: підручник О. С. Істер для основної школи та розроблені матеріали (Додатки А–Д).

*Тривалість та умови*

Тривалість експерименту: 3 тижні (6 навчальних годин за темою «Квадратні рівняння. Формули Вієта»).

Однакові умови: однакова кількість уроків і часу на вправи; однакова система оцінювання; спільні вимоги до оформлення.

Відмінність: у ЕГ застосовано комплект дидактичних матеріалів (Додаток А), добірку задач із еталонними розв'язаннями (Додаток Б),

контроль/самоконтроль (Додаток В), а також візуалізацію та інструкцію GeoGebra (Додаток Д). У КГ — традиційне пояснення та вправи за підручником без використання динамічної моделі.

#### Етапи експерименту

Етап	Термін и	Зміст роботи	Інструмен ти	Результат
<b>Констатувальний</b>	1 урок	Визначення початкового рівня: діагностика знань; анкетування щодо ставлення до теми.	Діагностична робота; анкета (Е.2).	Таблиця «до» (Е.3).
<b>Формувальний</b>	4 уроки	Реалізація методики: пояснення, тренування, робота з картками, парна/групова робота, візуалізація, рефлексія.	Додатки А–Д.	Поточні спостереження, зразки робіт.

Контрольний	1 урок	Підсумкова перевірка; порівняння «до/після»; аналіз приросту.	Контрольна робота (Додаток В).	Таблиця «після» (Е.3), висновки.
-------------	--------	---	--------------------------------	----------------------------------

Показники ефективності (що аналізується)

уміння: знаходити  $S$  і  $P$ ; обчислювати симетричні вирази; складати рівняння за коренями; розв'язувати задачі з елементами параметра;

динаміка результатів: середній бал, медіана, приріст «до/після»;

якість виконання: типові помилки та корекція (зокрема знак у формулі  $S = -p$ ).

Д.2. Анкета/опитувальник (підсумок)

Анкетування проведено двічі: до початку вивчення теми та після завершення (шкала 1–5).

Середнє значення за пунктами 1–10: до — 3.1; після — 4.1.

Таблиця Д.0. Усереднені результати анкетування ( $n = 10$ )

Показник	До	Після
Розуміння змісту $S$ і $P$	3.0	4.2

Уміння швидко знаходити $S$ і $P$	3.1	4.2
Уміння перевіряти корені через Вієта	3.0	4.0
Уміння складати рівняння за коренями	3.2	4.1
Інтерес до задач на Вієта	3.2	4.0
Користь візуалізації (GeoGebra/графік)	3.3	4.4
Користь карток-опор	3.0	4.2
Користь роботи в парах/групах	3.2	4.0
Користь еталонних розв'язань	3.1	4.2
Відчуття, що розв'язує швидше	3.0	4.1

*Таблиця Д.0. Динаміка ставлення/самооцінки щодо теми «Формули Вієта»*

### Д.3. Таблиці первинних результатів (до/після)

Подані нижче таблиці містять первинні результати (12-бальна шкала) для 10 учнів, поділених на ЕГ та КГ. Учні позначені кодами 1–10.

Таблиця Д.1. Результати «до експерименту» (діагностика)

№	Група	Бал (0–12)	Рівень	Примітки (типові помилки)
1	ЕГ	4	середній	помилки у знаку $S=-p$ ; плутає $p$ і $q$
2	ЕГ	5	середній	складно обчислює симетричні вирази через $S, P$
3	ЕГ	6	середній	вміє знаходити $S, P$ , але слабке оформлення
4	ЕГ	5	середній	неточності в перетвореннях ( $S^2-2P$ )
5	ЕГ	4	середній	помилки у переході $ax^2+bx+c \rightarrow$ $S=-b/a, P=c/a$

6	КГ	5	середній	плутає формулу $(x_1 - x_2)^2 = S^2 - 4P$
7	КГ	4	середній	помилки у дробових виразах (S/P)
8	КГ	6	середній	загалом правильно, але повільний темп
9	КГ	5	середній	помилки у складанні рівняння за коренями
10	КГ	5	середній	змішує методи: дискримінант і Вієта, робить зайві обчислення

*Таблиця Д.1. Заповнені результати вхідної діагностики.*



Таблиця Д.2. Результати «після експерименту» (підсумкова робота)

№	Гру	Б	Б	Прир	Коментар (якість розв'язання)
па		ал «до»	ал «після»	іст	
1	ЕГ	4	10	+6	виконує повністю, коректні перетворення
2	ЕГ	5	9	+4	правильно застосовує S,P; є дрібні описки
3	ЕГ	6	11	+5	високий рівень, грамотне оформлення
4	ЕГ	5	10	+5	правильно, впевнено використовує симетричні вирази
5	ЕГ	4	8	+4	засвоєно метод, інколи

					потрібна самоперевірка знаків
6	КГ	5	7	+2	стабільни й достатній рівень, 1 неточність у знаку виправлена
7	КГ	4	6	+2	покрacce ння, але складні задачі з параметром даються важко
8	КГ	6	8	+2	правильн о, краще обґрунтовує кроки
9	КГ	5	7	+2	правильн о складає рівняння, зрозуміле оформлення

1	КГ	5	7	+2	швидше розв'язує, використовує перевірку за Віста
---	----	---	---	----	---

Таблиця Д.2. Порівняння результатів «до/після» для кожного учня.

