

Міністерство освіти і науки України
Державний заклад
«Луганський національний університет імені Тараса Шевченка»

Навчально-науковий інститут математики та інформаційних технологій

Кафедра математики та інформатики

Ясинок Микола Миколайович

**МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ, ОБ'ЄМІВ ТА ПЛОЩ
ПОВЕРХОНЬ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ НА
ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ**

**кваліфікаційна робота
здобувача вищої освіти другого (магістерського) рівня
освітньої програми «Математика»
за спеціальністю 014 «Середня освіта (Математика)»**

Особистий підпис _____  _____ Микола ЯСИНОК

Науковий керівник _____ Олена МУРЗИНА
кандидат педагогічних наук, доцент
кафедри математики та інформатики

В.о. завідувача кафедри _____ Юрій КОЗУБ
доктор технічних наук, професор
кафедри математики та інформатики

АНОТАЦІЯ

Ясинок М. М.

Тема: Методика вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь в курсі математики старшої школи на профільному рівні.

Спеціальність: 014.04 «Середня освіта (Математика)».

Установа: ЛНУ імені Тараса Шевченка, 2026р.

Магістерська робота містить: 75 с., 10 рис., 28 джерела.

Об'єктом дослідження є форми та методичні прийоми вивчення геометричних тіл у курсі математики старшої школи на профільному рівні.

Предметом дослідження є методика вивчення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл та їх застосування під час розв'язування задач різних типів у профільному курсі математики.

Мета роботи полягає в розробці методики вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь у курсі математики старшої школи на профільному рівні», що передбачає дослідження особливостей формування просторових уявлень учнів, удосконалення навичок обчислення об'ємів і площ поверхонь, а також підвищення ефективності розв'язування задач прикладного характеру.

Результати роботи. У роботі проаналізовано теоретичні та методичні основи вивчення геометричних тіл у старшій школі на профільному рівні та розроблено методику викладання тем, пов'язаних з обчисленням об'ємів і площ поверхонь. Розглянуто особливості організації навчальної діяльності учнів з використанням наочності, моделювання та інформаційно-комунікаційних технологій. Окрему увагу приділено розв'язанню задач на обчислення, доведення та застосування знань у практичних і прикладних ситуаціях, а також розвитку просторового мислення й дослідницьких умінь учнів.

Ключові слова: ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА, ОБ'ЄМ, ПЛОЩА ПОВЕРХНІ, ПРОСТОРОВЕ МИСЛЕННЯ, ПРОФІЛЬНЕ НАВЧАННЯ, МЕТОДИКА НАВЧАННЯ МАТЕМАТИКИ, НАОЧНІСТЬ, МОДЕЛЮВАННЯ.

ANNOTATION

Yasynok Mykola

Title: Methodology of Studying Geometric Solids, Volumes and Surface Areas in the Upper Secondary School Mathematics Course at the Profile Level.

Specialty: 014.04 Secondary Education (Mathematics).

Institution: Taras Shevchenko Luhansk National University, 2026.

Master's thesis contains: 75 pages, 10 figures, 28 references.

The object of the research is the forms and methodological approaches to studying geometric solids in the upper secondary school mathematics course at the profile level.

The subject of the research is the methodology of studying volumes and surface areas of geometric solids and their application in solving various types of problems in the profile mathematics course.

The aim of the study is to develop a methodology for teaching the topic “Geometric Solids, Volumes and Surface Areas at the Profile Level,” which involves investigating the peculiarities of forming students’ spatial representations, improving skills in calculating volumes and surface areas, and increasing the effectiveness of solving applied problems.

Results of the research. The thesis analyzes the theoretical and methodological foundations of studying geometric solids in upper secondary school at the profile level and proposes a methodology for teaching topics related to the calculation of volumes and surface areas. The features of organizing students’ learning activities using visual aids, modeling, and information and communication technologies are considered. Special attention is paid to solving problems involving calculations, proofs, and the application of knowledge in practical and applied situations, as well as to the development of students’ thinking and research skills.

Keywords: GEOMETRIC SOLIDS, VOLUME, SURFACE AREA, SPATIAL THINKING, PROFILE EDUCATION, METHODOLOGY OF TEACHING MATHEMATICS, VISUALIZATION, MODELING.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	6
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ У КУРСІ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ	9
1.1. Особливості організації профільного навчання в Україні.....	9
1.2. Методичні принципи та підходи до формування просторових уявлень учнів.....	13
1.3. Аналіз чинних програм і підручників з геометрії старшої школи профільного рівня.....	18
Висновки до розділу 1.	22
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ, ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ТЕМИ «ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА»	25
2.1. Особливості викладання теми з використанням наочності та модельювання.....	25
2.2. Організація практичної діяльності учнів при вивченні об'ємів і площ поверхонь	32
2.3. Використання інформаційно-комунікаційних технологій та інтерактивних методів навчання	36
2.4. Розвиток дослідницьких умінь учнів через проектну діяльність та задачі прикладного змісту	41
2.5. Оцінювання ефективності методики вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь у курсі математики старшої школи на профільному рівні.....	46
Висновки до розділу 2.	59
ВИСНОВКИ	62
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	65
ДОДАТКИ.....	69
Додаток А. Принципи та підходи до формування просторових уявлень учнів.....	69

Додаток Б. Приклади розв'язання задач.	70
Додаток В. Приклади використання ІКТ при вивченні геометричних тіл у курсі математики старшої школи.	74

ВСТУП

Сучасна школа орієнтується на формування в учнів цілісної наукової картини світу, розвитку логічного та просторового мислення, здатності до самостійного пошуку й застосування знань у практичній діяльності. У цьому контексті вивчення геометрії набуває особливого значення, адже вона є не лише складовою математичної освіти, а й засобом розвитку мислення, уяви, точності та культури міркування.

Одним із найбільш змістовних і водночас складних для засвоєння розділів шкільного курсу є вивчення геометричних тіл, їхніх об'ємів і площ поверхонь. Цей матеріал потребує не лише знань теоретичних положень, а й сформованих просторових уявлень, уміння бачити тривимірні об'єкти та оперувати ними в уяві. Досвід педагогічної практики свідчить, що саме ця тема часто викликає труднощі в учнів, зокрема у визначенні взаємозв'язку між плоскими та просторовими фігурами, побудові моделей, розумінні формул для обчислення об'ємів і площ поверхонь.

Розвиток профільної середньої освіти, запровадження компетентнісного підходу та вимоги Нової української школи зумовлюють потребу переосмислення методики викладання геометрії. Виникає необхідність створення таких педагогічних умов, які б сприяли активному засвоєнню учнями знань про геометричні тіла, формуванню в них просторового мислення, навичок застосування математичних понять у практичних і життєвих ситуаціях.

В умовах модернізації освіти та впровадження концепції Нової української школи зростає потреба у формуванні в учнів глибоких математичних знань, умінь застосовувати їх у практичних ситуаціях і розв'язувати завдання дослідницького характеру. Особливе місце у цьому процесі займає геометрія, адже саме вона розвиває просторове мислення, логіку, точність і здатність до абстрактного узагальнення.

Тема «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» є ключовою для формування у старшокласників уявлення про тривимірний простір,

взаємозв'язки між плоскими та просторовими фігурами, а також для підготовки до подальшого навчання у технічних і природничих спеціальностях. Проте результати педагогічних спостережень та досліджень свідчать, що засвоєння цього матеріалу часто супроводжується труднощами. Учні відчують складність у візуалізації просторових об'єктів, застосуванні формул для обчислення об'ємів і площ поверхонь, що знижує мотивацію до навчання та успішність.

Сучасні освітні реалії, профільна диференціація старшої школи, широке впровадження цифрових технологій і компетентнісний підхід потребують оновлення методики викладання геометрії. Особливої уваги набуває використання інтерактивних засобів навчання, комп'ютерного моделювання, візуалізації просторових фігур і створення навчальних ситуацій, наближених до реального життя.

Таким чином, **актуальність дослідження** зумовлена необхідністю пошуку нових методичних підходів до ефективного вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» у старшій школі на профільному рівні, що сприятиме розвитку математичної та просторової компетентності учнів, підвищенню якості математичної освіти та її практичної спрямованості.

Об'єкт дослідження – процес навчання геометрії в старшій школі на профільному рівні.

Предмет дослідження – методика вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь у курсі математики старшої школи.

Мета роботи – теоретично обґрунтувати та розробити методичні підходи до ефективного викладання теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» у курсі математики старшої школи на профільному рівні.

Відповідно до поставленої мети у дослідженні передбачено розв'язання таких завдань:

- ✓ проаналізувати психолого-педагогічні та методичні основи формування просторових уявлень учнів старшої школи;

- ✓ визначити місце та роль теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» у структурі шкільного курсу математики;
- ✓ дослідити сучасні підходи, технології та засоби навчання, що підвищують ефективність засвоєння просторового матеріалу;
- ✓ розробити та апробувати методичні рекомендації щодо вивчення теми на профільному рівні;
- ✓ оцінити результати педагогічного експерименту та визначити ефективність запропонованої методики.

Теоретична цінність роботи полягає у систематизації методичних засад навчання геометричних тіл та узагальненні досвіду використання інноваційних технологій у процесі формування просторових уявлень. **Практична значущість** визначається можливістю застосування результатів дослідження у практиці вчителів математики старшої школи, при розробці навчальних програм, методичних посібників і дидактичних матеріалів.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатків. Обсяг роботи складає 73 сторінки.

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ВИВЧЕННЯ ГЕОМЕТРИЧНИХ ТІЛ У КУРСІ МАТЕМАТИКИ СТАРШОЇ ШКОЛИ

1.1. Особливості організації профільного навчання в Україні

Профільне навчання у системі середньої освіти України набуває дедалі важливішого значення, оскільки воно дозволяє диференціювати освітній процес на старших класах, зорієнтувавши його на профільну підготовку учнів із врахуванням їх здібностей, інтересів та подальших освітніх чи професійних планів. Законодавчі зміни, зокрема Закон України «Про освіту» [7] та Закон України «Про повну загальну середню освіту» [8], чітко передбачають запровадження профільного навчання як окремого рівня освітнього циклу.

При цьому профільне навчання має певні організаційні, методичні та кадрові особливості, що вимагають ретельної адаптації освітньої системи, структури закладів, навчальних програм, а також забезпечення відповідної матеріально-технічної бази. Саме тому важливо розкрити механізми впровадження профільного навчання в українській школі та дослідити, які чинники впливають на його ефективність.

Організація профільного навчання передбачає чітке визначення часу, навантаження, змісту та форм навчального процесу, оскільки профільний напрям має доповнювати базову загальну середню освіту й водночас забезпечувати поглиблене опанування вибраних учнями галузей знань. Таким чином, одним із ключових аспектів є розроблення і впровадження варіативної частини освітньої програми, що дозволяє обирати учнями тематичні цикли, спецкурси, факультативи або профільні класи. У наукових дослідженнях підкреслюється, що профільне навчання як форма диференціації старшої школи має на меті створення умов для професійного самовизначення учнів та формування компетентностей, релевантних до сучасних викликів [13]. При цьому важливо, що обраний профіль не означає вузьку професійну орієнтацію лише на трудовий ринок, а більше – розвиток ключових базових компетенцій, дослідницьких навичок і готовності до навчання в закладах вищої освіти.

Організаційно-структурні моделі профільного навчання в Україні можуть різнитися залежно від типу навчального закладу, наповнюваності класів, географічного контексту та ресурсного забезпечення, тому закономірно, що в наукових публікаціях виділяють кілька моделей: внутрішньо-шкільна диференціація, мережеве профілювання, створення окремих ліцеїв із профільним спрямуванням [5]. Наприклад, мережевий підхід передбачає об'єднання кількох шкіл чи навчальних структур навколо «ресурсного центру», що спеціалізується на профільних дисциплінах, що відкриває більші можливості для вибору профілю, але водночас потребує координації, логістики та ефективного управління. У свою чергу, для віддалених чи сільських населених пунктів характерним є створення однопрофільних старших класів у межах існуючої школи, що дозволяє зберегти доступ до профільного навчання, але може обмежувати різноманіття вибору.

Методичні особливості профільного навчання вимагають підготовки учителів високої фахової компетентності, готових працювати з поглибленим контентом та впроваджувати активні, дослідницькі форми роботи, оскільки профільний рівень передбачає не лише передачу знань, а й формування умінь самостійного навчання, аналізу, синтезу, проєктної діяльності. У дослідженнях зазначається, що профільний учитель має відігравати роль консультанта і наставника, а не лише лектора; він повинен володіти методичними навичками створення елективних курсів, профільних програм, організації роботи з групами учнів різного рівня підготовки [13].

Крім того, успішна організація профільного навчання вимагає гнучкої системи оцінювання, що враховує індивідуальні траєкторії учнів, їхні дослідницькі проєкти, факультативи, а не тільки стандартні контрольні. Отже, методичне забезпечення профільного навчання має включати підручники, навчальні посібники, дидактичні матеріали, які відповідають рівню поглибленого вивчення, а також відповідні електронні ресурси.

Матеріально-технічне забезпечення профільного навчання становить ще одну суттєву умову, оскільки профільні класи часто потребують лабораторій, обладнання, інформаційно-комунікаційних технологій, доступу до спеціалізованих програм, а також можливості для реалізації проєктної діяльності учнів. Навіть якщо школа має відповідний профільний клас, без належного ресурсного забезпечення він не зможе забезпечити якісне поглиблене навчання. У наукових публікаціях зазначається, що матеріально-технічна база, інформаційна інфраструктура та професійна підтримка педагогів є вирішальними чинниками для впровадження профільного навчання [5].

Таким чином, створення профільних класів варто супроводжувати відповідним фінансовим, кадровим та дидактичним ресурсом, інакше реальний ефект від переходу до профілізації старшої школи буде обмеженим.

Контекст реформування системи середньої освіти України також формує передумови та виклики для профільного навчання, оскільки перехід на 12-річну модель, концепція Нова українська школа, а також інтеграція до європейських освітніх стандартів потребують адаптації профільного навчання до нових умов.

Умови воєнного стану й зміни в освітньому середовищі створюють додаткові виклики – це й необхідність дистанційного навчання, зміна логістики, безпечного освітнього середовища, що впливає на спосіб організації профільних класів та їхню стабільність. У таких умовах питання профілізації стає не лише освітнім, але й соціально-педагогічним, вимагаючи від закладів освіти оперативності, гнучкості та професійної готовності реагувати на зміни.

Однією з характерних рис організації профільного навчання є інтеграція двох основних фокусів: академічного та професійного, що передбачено законодавством, адже профільний рівень може бути орієнтований як на подальшу освіту, так і на безпосереднє працевлаштування. Зокрема, Закон України «Про освіту» [7] зазначає про два напрямки отримання профільної освіти: академічний – із поглибленим вивченням предметів та орієнтацією на продовження навчання, та професійний – із орієнтацією на трудовий ринок.

На практиці це означає, що школи повинні пропонувати профільні класи з чітко визначеним спрямуванням, а також забезпечити можливість вибору учнями такої траєкторії, що відповідає їхнім освітнім цілям і здібностям.

Важливим компонентом ефективної організації профільного навчання виступає партнерство з вищими навчальними закладами, підприємствами, освітніми центрами та локальною громадою, що дозволяє розширювати освітні можливості учнів, залучати ресурсну базу, практичну складову і реальні професійні контакти. У цьому контексті позитивним є створення мережових форм співпраці, коли старшокласники можуть відвідувати лабораторії, реалізовувати проекти, проходити стажування або співпрацювати з фахівцями галузі. Як зазначено в дослідженнях, така партнерська модель підвищує актуальність навчання, мотивацію учнів та їх готовність до професійного самовизначення [5].

Таким чином, профільне навчання на старшій школі не обмежується лише зміною програми, а трансформує саму освітню ситуацію як мультиакторний процес.

Також слід враховувати, що кількісні й якісні показники профільного навчання – наповнюваність профільних класів, співвідношення профільних і базових годин, кадрове забезпечення, рівень адаптації учнів до профілю – можуть значною мірою впливати на його ефективність. Деякі аналітичні матеріали вказують, що недостатня кількість учнів у профільному класі, слабка матеріальне забезпечення або обмежена кількість профільних годин створюють ризик формального запровадження профільного навчання без реального поглиблення [19]. Виходячи з цього, органам управління освітою слід встановлювати чіткі нормативні вимоги, гарантувати відповідну наповнюваність, забезпечити якісну підготовку та координацію профільної роботи, що в підсумку сприятиме досягненню мети диференціації старшої школи.

Отже, особливості організації профільного навчання в Україні охоплюють комплекс правових, структурних, методичних, кадрових та ресурсних аспектів, які мають бути узгоджені між собою для успішного функціонування. Найбільш ефективними стають такі підходи, коли профільне навчання організоване як системний процес, який враховує індивідуальні освітні траєкторії учнів, забезпечує відповідний зміст освіти, матеріально-технічну базу та партнерство з зовнішніми зацікавленими особами. Подальший розвиток профільної середньої освіти вимагає моніторингу, наукового супроводу, регулярного перегляду та удосконалення нормативної бази, а також чіткого зворотного зв'язку між освітнім середовищем і ринком праці.

1.2. Методичні принципи та підходи до формування просторових уявлень учнів.

Формування просторових уявлень у старших класах починається з розширення і поглиблення базових понять, закладених у молодшій і середній школі. Методично доцільно поєднувати аналіз реальних об'єктів із роботою над їхніми проєкціями й аналітичними описами. [18, с.42-46].

Розглянемо методичні принципи (таблиця 1.1) та підходи (таблиця 1.2) для формування просторових уявлень учнів (Додаток А).

Важливим принципом є системність: робота над просторовими уявленнями повинна бути регулярною та планомірною протягом усіх курсів геометрії та суміжних дисциплін. Це означає, що поняття слід повертати в різних контекстах – від теоретичних властивостей до практичних застосувань в інженерії, архітектурі та географії. Такий підхід сприяє переносу знань і закріпленню операцій на більш глибокому рівні. [2].

Принцип наочності у старшій школі трансформується: замість простих предметних моделей використовують складніші тривимірні моделі, динамічні геометричні середовища та комп'ютерні візуалізації. Використання програм

для динамічної геометрії дає змогу ілюструвати обертання, проєкції, перетини тіл та інші просторові перетворення в реальному часі. [23, с. 130-133].

Принцип диференціації у старшій школі вимагає від вчителя підбору завдань різного рівня складності: від стандартних задач до проблемних і дослідницьких питань. Учні з розвиненими просторовими навичками мають отримувати завдання на доказ і застосування теорем у статистичних або прикладних задачах. Ті, хто має труднощі, повинні працювати із спрощеними моделями, додатковими візуалізаціями та поетапними інструкціями. Оцінювання при цьому має враховувати процес мислення, аргументацію та вміння використовувати моделі. [18].

Таблиця 1.1. Методичні принципи формування просторових уявлень учнів старших класів

№	Методичний принцип	Зміст принципу	Приклади реалізації
1	Наочності	Формування просторових уявлень на основі візуальних, графічних, об'ємних моделей.	Використання 3D-моделей, комп'ютерних симуляцій, візуалізацій у GeoGebra.
2	Системності	Розвиток просторового мислення має відбуватися послідовно, від простих понять до складних.	Послідовне вивчення геометричних понять у зв'язку з практичними завданнями.
3	Активності учнів	Учні мають бути активними учасниками процесу пізнання, а не пасивними спостерігачами.	Використання проєктної діяльності, створення моделей і мап.
4	Диференціації	Урахування індивідуальних можливостей учнів у процесі розвитку просторових уявлень.	Варіативні завдання різного рівня складності.
5	Практичної спрямованості	Просторові уявлення мають формуватися через практичні дії, експерименти, побудови.	Робота з кресленнями, картами, макетами.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій (ІКТ) у формуванні просторових уявлень має бути дидактично обґрунтованим: не

кожна анімація чи 3D-модель автоматично розвиває мислення. Потрібно підбирати завдання, які стимулюють дослідження властивостей фігур та обґрунтування результатів, а не лише пасивне споглядання. Застосування інтерактивних побудов, можливість змінювати параметри й спостерігати результат – ключові функції, які варто використовувати. Також важливо навчати учнів критично інтерпретувати візуалізації та зіставляти їх із аналітичними описами [23].

Діяльнісний підхід у старшій школі має акцентуватися на проєктній та дослідницькій діяльності: учні виконують побудову моделей, досліджують властивості фігур і підбирають застосування в житті. Проєктні завдання мотивують учнів та дають змогу інтегрувати знання з математики, інформатики, фізики й технічних дисциплін [4].

Метод проєктної діяльності в старшій школі особливо ефективний для формування прикладних просторових умінь. Проєкти типу «макет будівлі», «організація простору лабораторії» або «модель механізму» вимагають від учнів розв'язання задач на виміри, масштабування і функціональність. Важливо, щоб проєкти були індивідуалізовані і мали проміжні етапи, де виконується контроль та корекція. Оцінювання варто будувати як поєднання продукту (макета) і процесу (досліджень та аргументації).

Роль мовної компетентності і математичної термінології зростає у старшому шкільному віці: учні повинні опанувати терміни, що описують положення в просторі, відображення та види перетворень. Систематична робота з мовою – поясненнями, формулюваннями тверджень і записами доведень – сприяє точності мислення й зручності маніпуляцій із просторовими образами. Вчитель має приділяти увагу навчанню читання і створення формалізованих описів фігур і конструкцій. Це зменшує семантичні помилки та допомагає при роботі з доказовою базою.

Диференційовані вправи на уявні перетворення – обертання, відображення, зсув – слід включати у щотижневі практичні заняття. Регулярні

тренування уявного обертання фігури допомагають учням швидше розпізнавати конфігурації та вирішувати нестандартні задачі. Для частини класу корисні вправи з поступовим ускладненням: від обертання простих багатокутників до обертання складних тіл. Вчитель має передбачити «лінійку» завдань для самоперевірки та колективної дискусії [18].

Таблиця 1.2. Підходи до формування просторових уявлень учнів старших класів

№	Підхід	Сутність підходу	Основні засоби реалізації
1	Компетентнісний підхід	Орієнтує освітній процес на формування ключових компетентностей, зокрема просторового мислення як складника математичної грамотності.	Використання міжпредметних завдань, цифрових симуляцій, 3D-моделювання.
2	Діяльнісний підхід	Просторові уявлення формуються через активну діяльність учнів – побудову, моделювання, експеримент.	Практичні роботи з кресленнями, моделювання в середовищах GeoGebra, Tinkercad.
3	Інтегративний підхід	Поєднання знань із різних галузей (математика, інформатика, фізика, образотворче мистецтво) для формування цілісного просторового бачення.	Проектна діяльність, STEAM-освіта, міжпредметні зв'язки.
4	Інформаційно-цифровий підхід	Формування просторових уявлень відбувається через застосування цифрових технологій, VR/AR, 3D-графіки.	Використання освітніх платформ, мобільних додатків і симуляторів.
5	Особистісно орієнтований підхід	Передбачає урахування індивідуальних особливостей учнів, стилів мислення та темпу засвоєння інформації.	Індивідуальні завдання, адаптивні онлайн-платформи, підтримка тьюторів.
6	Конструктивістський підхід	Учні самостійно «будують» знання, створюючи власні моделі об'єктів і явищ.	Використання 3D-конструкторів, Lego Education, віртуальних лабораторій.
7	Технологічний підхід	Підкреслює необхідність використання структурованих технологій навчання, зокрема мультимедійних і візуалізаційних засобів.	Використання хмарних технологій, цифрових карт і 3D-візуалізацій.

Використання контролюючих і діагностичних інструментів дозволяє учителю відстежувати, які компоненти просторової компетентності розвинуті, а які потребують корекції. Застосування задач прикладного характеру (архітектурні задачі, задачі з комп'ютерної графіки, задачі інженерії) робить

навчання більш прикладним і корисним. Старшокласники, залучені до практичних кейсів, краще розуміють, як просторові уявлення застосовуються у професійній діяльності. Варто включати задачі з реальних проєктів, аналізувати варіанти рішень і робити висновки щодо оптимальності. Це також сприяє розвитку критичного мислення й проєктних навичок [16].

Робота з тестами на візуально-просторову пам'ять і уяву дає змогу кількісно відслідковувати прогрес учня і ефективність методик. Періодичне тестування (наприклад, на початку і в кінці модулю) допомагає виявляти динаміку та визначати необхідні корективи. Тести слід поєднувати з відкритими практичними завданнями, щоб отримати повнішу картину компетентності. Важливо інтерпретувати результати не як вирок, а як інформацію для планування подальшої роботи [18].

Впровадження системи самоконтролю та рефлексії стимулює учнів до самооцінки власних просторових вмінь. Після виконання практичних завдань доцільно пропонувати учням письмові короткі рефлексії: що вдалося, що ні, які стратегії використано. Це допомагає сформувати усвідомлений підхід до вивчення теми та розвиває метакогнітивні навички. Учитель має моделювати приклади рефлексій і вчити аналізувати помилки конструктивно.

Колективна проєктна діяльність розвиває комунікативні навички та уміння координувати просторові рішення в команді. Працюючи над спільним макетом чи технічним проєктом, учні обговорюють варіанти розташування елементів, масштабу і технологічних обмежень. Це дає змогу порівнювати індивідуальні підходи і виробляти спільні критерії якості. Такі навички важливі для подальшої професійної діяльності в інженерії та архітектурі [4].

Особливу увагу слід приділяти розвитку просторової уяви шляхом спеціальних вправ: компоновки частин, доповнення фігури, відновлення порядку предметів за описом. Такі вправи тренують здатність оперувати частиною і цілим, уявно відтворювати і трансформувати образи. Регулярні домашні завдання з елементами творчих лабораторій допомагають закріпити

навички. Важливо вбудовувати ці вправи в структуру навчального курсу, а не робити їх епізодичними.

Використання мультимедійних презентацій і відеодемонстрацій має бути цілеспрямованим: демонстрації повинні супроводжуватись завданнями на аналіз і пояснення. Після перегляду анімації учням слід давати завдання на відтворення руху, пояснення змін і формулювання висновків. Такий підхід унеможливорює пасивне споживання інформації і стимулює активну роботу з образом [16].

Підсумовуючи, методичні принципи формування просторових уявлень учнів старших класів включають послідовність, системність, поєднання наочності й формалізації, диференціацію, інтеграцію та активну проектно-дослідницьку діяльність. Комплексне застосування цих підходів забезпечує формування стійких компетентностей, що потрібні для подальшої освіти та професійної діяльності. Рекомендовано використовувати змішані методики: моделювання, ІКТ, проекти, корекцію та формувальне оцінювання.

1.3. Аналіз чинних програм і підручників з геометрії старшої школи профільного рівня

Профільне навчання з геометрії в Україні стартує на засадах реалізації профільної середньої освіти, коли для закладів із математичним або STEM-спрямуванням передбачено поглиблене вивчення геометрії. Зокрема, затверджена Модельна навчальна програма «Геометрія. 10-12 класи. Поглиблений рівень», яка орієнтує профільний курс на 10-12 класи і має чіткі очікувані результати навчання [11]. Ця програма відповідає потребам підготовки до подальшої освіти та професійної діяльності.

У моделі цієї програми наведено, що профільний курс геометрії має формувати не лише знання і вміння, але й компетентності: математичну, інформаційно-комунікаційну, технічну, інженерну. Таким чином, профільне

навчання виходить за межі «чистої математики» й наближається до реальних професійних задач, що важливо для старшокласників.

Організаційно школа або ліцей має самостійно визначити профіль (наприклад, математичний / технологічний) і обрати спеціалізований курс геометрії як частину цього профілю. У профільному курсі геометрії акцент зроблено на міжпредметній інтеграції: геометрія пов'язується з інформатикою (наприклад, моделювання, 3D-моделі), фізикою (просторові моделі, вимірювання), технологіями (конструювання, проектування). Наприклад, модельна програма містить завдання, що дозволяють реалізувати інженерно-технічне спрямування. Такий міжпредметний характер дає змогу старшокласникам відчувати прикладний зміст курсу.

Для успішного профільного навчання підручники мають відповідати цій модельній програмі: вони мають поглиблену теоретичну частину, розділи задач підвищеної складності, варіанти проєктної чи дослідницької роботи. Утім, фактично підручники та методичні комплекси ще не завжди в повній мірі враховують усі складові – зокрема, цифрові ресурси чи моделі. Це створює розрив між ідеєю профільного курсу і практичною реалізацією.

У сучасній шкільній практиці основні підручники з геометрії профільного рівня, які рекомендовано та широко використовують у старших класах України, - це видання авторів А. Г. Мерзляка та спів-авторів (підручники для 10-11 класів, профільний рівень) та О. С. Істера (підручник профільного рівня для 10-11 класів). Ці підручники побудовані відповідно до чинної програми і містять розділи стереометрії, планіметрії та задач прикладного спрямування; вони доступні в електронному форматі у репозитаріях, рекомендованих МОН. Широке використання цих підручників ускладнює однаковість підходів у різних регіонах – з одного боку, це дає єдиний стандарт, з іншого – зменшує різноманітність методичних рішень у школах. Через це вчителі часто комбінують матеріал цих підручників із авторськими розробками та методичними посібниками [14, 15, 9].

За структурою підручники Мерзляка, Номіровського, Полонського, Якіра [14, 15] поділені на логічні блоки: планіметрія, стереометрія, твердження та доведення, задачі підвищеної складності. Вони включають як сформульовані теореми, так і приклади розв’язування задач, вправи для самостійної роботи та збірні блоки контрольних завдань – що робить їх придатними для профільного курсу. Оцінка структури підручника показує сильний акцент на класичних методах викладання разом із окремими розділами практичних застосувань. При цьому у частині задачного матеріалу є нерівномірність за рівнем складності – від простих тренувальних вправ до дуже складних прикладів без достатньої допомоги вчителю.

Істера підручник [9] також відповідає програмі і відзначається сучасною візуалізацією та значним набором ілюстрацій; проте він орієнтований на більш інтенсивне опрацювання теоретичної частини і менше – на покрокові методики для початкового зв’язку з практикою. Це робить його зручним для підготовки абітурієнтів та до олімпіад, але вимогливим для звичайного шкільного курсу без додаткових методичних матеріалів. Відповідно, вчителю потрібно більше дидактичної роботи, щоб адаптувати завдання під клас із різним рівнем підготовки. Наявні в підручнику задачі хороші для формування доказової культури, але інколи відсутні проміжні кроки для учнів, що ускладнює їхнє самостійне опанування.

Інші видання, які зустрічаються в практиці (підручник Тадеєва В. О. [22]), іноді пропонують альтернативні методичні доріжки: більше прикладів із кресленнями, розширених практичних вправ або методик підготовки до ЗНО/олімпіад. Це корисно для диференціації навчання, але створює фрагментацію матеріалу, коли школа має обмежений час і вибирає лише одну серію підручників як основну.

Один із системних недоліків – відносно слабка інтеграція ІКТ-інструментів і тривимірного моделювання як обов’язкової частини уроку у більшості друкованих підручників. Хоча сучасні видання дають рекомендації та приклади

(інколи з QR-кодами/посиланнями), перелік і орієнтації щодо використання GeoGebra, 3D-моделей або VR/AR у типовому шкільному уроці подається фрагментарно. Наслідок – практичне включення цифрових інструментів залежить від мотивації вчителя та наявності техніки у школі. Це підтверджують методичні рекомендації та аналізи, які вказують на потребу системного підключення цифрових ресурсів до підручників.

Ще одна проблема – нерівномірна диференціація навчального матеріалу: хоча профільні підручники містять блоки складних задач, їм іноді бракує офіційних розділів для підтримки слабших учнів (пояснювальні виноски, поетапні інструкції, додаткові приклади для «входу» в тему). У практиці це означає, що в одному класі вчитель повинен одночасно готувати спрощені пояснення і складні завдання для сильних учнів, часто створюючи матеріали самостійно. Така ситуація збільшує навантаження на вчителя й знижує ефективність класного проведення занять.

З погляду підготовки до ЗНО та профільних іспитів, підручники дають чітку теоретичну базу, але часто не розробляють системних стратегій розв'язування типових екзаменаційних завдань (методики таймінгу, алгоритми підходу до типів задач). Тому школи часто використовують окремі збірники ЗНО і додаткові посібники для тренування – це додаткове навантаження та фрагментація навчального процесу.

Нормативні документи МОН (типова освітня програма, методичні рекомендації) стимулюють включення компетентнісних та діяльнісних підходів у підручники, але їхня реалізація у друкованих виданнях відбувається поступово і не в повному обсязі. Тобто формально підручники «підтримують» компетентнісний підхід, але практично потребують додаткових методичних матеріалів (картки для вчителя, цифрові додатки). Це означає: робота над підручниками триває, і позитивні зміни відбуваються, але не так швидко, як очікують практики [17].

У частині змісту підручників бачимо недостачу структурованих вправ на розвиток просторової уяви – спеціальних тренувальних блоків з поступовим ускладненням. Наявні вправи часто розподілені по параграфах і не виділені як окремий курс тренувань, тож учителю складніше планувати регулярні тренінги з уявного обертання, перетворень та роботи з проекціями [16].

Ще одна практична проблема – розбіжності між подачею тем у підручниках і програмними вимогами різних регіональних профільних курсів (деякі школи мають спецкурси з інженерної графіки або 3D-дизайну). Це призводить до необхідності додаткових матеріалів і локальної адаптації підручника.

Підсумовуючи, головні проблеми чинних підручників профільного рівня – недостатня диференціація й підтримка слабших учнів, фрагментарна інтеграція цифрових ресурсів, слабка інструктивна підтримка для вчителя та обмежені можливості інклюзії. Рішення, які реально планується (і вже частково впроваджуються), - це розробка електронних додатків до підручників, впровадження методичних рубрик для вчителя, модульна структура видань і блоки тренувань для формування просторових компетентностей. Впровадження цих змін потребує координації між авторами підручників, МОН і місцевими органами методичної підтримки; але перші кроки вже помітні в електронних репозитаріях і нових редакціях видань.

Висновки до розділу 1.