Таблиця Д.3. Узагальнення за групами

Груп	К	Сер	Сер	Сер	%
а	-сть	. бал	. бал	. приріст	достат.+ви
	учнів	«до»	«після»		с.
ЕГ	5	4.8	9.6	4.8	100%
		0	0	0	
КГ	5	5.0	7.0	2.0	80%
		0	0	0	

Таблиця Д.3. Середні показники та приріст за групами (достатній+високий рівні: 7–12 балів).

#### Д.4. Приклади робіт учнів

Нижче наведено зразки виконання типових завдань (анонімізовано). Їх можна замінити на фото/скан реальних учнівських робіт.

Зразок 1 (типова помилка «до»)

Завдання: Не знаходячи коренів рівняння  $x^2 + 4x - 5 = 0$ , знайти  $x_1 + x_2$  та  $x_1 \cdot x_2$ .

Робота учня/учениці (відтворення):

Учень записав:  $x_1 + x_2 = 4$ ,  $x_1 \cdot x_2 = -5$ .  
(Знак у сумі взято без «мінуса».)

Коментар учителя: Помилка у знаку: для  $x^2 + px + q = 0$  маємо  $x_1 + x_2 = -p$ , тобто  $-4$ . Рекомендовано використовувати чеклист знаків.

Зразок 2 (правильне застосування «після»)

Завдання: Не знаходячи коренів рівняння  $x^2 - 4x - 5 = 0$ , обчислити  $x_1^2 + x_2^2$ .

Робота учня/учениці (відтворення):

$S = x_1 + x_2 = 4$ ,  $P = x_1 \cdot x_2 = -5$ .  
 $x_1^2 + x_2^2 = S^2 - 2P = 16 - 2(-5) = 26$ .

Коментар учителя: Розв'язання коректне: правильно застосовано формули Вієта та перетворення симетричного виразу.

Зразок 3 (задача зі співвідношенням коренів)

Завдання: Знайти  $p$ , якщо рівняння  $x^2 + px + 9 = 0$  має корені, один з яких у 2 рази більший за інший.

Робота учня/учениці (відтворення):

Нехай корені:  $2t$  і  $t$ .  
 $P = 2t^2 = 9 \Rightarrow t^2 = 9/2 \Rightarrow t = \pm 3/\sqrt{2}$ .

$S = 3t$ , але  $S = -p \Rightarrow p = -3t$ .

Отже  $p = \pm 9/\sqrt{2}$  (або  $\pm 9\sqrt{2}/2$ ).

Коментар учителя: Логіка правильна: введено параметр  $t$ , використано  $P$  та  $S$ . Добре оформлено висновок щодо двох значень  $p$ .

## ДОДАТОК Е






МІНІСТЕРСТВО  
ОСВІТИ І НАУКИ  
УКРАЇНИ



ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ І НАУКИ  
ПОЛТАВСЬКОЇ ОБЛАСНОЇ  
ВІЙСЬКОВОЇ АДМІНІСТРАЦІЇ



ПОЛТАВСЬКА АКАДЕМІЯ  
НЕПЕРЕРВНОЇ ОСВІТИ  
ІМ. М.В. ОСТРОГРАДСЬКОГО

№ 09666

# СЕРТИФІКАТ

учителя адаптаційного циклу базової середньої освіти

**Сокор Тетяна Павлівна**  
успішно завершив(ла) навчання за програмою  
семінару-тренінгу «Нова українська школа: перехід на наступний рівень»:  
математична освітня галузь

**Обсяг: 45 годин /1,5 кредити ЕКТС**

**Опис досягнутих результатів:**  
усвідомлення і розуміння:

- цінностей та пріоритетів, методичних засад організації освітнього процесу в НУШ;
- мети та компетентнісного потенціалу освітньої галузі, базових знань, вимог до обов'язкових результатів навчання;
- наступності у впровадженні змісту освітньої галузі на кожному освітньому рівні;
- особливостей сучасного навчально-методичного забезпечення освітньої галузі;
- шляхів упровадження інноваційних практик викладання навчального предмета;
- способів моделювання змісту освітньої галузі відповідно до обов'язкових результатів навчання.



Директор  
ПАНО ім. М.В. Остроградського

Віталій ЗЕЛЮК

Наказ ПАНО № 235-ОД від 28.05.2024

м. Полтава, 2024




Міністерство освіти і науки України  
Департамент освіти і науки Полтавської обласної військової адміністрації  
Полтавська академія неперервної освіти ім. М.В. Остроградського

№ 0317

# СЕРТИФІКАТ

засвідчує, що

**Сокор Тетяна Павлівна**  
пройшла/пройшов підвищення кваліфікації за програмою  
**Тренінгу з математики (онлайн)**

**Кількість годин 15 (0,5 кред.)**

**Досягнуті результати:**

- здатність конструктивно та безпечно взаємодіяти з учасниками освітнього процесу;
- здатність до суб'єкт-суб'єктної (рівноправної та особистісно зорієнтованої) взаємодії з учнями в освітньому процесі;
- здатність організовувати безпечне освітнє середовище, використовувати здоров'язбережувальні технології під час освітнього процесу;
- здатність організовувати різні види і форми навчальної та пізнавальної діяльності учнів;
- здатність використовувати інновації у професійній діяльності.



Директор

Віталій Зелюк

Наказ ПАНО ім. М.В. Остроградського  
від 21.08.2024 № 283-ОД

26 вересня 2024 р.  
Реєстраційний № 9317