Проведений аналіз теоретичних і методичних засад формування просторових уявлень учнів дозволив стверджувати, що розвиток здатності мислити у просторових категоріях є одним із ключових чинників успішного засвоєння геометричного матеріалу, оскільки саме він забезпечує перехід школярів від наочно-образного розуміння до формально-логічного оперування просторовими об'єктами. У дослідженні було виявлено, що формування просторових уявлень є багатокомпонентним процесом, який поєднує роботу зі

зображеннями, моделюванням, абстрагуванням та аналітичними діями. Це дає підстави стверджувати, що ефективність навчання залежить не лише від змісту підручників і програм, а й від того, якими методичними засобами оперує вчитель. Важливо також, що розвиток просторового мислення учнів забезпечує їх готовність до подальшого вивчення природничих і технічних дисциплін, де просторові уявлення відіграють фундаментальну роль.

Методичні принципи, які були розглянуті у межах розділу, свідчать про те, що сучасна шкільна геометрія потребує поєднання як класичних, так і інноваційних підходів, адже лише комплексний вплив на навчальну діяльність учнів дає змогу забезпечити сталий результат. Аналіз літератури показав, що інтеграція динамічних моделей, опора на міжпредметні зв'язки, систематичне застосування наочно-практичних методів та урахування вікових особливостей учнів формують сприятливе підґрунтя для поглибленого розвитку просторових уявлень. У цьому контексті особливого значення набуває здатність учителя гнучко комбінувати різні педагогічні технології залежно від навчальної ситуації, рівня підготовленості класу та дидактичних цілей уроку.

Проведений аналіз довів, що формування просторових уявлень не може розглядатися як побічний чи другорядний результат опрацювання геометричного матеріалу, адже воно прямо пов'язане з розвитком логічного мислення та здатності до математичного узагальнення. Встановлено, що учні, у яких рівень просторової уяви сформований недостатньо. Це означає, що систематична робота з формування просторових уявлень має бути не просто рекомендованим елементом навчального процесу, а структурно закладеним компонентом профільного навчання математики.

Порівняння підручників і навчальних програм засвідчило, що хоча сучасні видання вже містять достатньо ілюстративного матеріалу та приклади для формування просторового мислення, їх зміст не завжди пропонує цілісну методичну систему. У більшості підручників просторовий компонент представлений епізодично, що створює ризик фрагментарності сприйняття

учнями геометричних понять. Ця особливість вказує на потребу вдосконалення навчально-методичного забезпечення через включення більшої кількості динамічних моделей, варіативних задач на просторові перетворення та міждисциплінарні завдання, які сприяли б цілісному розвитку просторового мислення.

У результаті опрацювання теоретичних джерел було підтверджено, що одним із провідних чинників успішності формування просторових уявлень є організація навчання, орієнтована на активну діяльність учнів. Використання графічного моделювання, цифрових освітніх ресурсів, практичних робіт із креслення або конструювання значно підсилює навчальний ефект, оскільки поєднує сенсорний, образний та логічний рівні пізнання. Це дозволяє створити умови, за яких учень не лише спостерігає за готовою моделлю, а й самостійно відтворює предмет у просторі, що підвищує глибину та міцність засвоєння.

Узагальнюючи результати, можна стверджувати, що формування просторових уявлень учнів є системним та цілеспрямованим процесом, який потребує методичного забезпечення, відповідного змістового наповнення та високого рівня педагогічної майстерності. Отримані висновки підтверджують доцільність подальших досліджень у напрямі розробки модернізованих методик, які б поєднували традиційну геометричну школу та інноваційні цифрові інструменти. Значущість такого напрямку зумовлена тим, що розвиток просторового мислення є важливою умовою формування компетентного випускника профільної школи, здатного до успішного опанування математичних, технічних та природничих дисциплін у подальшій освіті.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИКЛАДАННЯ, ОБ'ЄМИ ТА ПЛОЩІ ПОВЕРХОНЬ НА ПРОФІЛЬНОМУ РІВНІ ТЕМИ «ГЕОМЕТРИЧНІ ТІЛА»

2.1. Особливості викладання теми з використанням наочності та моделювання

Організація вивчення просторових тем у старшій школі потребує системного поєднання наочності та моделювання, оскільки ці методи суттєво впливають на формування стійких просторових уявлень, що є обов'язковим компонентом математичної компетентності учнів. Важливо, щоб учитель не лише демонстрував готові моделі, а й залучав учнів до самостійного побудування просторових об'єктів, адже через власну конструктивну діяльність школярі починають глибше усвідомлювати структуру геометричних тіл. Окремого значення набуває використання цифрових засобів, які дають змогу «розгорнути» складні фігури та побачити їх внутрішню будову, що зазвичай неможливо зробити під час звичайного фронтального пояснення. Суттєву роль відіграє й поступове ускладнення завдань, які мають переходити від простих побудов до роботи з перерізами, об'ємами та взаємним розміщенням площин у просторі. Не менш важливим є поєднання наочності з аналітичними методами, оскільки саме комплексний підхід забезпечує глибоке розуміння теми [1].

Наприклад, Задача 1. У правильній піраміді висотою 12 см сторона основи дорівнює 10 см. Знайдіть довжину бічного ребра.

Розв'язання:

У правильній піраміді висота, проведена в центр основи, утворює прямокутний трикутник із бічним ребром. Центр правильного многокутника є центром описаного кола, радіус якого для квадрата зі стороною 10 дорівнює

$$r = \frac{10\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2} \text{ см}$$

Тоді бічне ребро дорівнює

$$l = \sqrt{12^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{144 + 50} = \sqrt{194} \text{ см}$$

Застосування просторових моделей у старшій школі значно підсилює здатність учнів переходити від візуального сприйняття до аналітичного опису об'єктів, що особливо важливо під час вивчення теми перерізів геометричних тіл. У цьому процесі вчитель має створювати умови для активного практичного залучення школярів, дозволяючи їм самостійно виконувати побудови на моделях або у програмах динамічної геометрії. Саме власні дії учня сприяють виробленню навичок просторового передбачення – уміння визначати форму перерізу ще до фактичної побудови. Крім того, учні набувають здатності порівнювати декілька можливих конфігурацій та обирати серед них правильну, що готує їх до розв'язування складних завдань поглибленого рівня. Подібні види діяльності, як зазначають провідні українські методисти, формують стійку систему геометричних понять і сприяють розвитку логічного мислення [2].

Приклад. Задача 2. Через бічне ребро правильної чотирикутної призми проведено площину, перпендикулярну до основи. Основою є квадрат зі стороною 6 см, а висота призми дорівнює 8 см. Знайдіть площу перерізу.

Розв'язання:

Площина проходить через бічне ребро і перпендикулярна до площини основи, отже перерізом буде прямокутник. Одна його сторона дорівнює висоті призми (8 см), а друга – діагоналі квадрата:

$$d = 6\sqrt{2} \text{ см}$$

Тому площа:

$$S = 8 \cdot 6\sqrt{2} = 48\sqrt{2} \text{ см}$$

Викладання просторової геометрії із використанням моделей дає змогу поступово вводити учнів у складні ситуації, коли для правильного розв'язання задачі необхідно враховувати одночасно кілька просторових зв'язків. Якщо учень бачить реальну модель або її цифровий аналог, він починає краще розуміти взаємне розміщення площин, ребер та висот, що знижує кількість типових помилок. Особливо важливо вміти аналізувати опорні конструкції, які повторюються у багатьох складних задачах, наприклад, трикутні чи

тетраедральні конфігурації. У старшій школі такі задачі виконують не тільки навчальну, але й підготовчу функцію – вони формують у школярів базу для успішного складання ЗНО та участі в математичних олімпіадах. Власне, систематичне застосування моделей дозволяє створити в учнів коректні ментальні образи простору, що, як підкреслюють практики, значно підвищує рівень успішності [3].

Приклад. Задача 3. У тетраедрі $ABCD$ відомо, що ребра $AB=AC=AD=6$. Знайдіть об'єм тетраедра, якщо площа трикутника BCD дорівнює $9\sqrt{3}$

Розв'язання:

Тетраедр має три рівні ребра, які виходять з точки A , тобто висота з вершини A падає на площину трикутника BCD . Об'єм:

$$V = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot h$$

де висота h обчислюється за формулою:

$$h = \sqrt{AB^2 - R^2}$$

а R радіус кола, описаного навколо трикутника BCD . Для площі

$$S = \frac{abc}{4R}$$

Нехай трикутник рівносторонній: тоді $a = b = c = 6\sqrt{3}$, але тоді площа значно більша.

Використаємо формально:

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{6 \cdot 6 \cdot 6}{4 \cdot 9\sqrt{3}} = \frac{216}{36\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

Тоді

$$h = \sqrt{36 - 12} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

Отже,

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{18} = 6 \cdot 3\sqrt{2} = 18\sqrt{2}$$

Однією з ключових проблем у навчанні стереометрії є труднощі переходу від плоских побудов до просторових, що часто спостерігається у

старшокласників під час виконання складних завдань. Саме тому важливо забезпечити учнів доступом до моделей, які дозволяють візуалізувати не лише самі об'єкти, а й допоміжні конструкції, потрібні для розв'язання задач. Розвиток уміння працювати з допоміжними лініями у просторі – це центральний компонент формування математичної культури учня, оскільки без такої навички він не зможе виконувати глибокі логічні переходи. Наочність допомагає учням не лише краще орієнтуватися в просторі, а й вибудовувати послідовності міркувань, що відповідають строгим геометричним вимогам. Такі підходи, як підкреслюють методисти, необхідні для ефективного засвоєння програмового матеріалу профільної школи [4].

Моделювання дає можливість не лише побачити структуру геометричного тіла, але й виявити його приховані властивості, які часто залишаються непоміченими під час фронтального пояснення. Учні через маніпуляції з моделями починають інтуїтивно розуміти інваріантність певних просторових характеристик, таких як співвідношення діагоналей, радіуси сфер, розміщення центрів ваги, напрямки висот. Коли школярі переходять від інтуїтивного сприйняття до аналітичного оформлення, вони отримують досвід побудови математичного доведення, що є одним з ключових результатів профільної математичної освіти. Використання моделей стимулює розвиток просторової креативності, яка необхідна для розв'язування задач підвищеної складності, зокрема тих, що пропонуються на олімпіадах. Як зазначають дослідження, формування таких навичок суттєво підвищує академічну успішність [5].

Поглиблене вивчення стереометрії вимагає послідовного переходу від простих задач до комплексних, у яких необхідно поєднувати об'ємні уявлення та алгебраїчні методи. Учні старших класів повинні навчитися не лише бачити просторову конструкцію, а й уміти обґрунтовувати, чому саме певна допоміжна побудова є необхідною для розв'язання задачі. Навчальні моделі дозволяють реалізувати принцип проблемності: учень спершу стикається з ситуацією, яку важко вирішити без наочного матеріалу, а після маніпуляцій із моделлю

самостійно відкриває ключове співвідношення. У психології навчання такі стратегії вважаються оптимальними для розвитку структурного мислення. Окрім цього, використання моделей сприяє тому, що учні частіше шукають нестандартні підходи та не бояться складних задач [6].

Наочність є фундаментальним інструментом, що забезпечує коректне розуміння положення ліній і площин у просторі, особливо коли йдеться про складні взаємозв'язки, які не можна адекватно зобразити на площині. Візуальні моделі дозволяють учням проводити уявні експерименти, прогнозувати результати перетворень та контролювати правильність власних побудов. Коли школяр працює з моделюванням, він здобуває досвід практичного застосування аксіом та теорем стереометрії, що сприяє їх кращому засвоєнню. На практиці це проявляється у значному зменшенні кількості помилок під час роботи з перерізами та обчисленнями об'ємів складних тіл. У методичній літературі підкреслюється, що візуальні моделі є незамінними під час формування компетентностей просторового аналізу [7].

У процесі навчання особливу роль відіграє здатність учня переходити від аналізу окремих просторових елементів до розуміння цілісної структури геометричного об'єкта, що є головною вимогою досягнення рівня профільної підготовки. Робота з моделями дозволяє відтворювати складні конфігурації, у яких необхідно не тільки бачити простір, а й прогнозувати зміни, що відбуваються в результаті «пересування» площин або накладання нових конструкцій. Стереометричні моделі дають можливість демонструвати багато аспектів об'єкта, що перебувають поза полем зору в двовимірному зображенні. Учні отримують доступ до таких характеристик, як взаємні кути площин, змінні перерізи, похилі відстані та тривимірні симетрії. У дослідженнях українських педагогів наголошується, що саме ці навички формують основи математичного світогляду старшокласників [8].

Приклад. Задача 4. У правильної трикутної призми ребро основи 6 см, висота призми 10 см. Знайти кут між бічною гранню і площиною основи.

Розв'язання:

Кут між гранню і основою дорівнює куту між висотою призми та площиною основи:

$$\tan \varphi = \frac{h}{r}$$

Де

$$r = \frac{6\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{10}{2\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)$$

Окремої уваги потребує формування в учнів уміння аналізувати комбіновані просторові конструкції, у яких одночасно присутні елементи різних геометричних тіл. Такі задачі характерні для профільного рівня та олімпіадного руху, оскільки вони перевіряють не лише знання теорем, але й здатність учнів застосовувати їх у нетипових ситуаціях. Використання моделей у таких випадках стає невід'ємним засобом, що допомагає уникнути помилок, пов'язаних із неправильним просторовим уявленням або некоректним вибором площини перерізу. Варто зазначити, що складні просторові моделі, зокрема ті, що створюються за допомогою 3D-редакторів, дозволяють учням виконувати серію експериментів, перевіряючи правильність власних гіпотез. Досвід учнів, які працюють з такими моделями, демонструє значне підвищення здатності до логічних узагальнень і побудови доведень [9].

Дослідження показують, що навіть учні з високими математичними здібностями часто припускаються помилок у задачах, де потрібно поєднати кілька просторових уявлень одночасно, наприклад, визначити форму перерізу складної фігури за умов, коли площина передається через три точки, які не лежать на одній грані. Саме тому систематичне використання наочності значно підвищує точність просторового аналізу. Коли учень бачить, як площина "проходить" крізь тіло, він краще усвідомлює структуру взаємодії площини та об'єкта. Це дозволяє уникнути типових хибних припущень, наприклад,

неправильного вибору ліній, що входять у переріз або невірному визначення напрямків ребер. У профільній школі ці навички мають ключове значення, особливо у підготовці до олімпіад, де значна частина задач передбачає роботу саме з геометричними перетинами.

Приклад. Задача 5. У правильній трикутній призмі $ABCA_1B_1C_1$ сторона основи дорівнює 6 см, а висота - 12 см. Через точки A_1 , середину ребра BC та вершину C_1 проведено площину. Знайдіть площу перерізу.

Розв’язання:

Середина ребра BC позначимо M . Площина проходить через точки A_1 , C_1 , M . У площині утворюється трикутник A_1C_1M . Висота призми дорівнює 12, тому $A_1C_1 = AC = 6$. Відрізок MC_1 знаходиться як гіпотенуза:

$$MC_1 = \sqrt{(MC)^2 + (AA_1)^2} = \sqrt{3^2 + 12^2} = \sqrt{153} = 3\sqrt{17}$$

Площа трикутника за двома сторонами і кутом:

Основа $A_1C_1 = 6$, сторона $A_1M = \sqrt{3^2 + 12^2} = 3\sqrt{17}$. Кут між ними – 60° .

$$S = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 3\sqrt{17} \cdot \sin 60^\circ = 9\sqrt{17} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{51}}{2}$$

Таким чином, викладання теми з використанням наочності та моделювання є ключовим чинником ефективного засвоєння просторової геометрії в старшій школі. Поєднання фізичних моделей, цифрових засобів та аналітичних методів забезпечує учням глибше розуміння структури геометричних тіл, формує стійкі просторові уявлення та сприяє переходу від візуального сприйняття до усвідомленого логічного аналізу.

Систематичне застосування моделей дає можливість учням самостійно досліджувати просторові конфігурації, уникати типових помилок і вибудовувати коректні міркування під час розв’язання задач різної складності. Такий підхід не лише підвищує якість засвоєння матеріалу, а й формує компетентності, необхідні для успішного виконання завдань профільного рівня, олімпіад та подальшого вивчення математики.

2.2. Організація практичної діяльності учнів при вивченні об'ємів і площ поверхонь

Організація практичної діяльності учнів під час вивчення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл є ключовим елементом методики навчання стереометрії на профільному рівні [1; 3]. Вона спрямована на формування глибокого розуміння просторових властивостей тіл та вміння застосовувати отримані знання в нестандартних задачах. Практичні дії учнів дозволяють подолати формальне заучування формул, замінивши його усвідомленим аналізом структури тіла. У профільній школі важливо забезпечити різні види діяльності, включно з індивідуальними, груповими та дослідницькими формами. Це створює умови для комплексного розвитку просторового мислення.

Ефективність навчання значною мірою залежить від того, наскільки вчитель систематично вводить практичні завдання, спрямовані на аналіз та побудову моделей геометричних тіл [12]. Учні повинні мати можливість досліджувати властивості поверхонь та об'ємів не лише за допомогою формул, а й через роботу з реальними або цифровими моделями. Це сприяє розвитку навичок математичного моделювання та просторової реконструкції. Особливо корисними є завдання, що потребують комбінування різних геометричних об'єктів. Практична діяльність забезпечує глибше усвідомлення зв'язків між параметрами тіл.

Значне місце у методиці посідає вивчення розгорток тіл, оскільки саме через розгортки учні усвідомлюють будову поверхні просторових фігур [1; 14]. Робота з розгортками формує здатність трансформувати просторові об'єкти у плоскі моделі. Учні навчаються визначати структуру поверхні безпосередньо через плоскі фігури, що відповідають граням тіла. Це дозволяє значно полегшити обчислення площі поверхні. У профільних класах важливо пропонувати завдання на складання розгорток складних тіл.

Приклад. Задача 6: Скласти розгортку правильної шестикутної піраміди зі стороною основи 4 см і апофемою 7 см та знайти площу її повної поверхні.

Розв'язання. Площа основи дорівнює $24\sqrt{3}$. Бічна поверхня складається з шести рівних трикутників площею 14 см^2 кожен. Отже, площа бічної поверхні дорівнює 84 см^2 . Повна площа поверхні:

$$S = 84 + 24\sqrt{3}$$

Практична діяльність повинна включати задачі на комбінування тіл, оскільки такі конструкції наближені до реальних технічних об'єктів [3]. Учні вчаться визначати, які частини поверхні залишаються зовнішніми після об'єднання тіл. Це розвиває аналітичні навички та вміння виділяти суттєву геометричну структуру. Такі задачі формують логічну послідовність міркувань. Вони також дають змогу застосовувати інструменти просторового моделювання.

Приклад. Задача 7. На циліндр радіуса 3 см і висоти 8 см встановлено конус того самого радіуса з твірною 10 см. Знайти площу повної поверхні отриманого тіла.

Розв'язання. Бічна поверхня циліндра – 48π , бічна конуса – 30π , нижня основа – 9π . Сумарна площа: 87π

Важливо давати задачі, у яких невідомі величини приховані в структурі тіла. Це формує вміння аналізувати перерізи та використовувати подібність у просторі. Учні навчаються логічно розкладати задачу на кроки. Такі вправи особливо потрібні для підготовки до зовнішнього оцінювання та олімпіад. Вони дозволяють переходити від інтуїтивного уявлення до точних аналітичних розрахунків.

Приклад. Задача 8. У піраміді висота 15 см. Площина на висоті 9 см від вершини відтинає переріз площею 16 см^2 . Знайти площу основи.

Розв'язання. Коефіцієнт подібності рівний $\frac{3}{5}$. Площі подібних фігур відносяться як квадрати коефіцієнтів:

$$\frac{16}{S_0} = \frac{9}{25}$$

Отже,

$$S_0 = \frac{16 \cdot 25}{9} = \frac{400}{9} \approx 44,45 \text{ см}^2$$

Значну роль відіграють задачі на оптимізацію, що демонструють практичну цінність стереометрії у виробництві та техніці [21]. Учні мають уміти знаходити екстремальні значення площ або об'ємів. Це сприяє розвитку математичної інтуїції. Такі задачі можуть охоплювати комбінації параметрів тіла, що імітують інженерні розрахунки. Вони також допомагають розвинути навички роботи з функціональними залежностями.

Вивчення зрізаних тіл допомагає учням досягнути взаємозв'язок між подібністю фігур і зміною об'єму чи площі поверхні. Такі задачі широко використовуються в методичній літературі для поглибленого вивчення геометрії. Учні повинні вміти застосовувати коефіцієнт подібності для визначення всіх параметрів тіла. Це розвиває здатність бачити пропорційні залежності. Подібні вправи є незамінними для формування повноцінного просторового мислення.

Приклад. Задача 9. Із правильної чотирикутної піраміди висотою 12 см та стороною основи 10 см зрізано вершину на висоті 4 см. Знайти об'єм фруста.

Розв'язання. Маємо правильну чотирикутну піраміду: висота $H = 12$ см, сторона основи $a = 10$ см. Зрізання виконано площиною, паралельною основі, на висоті $h = 4$ см від вершини.

Це означає, що маленька піраміда, яку відсікаємо, подібна до великої з коефіцієнтом подібності:

$$k = \frac{h}{H} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Отже, лінійні розміри меншої піраміди у 3 рази менші, ніж великої. Основою є квадрат зі стороною 10 см:

$$S_{\text{вел}} = a^2 = 10^2 = 100 \text{ см}^2$$

Оскільки лінійні розміри зменшилися в 3 рази, то площі подібних фігур відносяться як квадрати коефіцієнтів:

$$S_{\text{мал}} = S_{\text{вел}} \cdot k^2 = 100 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 100 \cdot \frac{1}{9} = \frac{100}{9}$$

Формула об'єму піраміди:

$$V_{\text{вел}} = \frac{1}{3} S_{\text{вел}} H = \frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 12 = 400$$

Об'єм подібних тіл відноситься як куб коефіцієнта подібності:

$$V_{\text{мал}} = V_{\text{вел}} \cdot k^3 = 400 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 400 \cdot \frac{1}{27} = \frac{400}{27}$$

Фруст – це різниця об'ємів великої та малої пірамід:

$$V_{\text{фруста}} = V_{\text{вел}} - V_{\text{мал}} = 400 - \frac{400}{27} = 400 \cdot \left(1 - \frac{1}{27}\right) = 400 \cdot \frac{26}{27} = \frac{10400}{27}$$

Відповідь:

$$V_{\text{фруста}} = \frac{10400}{27} \approx 385,19 \text{ см}^3$$

Задачі на «виокремлення частини» формують навички використання принципу суперпозиції об'ємів. Учні повинні вміти правильно визначати, які частини залишаються в результаті операції. Це допомагає уникати помилок у складних інженерних задачах. Подібні вправи можна використовувати для підготовки до олімпіад. Вони також розвивають уважність і точність.

Приклад. Задача 6. У кулі радіуса 6 см висвердлено циліндр радіуса 2 см. Знайти об'єм отриманого тіла.

Розв'язання. Висота циліндра $8\sqrt{2}$. Об'єм циліндра $-32\sqrt{2}\pi$ Об'єм кулі -288π Різниця дає об'єм тіла. Повний розв'язок задачі у додатку Б.

Окрему роль відіграє формування навичок знаходити допоміжні елементи тіл. Це включає обчислення висот, діагоналей, радіусів описаних і вписаних фігур. Учитель має організувати діяльність так, щоб учні самостійно знаходили структуру задачі. Це сприяє розвитку просторової логіки. Учні вчаться розкладати складну задачу на елементарні кроки.

У профільному курсі доцільно включати задачі на обертання складних фігур. У таких вправах учні вчаться уявляти зміну структури тіла при русі фігури у просторі. Це розвиває здатність проектувати геометричні моделі. У процесі практичної діяльності формується новий рівень просторової уяви. Вчитель може застосовувати цифрові симулятори для демонстрації обертання.

Приклад. Задача 7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням трапеції з основами 6 і 10 та висотою 4 навколо більшої основи.

Розв'язання. Отримуємо зрізаний конус із радіусами 6 і 10. Об'єм: $784\pi\sqrt{3}$. Повний розв'язок задачі у додатку Б.

Організація практичної діяльності має включати дослідження, у яких учні самостійно моделюють задачі. Це відповідає сучасним тенденціям компетентнісного навчання. Учні можуть створювати власні моделі тіл та формулювати задачі на обчислення їх параметрів. Це розвиває творчість і здатність до дослідницької діяльності. Такий досвід формує глибше розуміння геометрії як науки.

Підсумовуючи, практична діяльність у вивченні об'ємів і площ поверхонь забезпечує системний розвиток просторових уявлень та аналітичних здібностей учнів. Різноманітність задач сприяє формуванню стабільної геометричної компетентності. Учні вчаться поєднувати моделювання, логічні міркування та формульні методи. Профільний рівень вимагає систематичного включення складних задач, що розвивають високий рівень просторового мислення. Це робить навчання стереометрії глибоким і результативним.

2.3. Використання інформаційно-комунікаційних технологій та інтерактивних методів навчання

Використання інформаційно-комунікаційних технологій у процесі навчання геометрії профільного рівня є важливим компонентом сучасної методики. Цифрові інструменти дають можливість візуалізувати складні просторові об'єкти, які важко уявити на звичайному кресленні. Учні отримують

доступ до можливості обертати модель, виділяти її елементи та досліджувати властивості фігур у реальному часі. Завдяки цьому формується глибше розуміння структури геометричних тіл і взаємозв'язків між їх частинами. Такі засоби також сприяють підвищенню мотивації учнів та розвитку дослідницької активності.

Однією з найефективніших цифрових платформ є **GeoGebra** [28], що дозволяє будувати динамічні 2D і 3D моделі. Учень може самостійно змінювати параметри фігури та спостерігати, як це впливає на об'єм, площу поверхні чи переріз тіла. Це дає змогу засвоїти абстрактні поняття засобами інтерактивного експерименту. Учитель може пропонувати учням готові моделі або створювати їх разом під час уроку. Завдяки GeoGebra складні алгоритми розв'язання задач стають більш зрозумілими, оскільки всі ключові елементи видно на екрані.

Інтерактивні моделі особливо корисні під час опрацювання перерізів геометричних тіл. Учні часто відчують труднощі при визначенні форми перерізу, тому можливість «провести» площину крізь тіло в цифровому середовищі є надзвичайно ефективною. Програма автоматично відображає лінію перетину, що дає змогу перевірити правильність власних міркувань. Таким чином, інтерактивний інструмент виконує функцію візуального контролю. Опрацювання таких моделей формує в учнів навички просторового аналізу та математичної інтуїції.

Розглянемо приклад. Учитель пропонує учням у GeoGebra побудувати переріз правильної трикутної призми площиною, яка проходить через вершину верхньої основи та середини двох ребер нижньої основи. Учні створюють модель призми, додають площину та переміщують її до потрібного положення. Програма автоматично будує лінію перерізу. Після цього учні визначають, що перерізом буде трикутник. Такий вид роботи дозволяє відпрацювати не лише побудову, а й аналітичне обґрунтування результату (Додаток В).

У програмі можна обчислити площу отриманого перерізу. GeoGebra автоматично генерує відрізки та дає значення їх довжин. Це дозволяє виконати

завдання повністю: побудувати переріз, обчислити його площу та зробити висновок. Така діяльність формує повний цикл геометричного дослідження. Учні розуміють, що в комп'ютерному середовищі діють ті самі закони геометрії, що й у реальному світі. Це допомагає долати когнітивні бар'єри, пов'язані зі сприйняттям простору.

ІКТ дозволяють моделювати задачі з об'ємів, у яких аналітичне розв'язання потребує складних перетворень. Наприклад, обертання плоскої фігури навколо осі часто призводить до громіздких інтегралів. У GeoGebra 3D учні можуть побудувати фігуру та програмно знайти її об'єм. Це не замінює математичних обчислень, але дає можливість перевірити правильність отриманого результату. Методика підтвердження відповідей за допомогою цифрової моделі значно знижує кількість помилок.

Розглянемо приклад роботи з програмою. Нехай потрібно обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням трапеції навколо осі. Учні будують у GeoGebra трапецію, задають лінію обертання, а програма автоматично створює відповідний 3D-об'єкт. Після цього учень може обчислити об'єм через вбудовану команду Volume. Учні перевіряють: чи збігається числовий результат програми з аналітичним обчисленням. Такий підхід розвиває навички самоконтролю та підвищує впевненість у власних розв'язаннях.

Інтерактивні методи навчання доцільно поєднувати з колективною роботою над задачами. Наприклад, учитель може запропонувати учням виконати проєкт «Побудова перерізів складних тіл». Кожна група обирає своє тіло: піраміду, призму, циліндр чи складену фігуру. Учні мають побудувати 3D модель, виконати різні перерізи та пояснити, яка геометрична фігура утворюється. Захист проєктів перед класом сприяє комунікації та розвитку математичної мови.

У програмі **Desmos 3D** [27] можна моделювати поверхні обертання та комбінації функцій. Наприклад, учитель може запропонувати задачу: «Побудуйте тіло між графіками $y = 4 - x^2$ і $y = 0$, обернене навколо осі x ».

Учні вводять рівняння, використовують команду `revolution3D()`, а Desmos будує модель. Далі учні визначають об'єм тіла за формулою обертання, а програму використовують для візуального підтвердження результату. Це робить навчання гнучким і сучасним. Покрокове розв'язання у програмі зазначено у додатку В.

Цифрові інструменти корисні також для вивчення площ поверхонь складних тіл. Наприклад, учитель може дати задачу: «Знайдіть площу поверхні усіченого конуса, якщо радіуси основ 5 і 3, а твірна 6». GeoGebra дозволяє побудувати конус, ввести параметри та автоматично обчислити площу. Після цього учні виконують ручне обчислення за формулою. Таким чином, цифрове середовище виступає як механізм перевірки та розвитку самостійності.

ІКТ сприяють розвитку вправності в роботі з параметричними моделями. Наприклад, у GeoGebra можна створити змінний повзунок, що керує висотою піраміди. Учні можуть спостерігати, як змінюється об'єм у залежності від параметра. Це дозволяє вивчити функціональні залежності між величинами, що особливо корисно для профільного рівня. Такі завдання виховують здатність до аналітичного мислення.

У профільній школі доцільно включати задачі на комбінацію тіл. Учні часто відчують труднощі з уявленням складених конструкцій. GeoGebra 3D дозволяє створювати об'єднання об'єктів, наприклад, циліндр + усічена піраміда або сфера з вирізаною частиною. Учні вчаться визначати границі інтегрування або обчислювати об'єм за принципом «об'єм більшого тіла мінус об'єм вирізаного». Це формує глибокі компетентності в просторовому аналізі.

Розглянемо приклад задачі з комбінацією тіл. Нехай у кулі вирізано циліндр. Учні створюють у GeoGebra сферу радіуса 6 та циліндр радіуса 2, розташовують циліндр так, щоб його ось проходила через центр кулі. Програма дозволяє відобразити перетин та виміряти висоту циліндра. Навіть без аналітичних обчислень учень може переконатися, що висота дорівнює $2\sqrt{6^2 - 2^2} = 2\sqrt{36 - 4} = 2\sqrt{32} = 8\sqrt{2}$.

ІКТ дозволяють організувати інтерактивні уроки в режимі реального часу. Учитель може використовувати онлайн-дошки, де учні разом моделюють тіла та записують розв'язання. Перевага такого формату полягає у співпраці та можливості негайного аналізу помилок. Учитель бачить, який учень де помилився, і може одразу пояснити. Це суттєво підвищує ефективність навчання.

Цифрові платформи також дозволяють організувати дистанційне вивчення стереометрії. Учні отримують моделі, які можна переглядати навіть на смартфонах. Вони можуть самостійно виконувати маніпуляції з моделями та виконувати завдання. Завдяки цьому процес навчання стає більш доступним і безперервним. Це особливо важливо для сучасної школи.

Інтерактивні методи навчання повинні включати елементи дослідницької діяльності. Учитель може пропонувати учням створювати власні 3D-моделі та формулювати задачі на їх основі. Наприклад, учень створює модель піраміди з додатковими перерізами, а потім пропонує однокласникам задачу на обчислення площі цих перерізів. Такий підхід розвиває творче мислення. Учні стають активними учасниками навчального процесу.

Популярним методом є використання інтерактивних симуляцій. Програми, які моделюють падіння тіні, рух точок і деформації моделей, допомагають учням зрозуміти просторові трансформації. Наприклад, учень може дослідити, як змінюється площа тіні куба при зміні кута освітлення. Такі завдання розвивають інтуїцію та дозволяють працювати зі складними геометричними уявленнями. Це важливий аспект для профільної підготовки.

Цифрові інструменти підвищують точність розрахунків у складних задачах. Наприклад, учень може побудувати 3D-модель еліптичного конуса та знайти його об'єм числовим методом, використовуючи розбиття тіла на шари. Програма дозволяє контролювати похибку. Таким чином, учні опановують як класичні методи, так і методи наближених обчислень, які використовуються в інженерних дисциплінах.

ІКТ та інтерактивні методи навчання значно розширюють можливості викладання стереометрії на профільному рівні. Учні не лише бачать складні геометричні об'єкти, але й взаємодіють із ними, що формує глибоке розуміння матеріалу. Поєднання цифрових інструментів із традиційними методами забезпечує оптимальний результат. Такі технології допомагають адаптувати навчальний процес до потреб сучасних учнів. Інтерактивність стає ключем до підвищення успішності та розвитку логічного мислення.

2.4. Розвиток дослідницьких умінь учнів через проектну діяльність та задачі прикладного змісту

Розвиток дослідницьких умінь учнів є одним із ключових завдань профільного навчання математики. Вивчення геометричних тіл, їх об'ємів та площ поверхонь створює широкі можливості для організації дослідницької та проектної діяльності. Саме практична спрямованість теми стимулює учнів до вивчення реальних об'єктів, проведення вимірювань, створення моделей та формування власних висновків. На уроках учні мають можливість не просто відтворювати знання, а застосовувати їх у практичних ситуаціях. Це стає фундаментом розвитку інтелектуальної самостійності.

Проектна діяльність є продуктивним методом навчання, оскільки вона забезпечує поєднання теоретичних знань і практичних навичок. Вона дозволяє учням працювати з реальними або змодельованими об'єктами, досліджувати їх характеристики та аналізувати отримані результати. Проектна робота інтегрує математичні, технологічні, інженерні та інформаційні компетентності. Такий підхід сприяє розвитку здатності учнів планувати роботу, розподіляти обов'язки та відповідально ставитися до результатів. Навичка дослідження формується природним шляхом, через практику.

Вивчення геометричних тіл у старшій школі має не лише теоретичний характер, а й тісно пов'язане з реальними потребами сучасного життя. Учні працюють із предметами, які їх оточують щодня: упаковками, меблями,

контейнерами, елементами будівель. Здійснення реальних вимірювань і обчислень робить навчання змістовним та актуальним. Дослідницький підхід забезпечує глибше розуміння сутності геометричних величин. Учні починають усвідомлювати практичну користь геометрії.

Основною метою застосування проектної діяльності у вивченні геометричних тіл є формування умінь аналізувати інформацію та робити обґрунтовані висновки. Учні навчаються ставити проблему, висувати гіпотези, визначати методи дослідження і перевіряти їх ефективність. Викладач спрямовує процес, але не дає готових рішень, що стимулює самостійність мислення. Результатом стає розвиток навичок інтелектуальної ініціативи. Учень відчуває себе творцем знань.

Проектна діяльність сприяє формуванню вміння працювати з інформаційними джерелами різного типу. Учні використовують підручники, довідники, технічні креслення, графічні матеріали та цифрові інструменти. Їм необхідно обробляти й систематизувати дані, оцінювати точність та достовірність джерел. Така робота формує навички критичного аналізу. Вона допомагає застосовувати математику в реальних дослідницьких ситуаціях.

Важливою формою проектної діяльності є створення просторових моделей геометричних тіл. Учні розробляють макети з паперу, картону, пластику, дерева або використовують 3D-принтер. У ході роботи вони здійснюють вимірювання, розраховують площу поверхні та об'єм створеної моделі. Це створює умови для практичного застосування формул і досвід перевірки їх правильності. Учні самостійно роблять висновки щодо співвідношення параметрів і форми.

Ефективним засобом розвитку дослідницьких компетентностей є експериментальні методи. Наприклад, учні можуть визначати об'єм нерегулярних тіл за допомогою води або піску, порівнюючи результати з об'ємами правильних тіл. Експеримент дозволяє побачити різницю між теоретичним і практичним результатом. Це формує навички перевірки гіпотез

та аналізу похибок. Такі дослідження роблять навчання інтелектуально цікавим.

У старшій школі важливо навчати учнів оцінювати ефективність різних конструкцій та геометричних форм. Наприклад, порівняння площ поверхонь тіл з однаковим об'ємом дозволяє визначити найбільш економічну форму упаковки. Учні можуть дослідити, чому кулі використовуються в газових балонах, а циліндри в резервуарах. Така робота сприяє формуванню вміння знаходити оптимальні рішення. Дослідницький підхід розвиває математичну інтуїцію.

Використання цифрових інструментів також є важливою частиною проектної діяльності. Програми 3D-моделювання дають змогу змінювати параметри фігур і спостерігати вплив змін на об'єм і площу поверхні. Учні вчаться аналізувати ситуації із багатьма змінними. Це забезпечує розвиток інформаційно-технологічної компетентності. Цифрова інтеграція відповідає вимогам сучасної освіти.

Проектні завдання часто виконуються у групах, що сприяє розвитку комунікативних умінь. Учні вчаться розподіляти відповідальність, узгоджувати позиції та презентувати результати. Спільна робота дає можливість поєднати індивідуальні сильні сторони членів команди. Дослідження стає засобом соціального розвитку. Це зміцнює внутрішню мотивацію до навчання.

Важливим етапом проектної діяльності є публічний захист роботи. Учні готують доповідь, демонструють створені моделі та аргументують результати. Такий підхід формує вміння обґрунтовувати власну позицію та відповідати на критичні запитання. Це розвиває культуру наукового спілкування. Учні набувають досвіду наукового дискурсу.

У процесі реалізації проектів учитель виступає консультантом і наставником. Він допомагає визначити напрям дослідження, підказує можливі шляхи розв'язання складних проблем. Однак викладач не пропонує готових відповідей, зберігаючи дослідницький характер роботи. Такий стиль

викладання розвиває самостійність та відповідальність. Це сприяє переходу від пасивного засвоєння знань до їх активного творення.

Дослідницька діяльність сприяє розвитку в учнів гнучкості мислення й здатності аналізувати нестандартні умови задач. Учні отримують можливість створювати власні алгоритми та перевіряти їх ефективність. Формується готовність до розв'язування нових проблем. Цей досвід є цінним не лише у навчанні, а й у майбутній професійній діяльності. Учні вчаться мислити як дослідники.

Проектні завдання дозволяють враховувати різні рівні підготовки учнів. Сильні учні можуть займатися складними теоретичними дослідженнями, наприклад, виведенням формул або побудовою узагальнень. Учні з меншою математичною підготовкою виконують практичні прикладні проекти. У такому поєднанні створюється інклюзивне освітнє середовище. Ніхто не втрачає мотивації.

Важливою складовою розвитку дослідницьких умінь є рефлексія. Після виконання проектів учні аналізують труднощі, результати і можливі шляхи покращення. Це допомагає формувати вміння оцінювати власну діяльність. Рефлексія сприяє усвідомленню індивідуальної динаміки навчання. Вона робить процес розвитку контрольованим і цілеспрямованим.

Приклади проектів.

Проект 1. «Оптимальна форма упаковки». Мета проекту – дослідити, яка геометрична форма забезпечує мінімальну площу поверхні при заданому об'ємі.

Учні аналізують різні моделі упаковок: циліндричні, призматичні, сферичні та комбінаційні. Вони знаходять площу поверхні кожної моделі, порівнюють затрати матеріалу та роблять висновок про найекономнішу форму. Робота передбачає створення 3D-моделей і практичних картонних зразків. Результатом є рекомендації щодо раціонального використання матеріалів.

Проект 2. «Проектування теплиці з мінімальними тепловими втратами».

Учні досліджують залежність теплових втрат від площі поверхні геометричного тіла. Порівнюються моделі теплиць у формі півсфери, призми, піраміди та комбінованих конструкцій. Учні обчислюють площу поверхні, аналізують економічність та роблять висновки щодо найефективнішої моделі. Виконується комп'ютерне моделювання та створення макетів. Результати застосовні у реальних умовах.

Проект 3. «Визначення об'єму резервуарів у місцевому виробництві». Учні досліджують реальні резервуари на підприємстві або в комунальній структурі населеного пункту. Вони проводять вимірювання, будують геометричні моделі та визначають об'єм. Досліджуються похибки вимірювань і можливі способи їх зменшення. Проект зорієнтований на практичну користь і залучає учнів до взаємодії з реальними виробничими процесами.

Реалізація таких проектів формує здатність учнів застосовувати математичні знання в реальних ситуаціях. Вони розвивають творчість, аналітичне мислення та навички експериментування. Проектна діяльність робить процес навчання цікавим та мотивуючим. Учні отримують досвід практичної роботи з науковими методами.

Таким чином, проектні технології та дослідницька діяльність є дієвим засобом формування навчальної самостійності, відповідальності та професійних компетентностей старшокласників. Вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь стає основою наукового пошуку та практичного застосування знань. Дослідницький підхід перетворює навчання математики зі звичайного відтворення інформації на активний творчий процес. Саме завдяки цьому учні здобувають навички, необхідні для успішного майбутнього.

2.5. Оцінювання ефективності методики вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь у курсі математики старшої школи на профільному рівні

Для оцінювання ефективності методики вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь у курсі математики старшої школи на профільному рівні важливо враховувати як кількісні, так і якісні показники навчальних досягнень учнів. Застосування спеціально розробленої методики, що поєднує теоретичне обґрунтування, розв'язування задач різного рівня складності, просторову візуалізацію та міжпредметні зв'язки, сприяє глибшому розумінню просторових форм, формуванню стійких математичних умінь і розвитку логічного та просторового мислення учнів.

Для детального аналізу ефективності запропонованої методики було проведено педагогічне дослідження на базі Пирятинського ліцею №4 Пирятинської міської ради, у якому брали участь учні 10-11 класів, що навчалися на профільному рівні. У процесі навчання особливу увагу приділяли вивченню тем, пов'язаних з многогранниками, тілами обертання, обчисленням об'ємів та площ поверхонь, а також застосуванню різних способів розв'язування задач. Порівнювалися результати учнів, які навчалися за традиційною методикою, з результатами тих, хто працював за удосконаленою методикою вивчення просторової геометрії.

Оцінювання ефективності методики здійснювалося на основі результатів контрольних і самостійних робіт, спостережень за навчальною діяльністю учнів, анкетування та аналізу рівня сформованості просторових уявлень. Особливу увагу приділено аналізу навчальної мотивації, умінню застосовувати теоретичні знання до розв'язування практико-орієнтованих і прикладних задач, а також здатності учнів аргументувати хід міркувань при розв'язуванні задач на обчислення об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл.

Результати проведеного дослідження засвідчують суттєвий позитивний вплив упровадження спеціально розробленої методики вивчення геометричних

тіл, об'ємів та площ поверхонь на якість математичної підготовки учнів старшої школи. Аналіз отриманих даних підтверджує, що систематичне використання просторової візуалізації, моделей геометричних тіл та різнорівневих задач сприяє підвищенню рівня сформованості геометричних понять, точності обчислень і здатності учнів застосовувати теоретичні знання на практиці.

Важливим аспектом дослідження стала оцінка навчальної мотивації учнів під час вивчення тем просторової геометрії. Результати анкетування свідчать, що більшість учнів позитивно сприймають запропоновану методику, оскільки вона робить процес навчання більш наочним і зрозумілим. Використання геометричних моделей, креслень, просторових уявлень і прикладних задач сприяє зниженню рівня навчальної тривожності, пов'язаної з розв'язуванням задач на обчислення об'ємів і площ поверхонь, та формує стійкий інтерес до вивчення стереометрії.

Оцінювання методики з боку вчителів також підтверджує її ефективність. Педагоги відзначають, що чітка структурованість матеріалу, поєднання теоретичних пояснень із практичними та дослідницькими завданнями значно полегшують підготовку до уроків і організацію навчальної діяльності учнів. Крім того, запропонована методика дає змогу диференціювати завдання за рівнем складності, враховувати індивідуальні освітні потреби учнів та своєчасно виявляти прогалини у знаннях з просторової геометрії.

Таким чином, результати дослідження демонструють комплексний позитивний ефект від упровадження методики вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь у курсі математики старшої школи на профільному рівні. Застосування системного підходу до формування просторових уявлень, поєднання теоретичного матеріалу з практичними та прикладними задачами сприяє підвищенню академічної результативності учнів, розвитку логічного й просторового мислення, а також зростанню навчальної мотивації.

Впровадження запропонованої методики зумовило суттєві зміни в якості засвоєння навчального матеріалу зі стереометрії. Проведений аналіз

порівняльних показників навчальних досягнень учнів, їхньої зацікавленості у вивченні просторової геометрії та організації навчальної діяльності підтверджує її ефективність. Отримані результати свідчать про доцільність використання сучасних методичних підходів до вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь та їх позитивний вплив на професійну діяльність учителів і якість математичної освіти загалом.

Отримані результати дослідження свідчать про позитивний вплив упровадження спеціально розробленої методики вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь на навчальні досягнення учнів і організацію освітнього процесу. Порівняльний аналіз показників дозволяє оцінити ефективність традиційного підходу та удосконаленої методики навчання стереометрії. У таблиці 2.1 наведено узагальнені результати дослідження, що підтверджують доцільність використання сучасних методичних підходів у вивченні просторової геометрії.

Таблиця 2.1.

Вплив методики вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь
на результати навчання учнів

Показник	Традиційна методика	Удосконалена методика
Середній бал за контрольні роботи зі стереометрії	7,1	8,4
Рівень сформованості просторових уявлень (за 10-бальною шкалою)	6,3	8,2
Навчальна мотивація до вивчення тем просторової геометрії	68%	86%
Уміння застосовувати формули об'ємів і площ поверхонь у задачах	65%	85%

Джерело: складено автором

У таблиці 2. представлено порівняння основних показників навчальної діяльності учнів, які вивчали стереометрію за традиційною методикою, та учнів, які навчалися за удосконаленою методикою. Аналіз даних показує зростання середнього балу за контрольні роботи, підвищення рівня сформованості просторового мислення та мотивації до навчання. Зменшення

часу підготовки вчителя до уроків свідчить про ефективність структурованого подання навчального матеріалу та доцільність використання сучасних методичних підходів у викладанні геометрії в старшій школі.

Рівень навчальної мотивації учнів, оцінений за 10-бальною шкалою, засвідчує істотну різницю між традиційною методикою навчання та удосконаленою методикою вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь. За традиційного підходу цей показник становить 6,3 бала, тоді як упровадження удосконаленої методики сприяло його зростанню до 8,2 бала. Це свідчить про підвищення інтересу учнів до вивчення стереометрії, активізацію їх пізнавальної діяльності та залучення до розв'язування задач прикладного характеру.

Показник задоволеності учнів навчальним процесом також демонструє позитивну динаміку. За результатами дослідження, у разі застосування традиційної методики рівень задоволеності становить 68%, тоді як використання удосконаленої методики забезпечує зростання цього показника до 86%. Така різниця пояснюється підвищенням наочності навчального матеріалу, логічною послідовністю його подання та можливістю варіативного опрацювання тем, пов'язаних з обчисленням об'ємів і площ поверхонь геометричних тіл.

Аналіз часу підготовки вчителя до уроків свідчить про оптимізацію педагогічної діяльності в умовах упровадження удосконаленої методики. Якщо за традиційного підходу підготовка до уроку тривала в середньому близько 3 годин, то застосування структурованих навчальних матеріалів і методичних рекомендацій у межах удосконаленої методики дозволило скоротити цей час до 2 годин. Це створює додаткові можливості для диференціації навчання та підвищення якості викладання стереометрії в старшій школі.

Отже, на основі аналізу поданих результатів можна дійти висновку, що цілеспрямоване застосування сучасних методичних підходів до вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь у старшій школі сприяє

підвищенню ефективності навчального процесу. Це проявляється у глибшому розумінні просторових форм, розвитку просторового мислення учнів, а також у зростанні їхньої навчальної мотивації та зацікавленості предметом.

Вивчення методики навчання геометричних тіл у курсі математики старшої школи набуває особливої актуальності в умовах профільного навчання. Раціональне поєднання теоретичного матеріалу з практичними завданнями, використання моделей, креслень і міжпредметних зв'язків дозволяє сформувати в учнів цілісне уявлення про геометричні об'єкти, їхні властивості та способи обчислення об'ємів і площ поверхонь. Важливим аспектом є також систематичний аналіз результатів навчальної діяльності, що дає змогу коригувати методику викладання відповідно до рівня підготовки та пізнавальних можливостей учнів.

Наступний етап дослідження передбачає порівняльний аналіз різних методів і прийомів навчання під час вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь у старшій школі на профільному рівні. Особлива увага приділяється формуванню навичок розв'язування прикладних і стереометричних задач, побудові просторових моделей, а також розвитку самостійності учнів у процесі навчання. Отримані результати дають змогу оцінити ефективність запропонованої методики та визначити перспективи її подальшого вдосконалення.

Наступна таблиця 2.2 містить порівняльний аналіз результатів застосування традиційних методів навчання та сучасних методичних підходів (зокрема з використанням наочних і цифрових засобів) під час вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь у старшій школі на профільному рівні. Порівняння здійснюється за такими показниками, як рівень засвоєння просторових понять, уміння розв'язувати задачі на обчислення об'ємів і площ поверхонь, рівень самостійності учнів та їхня навчальна мотивація. Отримані результати свідчать про позитивний вплив удосконаленої методики на якість навчання стереометрії та формування глибших і стійкіших математичних знань.

Таблиця 2.2.

Результати оцінювання ефективності методики вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь у старшій школі (профільний рівень)

Показники	Традиційні методи	Удосконалена методика	Зміна (%)
Рівень засвоєння понять геометричних тіл (%)	70,0	88,0	25,71
Рівень виконання задач на обчислення об'ємів (%)	65,0	85,0	30,77
Рівень виконання задач на обчислення площ поверхонь (%)	62,0	83,0	33,87
Рівень самостійності учнів (за 10-бальною шкалою)	6,5	8,4	29,23
Навчальна мотивація учнів (%)	72,0	90,0	25,00

Джерело: складено автором

Таблиця 2.2 містить порівняльні дані щодо ефективності застосування традиційних методів навчання та удосконаленої методики вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь у старшій школі на профільному рівні. Оцінювання здійснювалося за комплексом показників, що дозволяють визначити рівень сформованості просторових уявлень, умінь розв'язувати стереометричні задачі, а також самостійність і навчальну мотивацію учнів.

Першим показником є рівень засвоєння понять геометричних тіл. За традиційних методів навчання цей показник становить 70,0%, тоді як застосування удосконаленої методики забезпечує його зростання до 88,0%. Таке підвищення на 25,71% свідчить про ефективність використання моделей геометричних тіл, просторових побудов і візуалізації, що сприяють кращому розумінню властивостей та взаємного розміщення об'єктів у просторі.

Наступним показником є рівень виконання задач на обчислення об'ємів геометричних тіл. Учні, які навчалися за традиційною методикою, продемонстрували результат 65,0%, тоді як за умов застосування удосконалених методичних підходів цей показник зріс до 85,0%. Збільшення на 30,77% можна пояснити системним використанням алгоритмів розв'язування,

прикладних задач і міжпредметних зв'язків, що дозволяє учням усвідомлено застосовувати формули для обчислення об'ємів.

Аналогічну позитивну динаміку спостерігаємо й щодо виконання задач на обчислення площ поверхонь геометричних тіл. За традиційного навчання рівень успішності становить 62,0%, тоді як удосконалена методика забезпечує підвищення цього показника до 83,0%, що відповідає зростанню на 33,87%. Це свідчить про ефективність поетапного формування вмінь аналізувати будову тіл, визначати складові поверхні та правильно застосовувати формули.

Рівень самостійності учнів за традиційних методів навчання оцінюється у 6,5 бали за 10-бальною шкалою. Використання удосконаленої методики дозволило підвищити цей показник до 8,4 бали, що відповідає приросту на 29,23%. Такі результати підтверджують, що систематична робота з індивідуальними та дослідницькими завданнями сприяє розвитку в учнів умінь самостійно аналізувати умову задачі та обирати раціональні способи її розв'язання.

Показник навчальної мотивації учнів також зазнає суттєвих змін. За традиційних методів навчання рівень мотивації становить 72,0%, тоді як застосування удосконаленої методики підвищує його до 90,0%. Зростання на 25,0% свідчить про зростання інтересу учнів до вивчення стереометрії, зокрема завдяки практичній спрямованості завдань, зв'язку з реальними об'єктами та можливості візуального моделювання геометричних тіл.

На рис. 2.1. наведено результати порівняння часу, витраченого учнями на виконання завдань зі стереометрії за традиційною та удосконаленою методикою навчання. Для аналізу було виокремлено два основні види навчальної діяльності: обчислення об'ємів геометричних тіл та побудова й аналіз просторових моделей геометричних тіл. Для кожного виду завдань подано дані щодо часу виконання, а також визначено відсоток його скорочення при застосуванні удосконаленої методики.

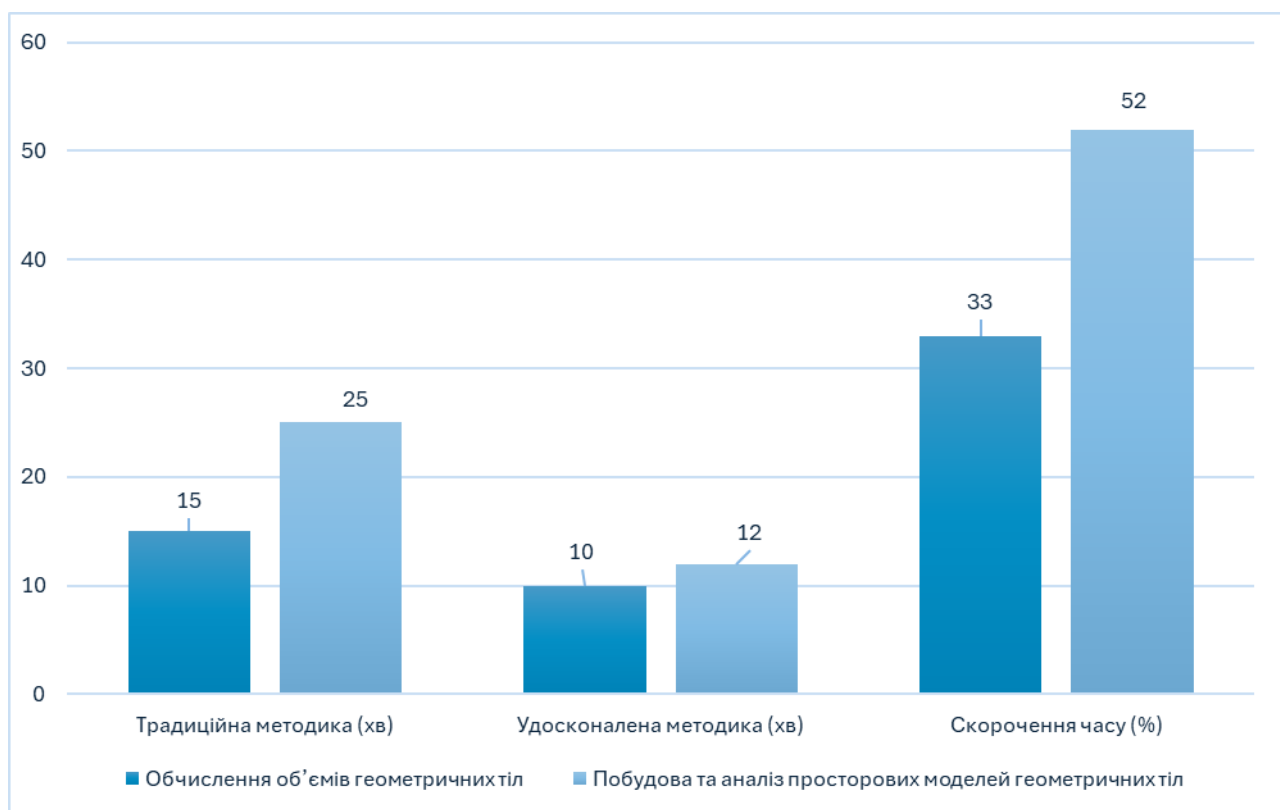


Рис. 2.1. Аналіз часу, який витрачається учнями старших класів профільного рівня на виконання завдань.

Під час виконання завдань на обчислення об'ємів геометричних тіл за традиційною методикою учні витрачали в середньому 15 хвилин, тоді як використання удосконаленої методики дозволило скоротити цей час до 10 хвилин, що становить зменшення на 33%. Таке скорочення часу можна пояснити чіткішою структурою розв'язування задач, поетапним формуванням умінь та використанням наочних схем і моделей, які полегшують розуміння просторових співвідношень.

Найбільш істотне скорочення часу спостерігається під час побудови та аналізу просторових моделей геометричних тіл. За традиційної методики виконання таких завдань займало в середньому 25 хвилин, тоді як за удосконаленої методики — 12 хвилин, що відповідає скороченню часу на 52%. Це свідчить про ефективність використання в навчальному процесі просторової візуалізації, моделей і чітких алгоритмів побудови, які значно спрощують процес опрацювання складних стереометричних об'єктів.

Отже, результати аналізу підтверджують, що застосування удосконаленої методики вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь дозволяє суттєво зменшити час виконання стереометричних завдань. Це підвищує ефективність навчального процесу, створює умови для зосередження учнів на змістовному аналізі задач і сприяє глибшому засвоєнню матеріалу з просторової геометрії.

На рис. 2.2 наведено результати порівняння рівня зосередженості, уважності та концентрації уваги учнів під час вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь за традиційною та удосконаленою методикою навчання. Діаграма відображає вплив різних методичних підходів на пізнавальну активність учнів у процесі роботи з просторовими моделями, виконання креслень і розв'язування прикладних стереометричних задач.

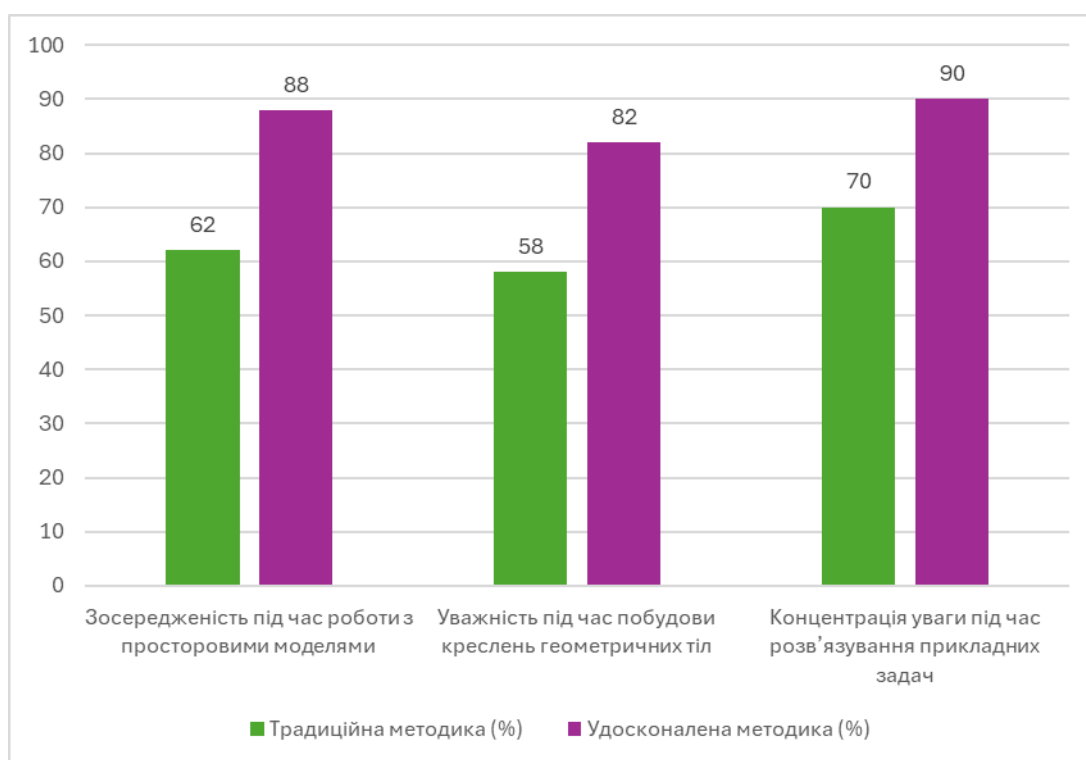


Рис. 2.2. Результати порівняння рівня зосередженості, уважності та концентрації уваги учнів під час вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь за традиційною та удосконаленою методикою навчання

З діаграми видно, що рівень зосередженості учнів під час роботи з просторовими моделями за традиційної методики становить 62%, тоді як за

умов застосування удосконаленої методики цей показник зростає до 88%. Така різниця свідчить про позитивний вплив використання наочних моделей і поетапного аналізу геометричних тіл на активізацію пізнавальної діяльності учнів.

Показник уважності під час побудови креслень геометричних тіл також демонструє суттєве зростання. За традиційного навчання він дорівнює 58%, тоді як удосконалена методика забезпечує підвищення цього показника до 82%. Це можна пояснити системним формуванням умінь аналізувати просторові об'єкти, виділяти їхні елементи та встановлювати між ними взаємозв'язки.

Найвищі результати спостерігаються за показником концентрації уваги під час розв'язування прикладних задач зі стереометрії. За традиційної методики рівень концентрації становить 70%, тоді як за умов удосконаленої методики він підвищується до 90%. Це підтверджує доцільність застосування прикладних задач, пов'язаних із реальними об'єктами, що сприяє підвищенню інтересу учнів до вивчення геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь.

Отже, результати, подані на діаграмі, свідчать про ефективність удосконаленої методики вивчення стереометрії на профільному рівні, оскільки вона забезпечує підвищення пізнавальної активності, зосередженості та концентрації уваги учнів у процесі навчання.

На рис. 2.3–2.4 представлено результати порівняльного аналізу рівня сформованості ключових компетентностей учнів за традиційних методів навчання та за умов застосування удосконаленої методики під час вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь у старшій школі на профільному рівні. Оцінювання здійснювалося за п'ятьма критеріями: критичне мислення, технічна грамотність, самостійне виконання завдань, просторове мислення та вміння застосовувати знання в прикладних задачах.

Як видно з рис. 2.3, за традиційних методів навчання найвищий показник спостерігається за критерієм критичного мислення (70%) та самостійного виконання завдань (68%). Разом із тим рівень технічної грамотності

залишається відносно невисоким (близько 55%), що свідчить про обмежені можливості традиційного підходу щодо формування практичних умінь роботи з кресленнями, моделями та просторовими об'єктами. Просторове мислення сформоване на рівні 55%, а вміння застосовувати знання в прикладних задачах — на рівні 60%, що вказує на потребу в удосконаленні методів навчання.

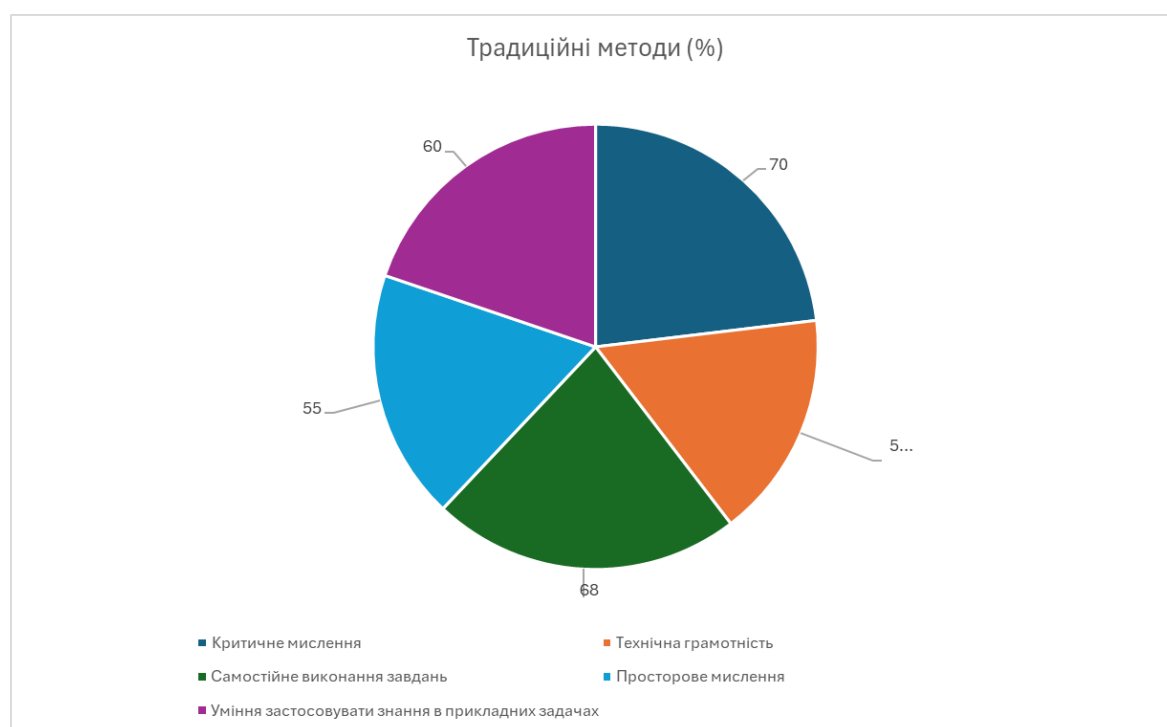


Рис. 2.3. Рівень сформованості ключових компетентностей учнів за традиційних методів навчання (%)

Рис. 2.4 демонструє суттєве зростання всіх показників за умов використання удосконаленої методики. Так, рівень критичного мислення підвищується до 88%, що свідчить про активізацію аналітичної діяльності учнів, вміння порівнювати, узагальнювати та робити обґрунтовані висновки. Показник технічної грамотності зростає до 85%, що пояснюється системним використанням просторових моделей, побудов перерізів і різних форм подання геометричної інформації.

Рівень самостійного виконання завдань за удосконаленої методики досягає 82%, що свідчить про розвиток умінь планувати власну навчальну діяльність і відповідально виконувати стереометричні завдання. Особливо помітне

зростання показника просторового мислення — до 86%, що підтверджує ефективність роботи з наочними та цифровими моделями. Вміння застосовувати знання в прикладних задачах підвищується до 84%, що вказує на зростання практичної спрямованості навчання.

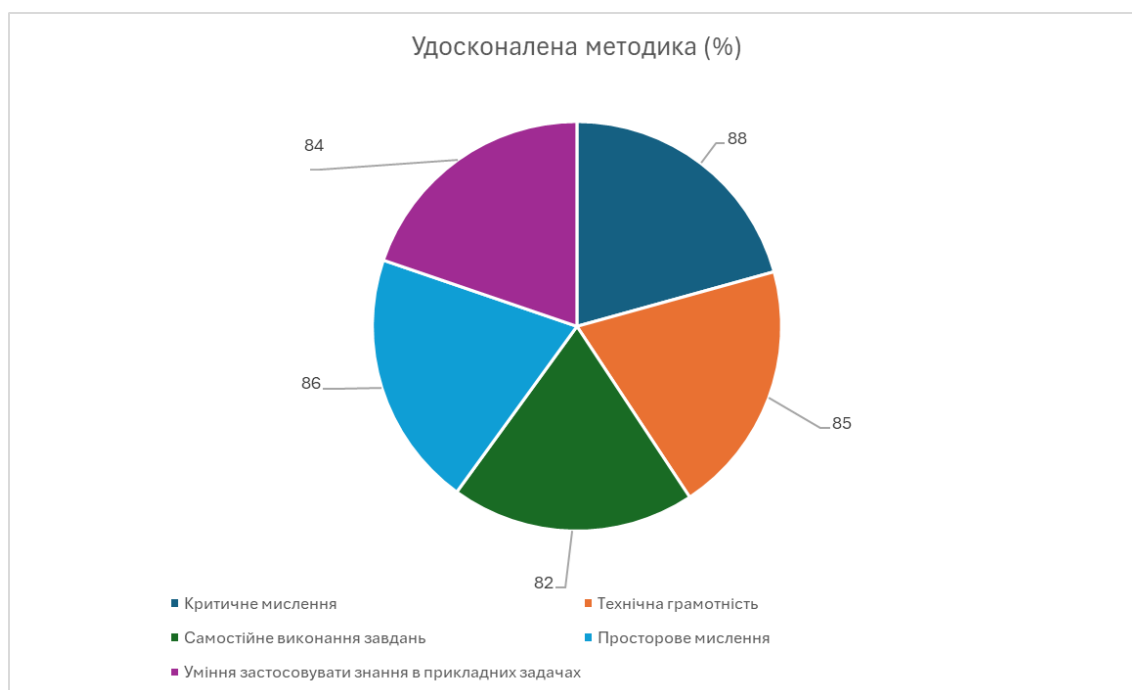


Рис. 2.4. Рівень сформованості ключових компетентностей учнів за умов застосування удосконаленої методики (%)

Отже, порівняльний аналіз, представлений на діаграмах, підтверджує ефективність удосконаленої методики навчання геометрії, оскільки вона забезпечує більш високий рівень сформованості ключових компетентностей учнів порівняно з традиційними методами та створює умови для глибшого розуміння просторових понять і їх практичного застосування.

Результати проведеного дослідження свідчать про суттєвий позитивний вплив удосконаленої методики навчання на процес засвоєння учнями теми геометричних тіл, об'ємів та площ поверхонь. Використання сучасних педагогічних підходів, зокрема візуалізації, комп'ютерного моделювання та практико-орієнтованих завдань, сприяє глибшому розумінню просторових об'єктів і їх властивостей, а також формуванню стійких математичних уявлень.

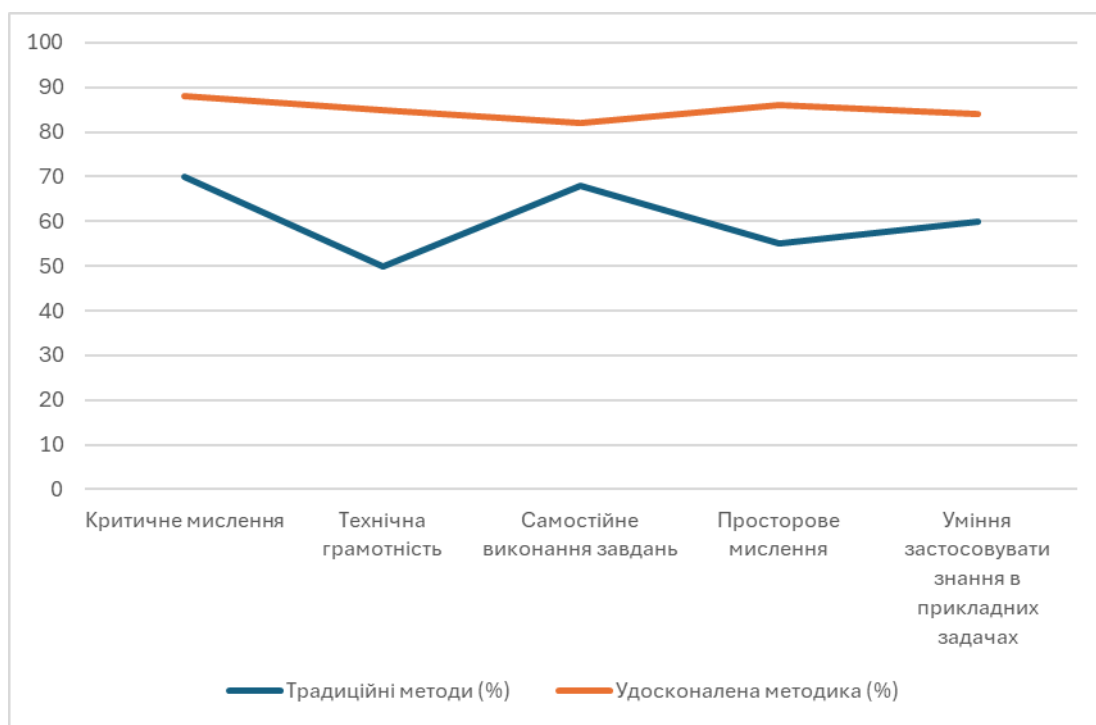


Рис. 2.5. Порівняльна ефективність традиційних та удосконаленої методик вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь у старшій школі (профільний рівень)

Застосування інтерактивних методів навчання забезпечує активну пізнавальну діяльність учнів, підвищує рівень їх зацікавленості та мотивації до вивчення стереометрії. Особливу роль відіграє використання динамічних моделей геометричних тіл, що дає змогу наочно досліджувати взаємне розміщення елементів, аналізувати залежності між лінійними, площинними та об'ємними величинами.

У процесі реалізації удосконаленої методики спостерігається зростання рівня самостійності учнів, розвитку просторового та критичного мислення, а також уміння застосовувати набуті знання під час розв'язування прикладних і практичних задач. Це сприяє формуванню ключових математичних компетентностей, необхідних для подальшого навчання та професійної діяльності.

Отже, удосконалена методика вивчення геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь у старшій школі на профільному рівні є ефективним засобом підвищення якості математичної освіти. Її впровадження забезпечує цілісне

розуміння навчального матеріалу, розвиток пізнавальних здібностей учнів та підвищення результативності навчального процесу загалом.

Висновки до розділу 2.

У процесі вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» важливо забезпечити глибоке усвідомлення учнями просторових уявлень та розвиток умінь оперувати тривимірними об'єктами. На профільному рівні навчання ця тема виступає фундаментальною складовою геометричної освіти, оскільки формує в учнів здатність застосовувати математичні методи до реальних задач, аналізувати й створювати математичні моделі матеріальних об'єктів. Значущість теми зумовлена її широким використанням в інженерії, архітектурі, технологічних дисциплінах та інших сферах, що потребують просторового мислення.

Ефективне опанування теми неможливе без використання різноманітних методичних підходів, які включають поєднання теоретичного викладу, практичних обчислень, графічних побудов і моделювання. Практичні завдання на обчислення об'єму та площі поверхні тіл сприяють усвідомленому засвоєнню формул і закономірностей, а не їх формальному застосуванню. Важливо організовувати навчальний процес так, щоб учні самостійно відкривали закономірності, порівнювали властивості різних геометричних тіл, досліджували залежності та формулювали обґрунтовані висновки.

Значну увагу слід приділяти розвитку просторової уяви як ключового компонента у вивченні стереометрії. Використання моделей, 3D-візуалізації, інтерактивних геометричних середовищ і реальних об'єктів сприяє глибшому розумінню просторових відношень. Залучення учнів до побудови власних моделей із підручних матеріалів або цифрових інструментів підвищує практичну спрямованість навчання та забезпечує краще засвоєння понять про многогранники й тіла обертання.

Важливим аспектом методики є реалізація міжпредметних зв'язків, що дає змогу продемонструвати практичну значущість обчислень площ і об'ємів. Розв'язування задач прикладного змісту, пов'язаних із проектуванням, вимірюванням та технічними розрахунками, підвищує інтерес учнів до вивчення математики й сприяє формуванню професійно орієнтованих компетентностей. Такі завдання розвивають уміння аналізувати реальні ситуації та приймати обґрунтовані рішення.

Проектна діяльність у курсі стереометрії є ефективним засобом розвитку дослідницьких і творчих умінь. Виконання проєктів, пов'язаних із моделюванням архітектурних об'єктів, оптимізацією матеріальних витрат або аналізом геометричних характеристик об'єктів навколишнього середовища, дає змогу інтегрувати теоретичні знання з практичним досвідом. Така діяльність сприяє розвитку критичного мислення, навичок роботи з інформацією та вмінь презентувати результати досліджень.

Роль учителя на профільному рівні полягає у створенні умов для активної, самостійної та дослідницької діяльності учнів. Педагог має забезпечити методично виважене структурування навчального матеріалу, використання наочності, проблемних ситуацій і диференційованого підходу, виступаючи наставником і координатором пізнавальної діяльності учнів.

Сучасні дослідження в галузі методики навчання математики підтверджують ефективність компетентнісного, діяльнісного та цифрово орієнтованого підходів до вивчення стереометрії. Зокрема, науковці відзначають позитивний вплив використання динамічних геометричних середовищ, 3D-моделювання, проблемно-дослідницьких і проєктних методів на розвиток просторового мислення, навчальної мотивації та здатності учнів застосовувати знання в нестандартних ситуаціях. Результати таких досліджень свідчать про доцільність упровадження удосконаленої методики навчання геометричних тіл, об'ємів і площ поверхонь у старшій школі на профільному рівні.

Таким чином, методика викладання теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» повинна забезпечувати комплексний розвиток математичної, просторової, дослідницької та проєктно-конструкторської компетентностей учнів. Поєднання традиційних і сучасних методів навчання, інтеграція практичних і проєктних завдань, використання цифрових технологій та прикладних задач робить навчальний процес змістовним, мотивуючим і професійно спрямованим, що відповідає сучасним вимогам математичної освіти.

ВИСНОВКИ

Проведене дослідження підтвердило важливість методично вивіреної організації вивчення теми «Геометричні тіла, об'єми та площі поверхонь» у курсі математики старшої школи на профільному рівні. Актуальність цієї теми зумовлена її значним впливом на розвиток просторового мислення, математичного моделювання та практичних умінь, що безпосередньо пов'язані з майбутньою професійною діяльністю учнів у технічних, природничо-математичних і творчих сферах. Компетентнісний підхід, на якому ґрунтується сучасна освіта, потребує переорієнтації навчального процесу на формування здатності учнів застосовувати знання в реальних умовах.

У першому розділі дослідження було розглянуто теоретичні засади вивчення геометричних тіл у профільній школі. Проаналізовано особливості організації профільного навчання в Україні, спрямовані на поглиблення предметної підготовки та професійну орієнтацію старшокласників. Встановлено, що цілеспрямований розвиток просторових уявлень є ключовою умовою успішного засвоєння стереометричного матеріалу, а диференціація та індивідуалізація навчання підвищують його ефективність.

Також було окреслено методичні принципи, що лежать в основі формування просторових уявлень учнів, серед яких провідними є науковість, доступність, міжпредметність, зв'язок теорії з практикою та діяльнісний підхід. Аналіз показав необхідність системного використання моделювання, наочності, графічних побудов, роботи з реальними об'єктами та задачами прикладного змісту. Просторова уява розвивається найефективніше за умови поєднання аналітичної, практичної та дослідницької діяльності учнів.

Аналіз чинних програм і підручників засвідчив достатній рівень подання теоретичного матеріалу, проте водночас виявив потребу в методичному оновленні. Зокрема, встановлено нестачу практико-орієнтованих завдань, обмежене використання цифрових інструментів і недостатній розвиток

проектної діяльності, що актуалізує необхідність модернізації навчально-методичного забезпечення курсу стереометрії.

У другому розділі дослідження було розглянуто конкретні методичні аспекти викладання теми на профільному рівні. Доведено, що використання наочності, моделювання та різних форм просторового представлення геометричних тіл активізує пізнавальну діяльність учнів і забезпечує глибоке розуміння властивостей об'ємних фігур. Розгляд тіл у різних проєкціях, виконання перерізів і робота з фізичними та цифровими моделями формують цілісні просторові уявлення.

Обґрунтовано значення практичної діяльності учнів у процесі вивчення об'ємів і площ поверхонь. Розв'язування прикладних задач і виконання практичних робіт сприяє усвідомленню практичної значущості стереометрії та її міждисциплінарних зв'язків з архітектурою, будівництвом, медициною, технологіями й екологією.

Дослідження підтвердило, що використання інформаційно-комунікаційних технологій є важливою умовою модернізації викладання стереометрії. Цифрові ресурси, інтерактивні середовища 3D-моделювання та віртуальні лабораторії забезпечують наочність, варіативність навчальних дій і сприяють індивідуалізації навчання, підвищуючи мотивацію та пізнавальну активність учнів.

Важливе місце відведено розвитку дослідницьких умінь через проектну діяльність. Реалізація проєктів, пов'язаних із математичним моделюванням, оптимізацією форм і розрахунками об'ємів та площ поверхонь, сприяє формуванню навичок аналізу, аргументації, командної взаємодії та презентації результатів досліджень.

Сучасні педагогічні дослідження з методики навчання математики підтверджують ефективність компетентнісного, діяльнісного та цифрово орієнтованого підходів у вивченні стереометрії. Науковці відзначають, що використання динамічних геометричних середовищ, проблемно-дослідницьких

і проєктних методів позитивно впливає на розвиток просторового мислення, математичної грамотності та здатності учнів застосовувати знання у нестандартних і практичних ситуаціях. Отримані в дослідженні результати узгоджуються з сучасними науковими висновками та підтверджують доцільність упровадження удосконаленої методики навчання.

Загалом, проведене дослідження доводить, що ефективність вивчення геометричних тіл на профільному рівні залежить від комплексного поєднання теоретичних знань, практичної діяльності, інформаційних технологій і дослідницьких методів. Реалізація такої методики забезпечує підготовку учнів до подальшої освіти та професійної діяльності, робить навчання змістовним, мотивуючим і результативним. Отримані результати підтверджують необхідність подальшого вдосконалення методичної системи та розширення використання інноваційних технологій у процесі вивчення стереометрії.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Апостолова Г. М. Методика навчання геометрії у старшій школі. Київ: Ліра-К, 2017. 248 с.
2. Астряба О. П., Ярова Л. М. Методика навчання геометрії : навч. посіб. Київ : «Академія», 2018. 224 с.
3. Бевз Г. П., Бевз В. Г. Геометрія. Профільний рівень: підручник для 10–11 класів. Київ: Освіта, 2020. 368 с.
4. Березовська Л. І. Інтегроване навчання у початковій школі: теорія та практика: навч. посіб. Київ. 2022. 148 с. URL: <https://dspace.pdpu.edu.ua/bitstream/123456789/13507/1/%D0%9D%D0%B0%D0%B2%D1%87%D0%B0%D0%BB%D1%8C%D0%BD%D0%B8%D0%B9%20%D0%BF%D0%BE%D1%81%D1%96%D0%B1%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D0%A2%D0%9C%D0%A4%D0%95%D0%9C%D0%A3%20%281%29.pdf>
5. Загородня А. А. Модель реалізації профільного навчання в старших класах середніх загальноосвітніх шкіл України (2011–2017). *Науковий журнал НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія: Педагогічні науки: реалії та перспективи*, 1/80 (5), 2021. С. 91–94. URL: <http://www.chasopys.ps.npu.kiev.ua/80-1> (Дата звернення 10.09.2025)
6. Загородня А. А. Стандартизація профільного навчання в Україні (2011-2017 роки). *Молодь і ринок*. № 9 (195), 2021. С. 33-37. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/737213/> (Дата звернення 10.09.2025)
7. Закон України «Про освіту» від 05.09.2017 № 2145-VIII (із змінами). URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/2145-19#Text> (дата звернення: 02.09.2025).
8. Закон України «Про повну загальну середню освіту» від 13.01.2020 № 463-IX. URL: <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/463-20#Text> (дата звернення: 02.09.2025)

9. Істер О. С., Єргіна О. В. Геометрія : підручник для 11 класу (профільний рівень). Київ. Генеза. 2019. 224 с. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1248-geometriya-11-klas-ister.html>
10. Кондратенко С. В. Формування просторових уявлень і способів орієнтування (праці, метод. матеріали) Київ : Інститут спеціальної педагогіки НАПНУ (2017 та ін.) URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/716141/1/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE%20%D0%97%D0%B1%D1%96%D1%80%D0%BD%D0%B8%D0%BA%20%D1%82%D0%B5%D0%B7-1-04-19-18-21.pdf>
11. Крижановський О. Модельна навчальна програма навчального предмета «Геометрія. 10-12 класи. Поглиблений рівень» для закладів загальної середньої освіти. URL: https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/profilna/mnp/mnp-geometr-x-ia-10-12-kri-zanovskii-x-1-1.pdf?utm_source=chatgpt.com
12. Кушнір В. М. Методика навчання стереометрії: навчальний посібник. Львів: Світ, 2019. – 312 с.
13. Малихін О., Арістова Н., Ліпчевська І. Regulatory and legal support of profile secondary education. Профільна середня освіта: виклики і шляхи реалізації: зб. матеріалів, 2024. С. 88–94. URL: <https://lib.iitta.gov.ua/id/eprint/741089/> (Дата звернення 10.09.2025)
14. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підручник для 10 класу (профільний рівень) / за ред. А. Г. Мерзляка. Харків. Гімназія. 2018. 240 с. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1140-geometriya-10-klas-merzlyak-prof.html>
15. Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Полонський В. Б., Якір М. С. Геометрія : підручник для 11 класу (профільний рівень). Харків. Гімназія. 2019. 256 с. URL: <https://pidruchnyk.com.ua/1247-geometriya-11-klas-merzlyak.html>

16. Морзе Н. В., Варченко-Троценко Л. О. Цифрові інструменти у професійній діяльності вчителя : навч.-метод. посіб. Київ : Освіта. 2021. 176 с. URL:

https://elibrary.kubg.edu.ua/id/eprint/35888/1/MorzeN_Vasylenko_Varchenko_Vember_Boyko_Vorotnikova_Smirnova_Innovative%20Teaching%20Instruments.pdf

17. Нормативні методичні документи МОН Інструктивно-методичні рекомендації, Типові програми та методичні вказівки (Міністерство освіти і науки України). URL: <https://mon.gov.ua/static-objects/>

18. Панченко В. О. Формування просторових уявлень у молодших школярів на уроках математики. *Наукові записки. Серія : Педагогічні та історичні науки*. Київ : Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2013. Вип. CXV (115). С. 181-188. URL: <http://enpuir.npu.edu.ua/handle/123456789/24148>

19. Профілізація старшої школи в Україні: методичні рекомендації. МОН України, 2018. URL: https://www.irf.ua/files/eng/programs_edu_ep_409_en_ref_strategy.pdf (Дата звернення 10.09.2025)

20. Сахно А. М. Формування просторових уявлень у дітей молодшого шкільного віку засобами наочності. *Науковий вісник Уманського державного пед. ун-ту ім. П. Тичини*. 2019. Вип. 3. С. 12-18.

21. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні основи навчання математики. Київ: Вища школа, 2018. 320 с.

22. Тадеєв В. О. Геометрія. Основи стереометрії : дво-рівневий підручник для профільного навчання 10 кл. Тернопіль. Навчальна книга. Богдан. 2010. 400 с. URL: https://bohdan-books.com/upload/iblock/44a/44a1b697146332083ebabc038c54a83b.pdf?srsId=AfmBOord_5Cj_ngAlrDpfRA3bQKwjkm4SpppzxFl7vJhkhgAkTl76bjd

23. Ткаченко А. Г., Рудницька Н. Ю. Розвиток просторового уявлення на уроках математики учнів 3-4 класів засобами інтерактивних технологій. *матеріали конференції / зб.* Житомир. 2022. С. 130-133. URL:

<https://eprints.zu.edu.ua/36160/1/%D0%A2%D0%BA%D0%B0%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%BA%D0%BE.pdf>

24. Шандро М. М. Формування просторових уявлень у дітей старшого шкільного віку : метод. рекомендації / матеріали Херсон : ХДУ, 2022. URL: https://archer.chnu.edu.ua/bitstream/handle/123456789/6280/educ_2023_029.pdf?isAllowed=y&sequence=1

25. Шлапаченко О. А. Проблема формування просторових уявлень у дітей 5–8 років. *Наукові записки Інституту психології ім. Г. С. Костюка НАПН України*. Київ. 2010. Вип. 7. С. 2-8.

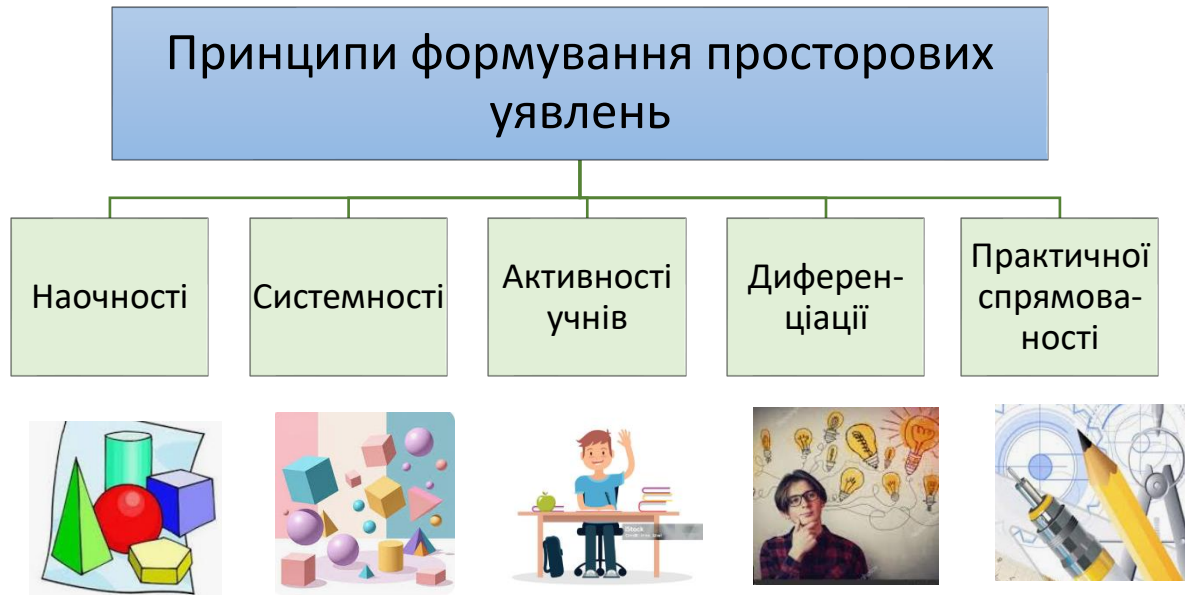
26. Щербакова К. Й. Методика формування елементарних математичних уявлень у дітей дошкільного та молодшого шкільного віку : навч.-метод. посіб. Київ : «Вища школа», 1996. 112 с. URL: <https://www.kspu.edu/FileDownload.ashx/%D0%A9%D0%B5%D1%80%D0%B1%D0%B0%D0%BA%D0%BE%D0%B2%D0%B0%20%D0%9A.%20%D0%9C%D0%B5%D1%82%D0%BE%D0%B4%D0%B8%D0%BA%D0%B0%20%D1%84%D0%BE%D1%80%D0%BC%D1%83%D0%B2%D0%B0%D0%BD%D0%BD%D1%8F%20%D0%B5%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B5%D0%BD%D1%82%D0%B0%D1%80%D0%BD%D0%B8%D1%85%20%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%87%D0%BD%D0%B8%D1%85%20%D1%83%D1%8F%D0%B2%D0%BB%D0%B5%D0%BD%D1%8C.pdf?id=20b18e6c-a493-4401-90e2-25ec2fb7f99c>

27. Desmos 3D. URL: <https://www.desmos.com/3d?lang=uk> (Дата звернення 05.10.2025)

28. GeoGebra. URL: <https://www.geogebra.org/graphing> (Дата звернення 05.10.2025)

ДОДАТКИ

Додаток А. Принципи та підходи до формування просторових уявлень учнів.



Підходи до формування просторових уявлень учнів.



Додаток Б. Приклади розв'язання задач.

Приклад. Задача 6. У кулі радіуса 6 см висвердлено циліндр радіуса 2 см. Знайти об'єм отриманого тіла.

Розв'язання:

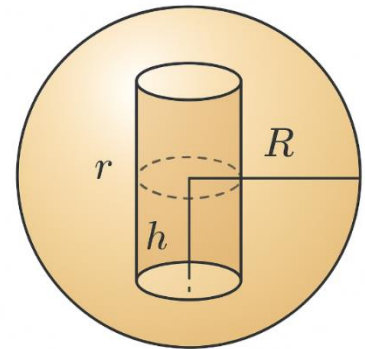
1. Аналіз геометричної ситуації

Куля має радіус $R = 6$ см. Через центр кулі розташовано круговий циліндр радіуса $r = 2$ см, тобто його вісь проходить через центр кулі.

У результаті висвердлювання з кулі видаляється циліндр з двома півсферичними «шапками» (на кінцях). Його об'єм має цікаву властивість: він залежить лише від висоти отвору, а не від радіуса первинної кулі.

2. Знаходження висоти отвору

Висвердлений отвір має опуклу поверхню. Висота отвору – це довжина відрізка, що проходить через кулю вздовж осі циліндра, тобто: $h = 2\sqrt{R^2 - r^2}$



Підставимо числові дані:

$$\begin{aligned} h &= 2\sqrt{6^2 - 2^2} = 2\sqrt{36 - 4} = 2\sqrt{32} = 2 \cdot 4\sqrt{2} \\ &= 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

3. Класична формула об'єму тіла, що залишається.

При висвердлюванні кругового циліндра з кулі об'єм отриманого тіла дорівнює:

$$V = \frac{\pi h^3}{6}$$

Ця формула є наслідком інтегрального підходу: об'єм визначається як інтеграл площ кругових перерізів кулі.

Підставляємо:

$$V = \frac{\pi(8\sqrt{2})^3}{6}$$

Обчислимо куб:

$$(8\sqrt{2})^3 = 8^3 \cdot (\sqrt{2})^3 = 512 \cdot 2\sqrt{2} = 1024\sqrt{2}$$

Тепер:

$$V = \frac{\pi \cdot 1024\sqrt{2}}{6} = \frac{512\sqrt{2}}{3} \pi$$

4. Числове значення

$$V \approx \frac{512 \cdot 1.414}{3} \pi \approx \frac{724}{3} \pi \approx 241,33\pi \approx 758,3 \text{ см}^3$$

5. Чому не потрібно віднімати об'єм звичайного циліндра? У деяких розв'язаннях хибно віднімають об'єм прямого циліндра $\pi r^2 h$

Проте це неправильно, тому що з кулі висвердлюється не прямий циліндр, а циліндрична порожнина з сферичними склепіннями, тобто сукупність дисків, радіус яких змінюється за законом:

$$\rho(z) = \sqrt{R^2 - z^2}$$

Тому точний об'єм визначається інтегруванням, що приводить до формули

$$V = \frac{\pi h^3}{6}$$

Відповідь

$$V = \frac{512\sqrt{2}}{3} \pi \text{ см}^3 \approx 758,3 \text{ см}^3$$

Приклад. Задача 7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням трапеції з основами 6 і 10 та висотою 4 навколо більшої основи.

1. Побудова координатної моделі й ідея розв'язання

Розглянемо рівнобічну трапецію (симетричну відносно вертикальної осі), в якій більша основа $A = 10$ лежить на осі x від $x = -5$ до $x = 5$ при $y=0$, а менша основа $a=6$ лежить на відрізку від $x=-3$ до $x=3$ при $y=4$. (Такий вибір координат узгоджується з умовою: бази паралельні й центри суміщені.)

Обертання цієї трапеції навколо осі x (тобто навколо прямої, що містить більшу основу) дає тіло обертання. Для знаходження об'єму застосуємо метод перерізів (дисків): для кожного значення x (уздовж осі від -5 до 5) переріз тіла

площиною, перпендикулярною до осі x , - це круг радіуса $y_{max}(x)$, де $y_{max}(x)$ – відстань від осі x до верхньої границі трапеції в цій вертикалі.

Об'єм:

$$V = \int_{x=-5}^5 \pi (y_{max}(x))^2 dx$$

Через симетрію інтеграл можна обчислити як 2 рази інтеграл від 0 до 5, або розбити діапазон на ділянки, де функція $y_{max}(x)$

2. Вираз для $y_{max}(x)$

для $|x| \leq 3$ верхня грань – це горизонтальна пряма $y=4$;

для $3 < |x| \leq 5$ верхня грань задається прямою між точками (3,4) та (5,0). На правій половині ($x \in [3,5]$) ця пряма має вигляд

$$y(x) = -2x + 10$$

а на лівій – симетрично $y(x)=2x+10$ з від'ємним знаком для $x < 0$ (але через квадрат симетрія спрощує обчислення).

Отже,

$$y_{max}(x) = \begin{cases} 4, & |x| \leq 3 \\ -2x + 10, & 3 < x \leq 5 \text{ (праворуч)} \\ 2x + 10, & \text{для } x < -3 \text{ (ліворуч)} \end{cases}$$

(Для інтегрування зручно скористатися симетрією.)

3. Обчислення інтегралу

Розіб'ємо інтеграл на три частини: від -5 до -3 , від -3 до 3 і від 3 до 5 .

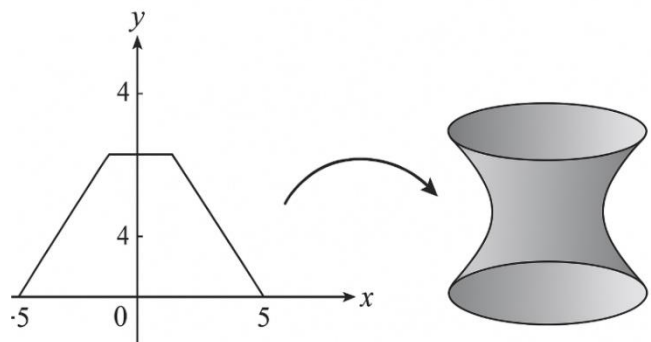
Використаємо симетрію: дві бокові ділянки дають однаковий внесок.

$$V = \int_{-5}^{-3} \pi y^2 dx + \int_{-3}^3 \pi (4)^2 dx + \int_3^5 \pi y^2 dx = 2 \int_3^5 \pi y^2 dx + \int_{-3}^3 16\pi dx$$

Обчислимо середню

(центральну) частину:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^3 16\pi dx &= 16\pi \cdot (-3(-3)) \\ &= 16\pi \cdot 6 = 96\pi \end{aligned}$$



Тепер бокову частину (для $x \in [3, 5]$, $y = -2x + 10$):

$$\int_3^5 \pi(-2x + 10)^2 dx = \int_3^5 (4x^2 - 40x + 100) dx$$

Обчислимо первісну:

$$\int (4x^2 - 40x + 100) dx = \frac{4}{3}x^3 - 20x^2 + 100x$$

Значення на межах:

$$\left[\frac{4}{3}x^3 - 20x^2 + 100x \right]_3^5 = \left(\frac{4}{3} \cdot 125 - 20 \cdot 25 + 500 \right) - \left(\frac{4}{3} \cdot 27 - 20 \cdot 9 + 300 \right)$$

Обчислимо чисельно:

$$\text{в при } x = 5: \frac{500}{3} - 500 + 500 = \frac{500}{3}$$

$$\text{в при } x = 3: \frac{108}{3} - 180 + 300 = 36 - 180 + 300 = 156.$$

Різниця:

$$\frac{500}{3} - 156 = \frac{500 - 468}{3} = \frac{32}{3}$$

Отже

$$\int_3^5 \pi(-2x + 10)^2 dx = \pi \cdot \frac{32}{3} = \frac{32\pi}{3}$$

Двобічний внесок (права + ліва бокові ділянки):

$$2 \cdot \frac{32\pi}{3} = \frac{64\pi}{3}$$

Підсумовуємо:

$$V = 96\pi + \frac{64\pi}{3} = \frac{288\pi}{3} + \frac{64\pi}{3} = \frac{352\pi}{3}$$

4. Остаточна відповідь і чисельне наближення

$$V = \frac{352\pi}{3} \approx 368,9 \text{ см}^3$$

Додаток В. Приклади використання ІКТ при вивченні геометричних тіл у курсі математики старшої школи.

1. Приклад використання GeoGebra.

побудувати переріз правильної трикутної призми площиною, яка проходить через вершину верхньої основи A_1 та середини двох прилеглих ребер нижньої основи M_{AB} і M_{AC} . Нижня основа – правильний трикутник зі стороною $a=6$ см; висота призми $h=12$ см. Побудуйте переріз, доведіть, яка це фігура, і знайдіть його площу.

1. Відкрийте GeoGebra Classic і включіть 3D Graphics (або відкрийте GeoGebra 3D).
2. Побудуйте правильний трикутник у площині $z=0$:
 - Створіть точки:
 - $A = (0,0,0)$
 - $B = (6,0,0)$ (січно по осі x)
 - $C = (3, 3\sqrt{3}, 0)$ – так ABC буде правильним трикутником зі стороною 6 .
 - Інструмент **Polygon[A,B,C]** або **Polygon[A,B,C]** (отримаємо основу).
3. Побудуйте призму висотою $h=12$:
 - Використайте команду **Translate[<Polygon>, <Vector>]** або інструмент **Prism**.
 - У терміналі: $A_1 = (0,0,12)$, $B_1 = (6,0,12)$, $C_1 = (3, 3\sqrt{3}, 12)$.
 - Або: **Prism[A,B,C, (0,0,12)]** – отримаєте верхню основу $A_1B_1C_1$ і бічні грані.
4. Знайдіть середини двох прилеглих ребер нижньої основи:
 - $M_{AB} = \text{Midpoint}[A,B] \rightarrow$ точка $(3,0,0)$.
 - $M_{AC} = \text{Midpoint}[A,C] \rightarrow$ точка $(1.5, 1.5\sqrt{3}, 0)$.
5. Побудуйте площину через три точки A_1, M_{AB}, M_{AC} :

○ Команда: $\text{Plane}[A1, M_AB, M_AC]$ або інструмент **Plane through 3 Points**.

○ GeoGebra відобразить площину в 3D.

6. Знайдіть перетин площини з призмою:

○ Використайте інструмент **Intersect** (або команду $\text{Intersect}[\langle \text{Plane} \rangle, \langle \text{Polyhedron} \rangle]$).

○ У 3D: $\text{Intersect}[\text{Plane}[A1, M_AB, M_AC], \text{Prism}[A, B, C, (0, 0, 12)]]$ – GeoGebra побудує лінію перетину або полігон перетину.

7. Виміряйте отриману фігуру:

○ Якщо GeoGebra дає переріз як полігон, використайте $\text{Polygon}[\dots]$ і $\text{Area}[\dots]$.

○ Якщо переріз – трикутник з вершинами $A1, M_AB, M_AC$, можна виміряти $\text{Area}[\text{Polygon}[A1, M_AB, M_AC]]$.

Короткі підказки:

• У GeoGebra 3D зручно перейти в режим огляду (orbit) та обернути модель, щоб перевірити форму перерізу.

• Використовуйте інструмент **Point on Object** або **Intersect** для точного знаходження перетинів ліній/площин з ребрами.

• Після побудови перерізу включіть видимість координат, щоб GeoGebra показав значення вершин – це дасть перевірку аналітичного розв'язку.

